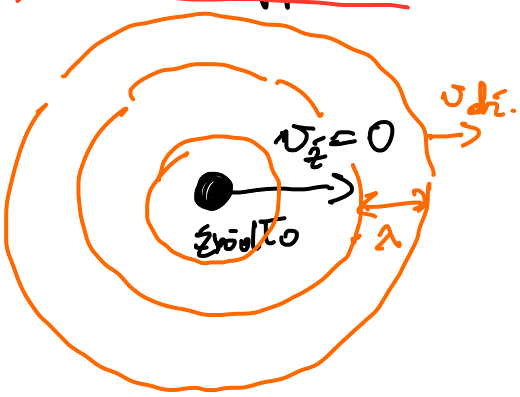
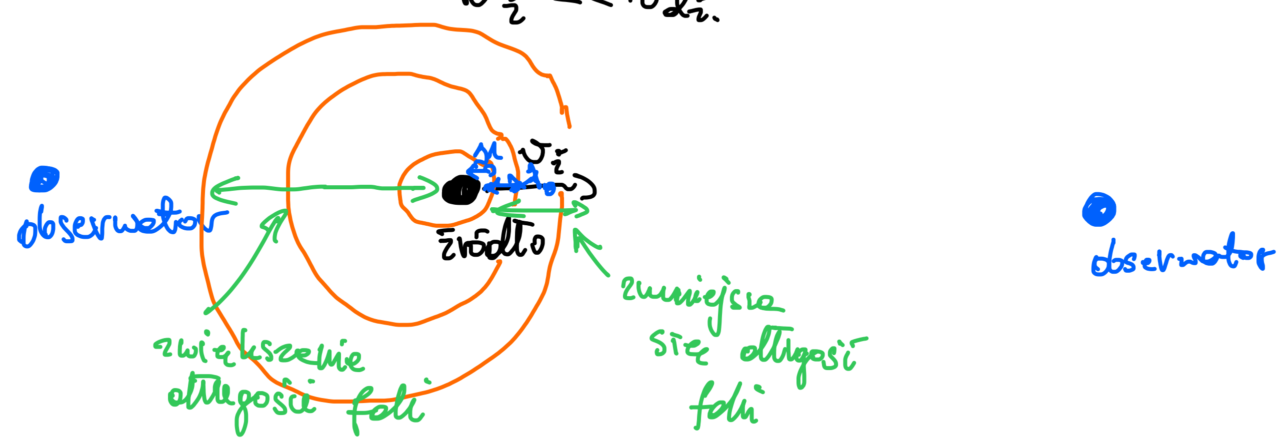
Przygotowanie do olimpiady 5.01.2021

#10. Fale elektromagnetyczne i akustyka

Efekt Dopplera



$v_ź << v_{dź.}$



W ciągu 1 okresu $T = \frac{1}{f_0}$ źródło zbliża się do obserwatora o odległość $\Delta l = v_ź T = \frac{v_ź}{f_0}$.

W tym samym czasie poprzednio wyemitowany „impuls" pokonuje odległość:

$$l = v_{dź.} T = v_{dź.} \frac{1}{f_0} = \lambda_0$$

$$v_{dź} = f_0 \lambda_0$$

Nowa długość fali w tym przypadku słyszana przez obserwatora wynosi:

$$\lambda' = \lambda_0 - \Delta l = \underbrace{\lambda_0}_{= \frac{v_{dź}}{f_0}} - \frac{v_ź}{f_0} = \frac{v_{dź} - v_ź}{f_0}$$

Nowa częstotliwość dźwięku, którą słyszy obserwator wynosi:

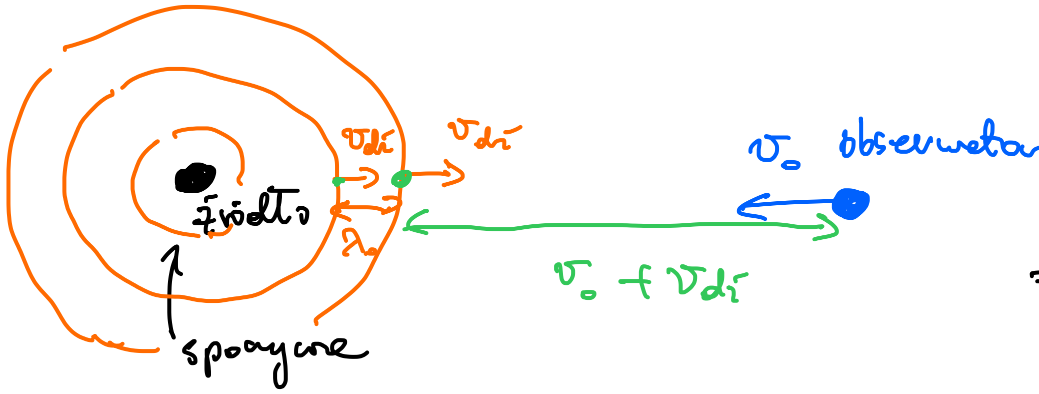
$$f' = \frac{v_{dź}}{\lambda'} = \frac{v_{dź}}{\frac{1}{f_0}(v_{dź} - v_ź)} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v_ź}{v_{dź.}}}$$

przybliżanie się źródła do obs.

To wyrażenie nie ma sensu, gdy $v_ź > v_{dź.}$

Gdyby źródło oddalało się od obserwatora, wtedy

$$f' = f_0 \frac{1}{1 + \frac{v_ź}{v_{dź}}}$$



$$T(v_{dź} + v_0) = \lambda_0$$

$$\Rightarrow \underset{\frac{1}{f'}}{\underset{\|}{T}} = \frac{\lambda_0}{v_{obs} + v_{dź}} = \frac{v_{dź}}{f_0 (v_{obs} + v_{dź})}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_0\left(1 + \frac{v_0}{v_{dź}}\right)} \Rightarrow f' = f_0\left(1 + \frac{v_0}{v_{dź}}\right)$$

Gdyby obserwator oddalał się od źródła, wtedy

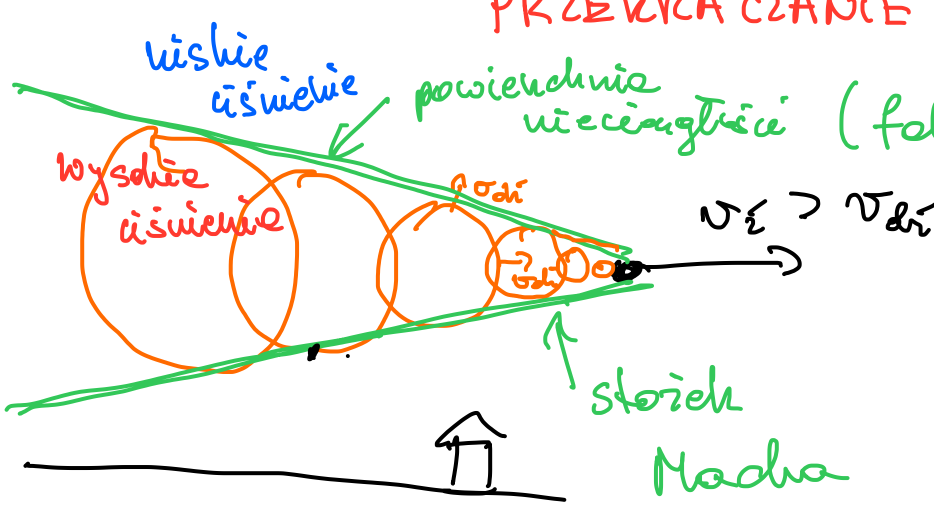
$$f' = f_0\left(1 - \frac{v_0}{v_{dź}}\right)$$

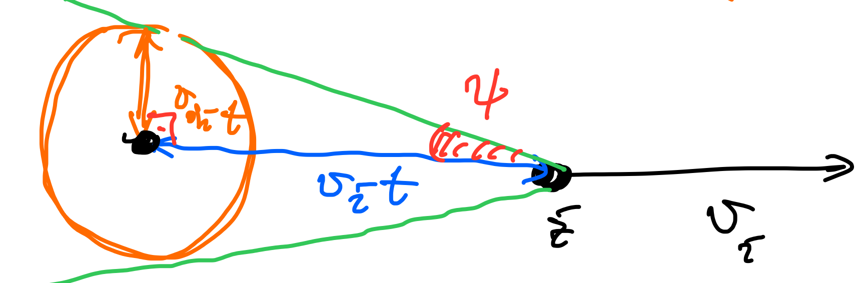
$$\boxed{f' = f_0 \frac{\left(1 + \frac{v_0}{v_{dź}}\right)}{\left(1 - \frac{v_ź}{v_{dź}}\right)}}$$

„−" gdy obserwator się oddala

„+" gdy źródło się oddala

PRZEKRACZANIE PRĘDKOŚCI DŹWIĘKU





$$\sin\psi = \frac{v_{dź}\, t}{v_ź\, t} = \frac{v_{dź}}{v_ź}$$

$$\psi = \arcsin\left(\frac{v_{dź}}{v_ź}\right)$$

kąt Macha

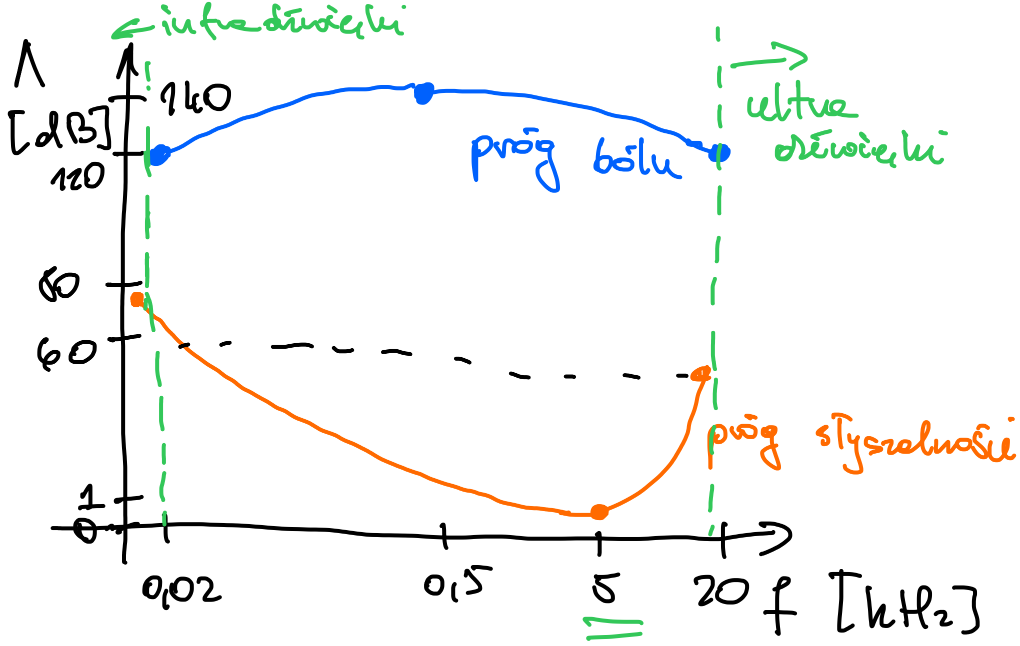
Poziomy natężenia dźwięku

Prawo Webera-Fechnera:

$$\Lambda = \log_{10} \frac{I}{I_0},$$

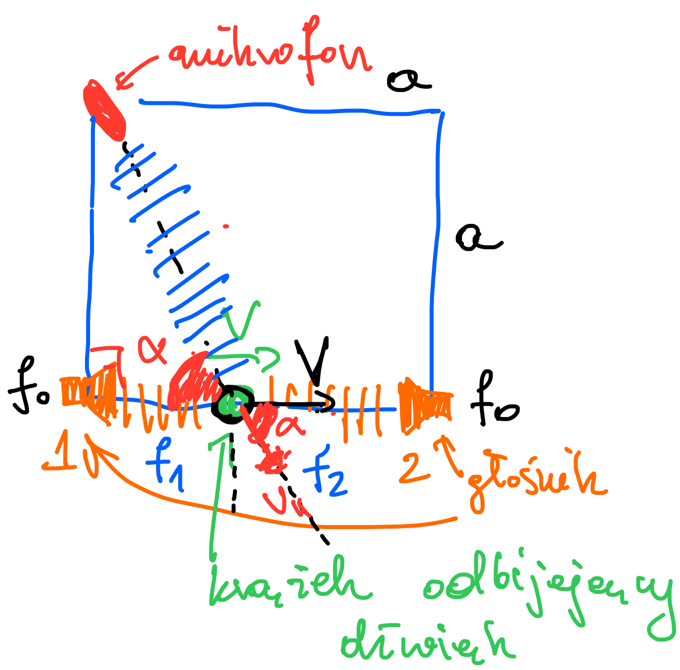
poziom natężenia dźwięku [dB]

$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$



Dźwięki niesłyszalne dla człowieka dzielimy na infradźwięki poniżej 16 Hz oraz ultradźwięki powyżej 20 kHz.

LX OF, st. II, zad. 1



α - kąt odbicia od krążka

$\nu << f_0$ ←

częstotliwość dudnienia

Jaka jest prędkość krążka?

$$V/\nu << a$$

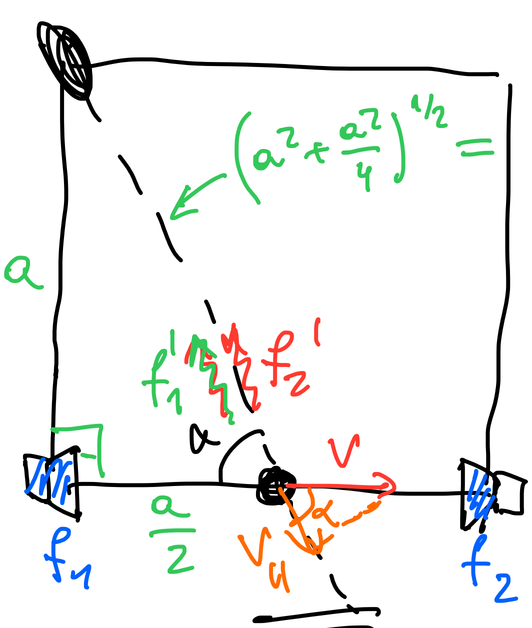
$$f_2 = f_0\left(1 + \frac{V}{v_{dź}}\right)$$

$$f_1 = f_0\left(1 - \frac{V}{v_{dź}}\right)$$

$$V_\parallel = V\cos\alpha$$

$$f_1' = f_1 \Big/ \left(1 + \frac{V\cos\alpha}{v_{dź}}\right)$$

$$f_2' = f_2 \Big/ \left(1 + \frac{V\cos\alpha}{v_{dź}}\right)$$



$$\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{1/2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\nu = |f_2' - f_1'| = f_0 \left| \left(1+\frac{V}{v_{dź}}\right) \Big/ \left(1+\frac{V\cos\alpha}{V_{dź}}\right) - \left(1-\frac{V}{v_{dź}}\right) \Big/ \left(1+\frac{V\cos\alpha}{V_{dź}}\right) \right|$$

$$= \frac{f_0}{1+\frac{V\cos\alpha}{v_{dź}}} \left| 1+\frac{V}{v_{dź}} - 1 + \frac{V}{v_{dź}} \right| = \frac{f_0\, 2V}{v_{dź}\left(1+V\cos\alpha/v_{dź}\right)}$$

Gdy krążek jest w połowie odległości między głośnikami:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\nu\left(v_{dź} + V\cos\alpha\right) = f_0\, 2V$$

$$V\left(2f_0 - \nu\cos\alpha\right) = \nu\, v_{dź}$$

$$V = \frac{\nu\, v_{dź}}{2f_0 - \nu\cos\alpha} = v_{dź}\,\frac{\nu}{2f_0}\,\frac{1}{1-\frac{\nu}{2f_0}\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

pomijamy

Ponieważ $\nu \ll f_0$: $\boxed{V = v_{dź}\,\frac{\nu}{2f_0}}$

Fale elektromagnetyczne

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0$$

równanie falowe dla światła

$$\left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right\}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2{,}9979\ldots \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$$

prędkość światła

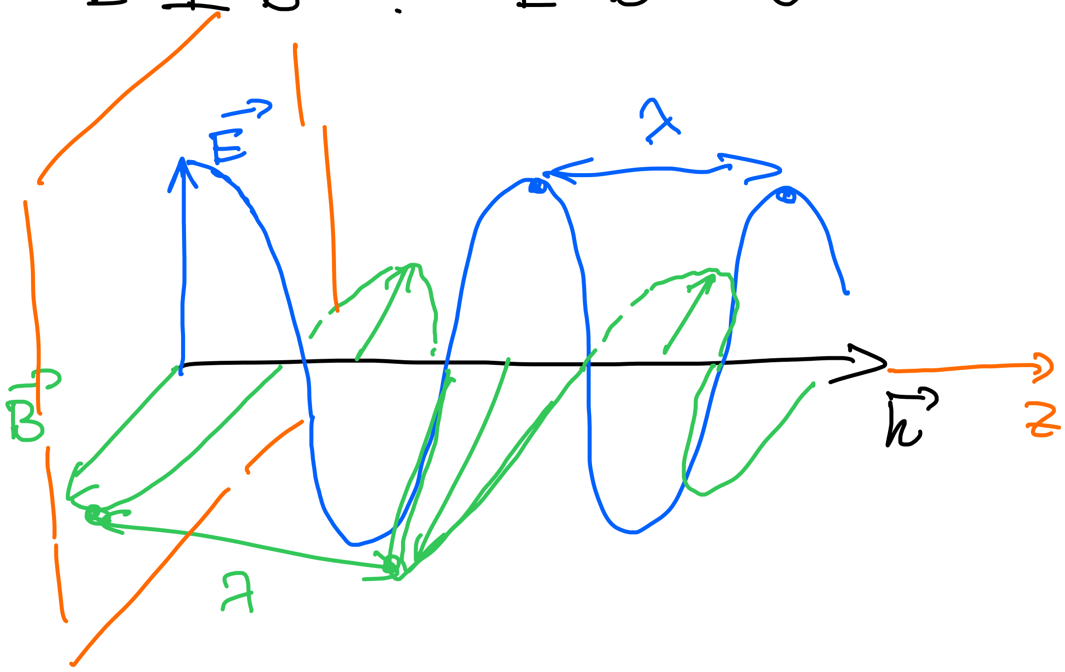
Rozwiązaniem powyższych równań jest:

$\swarrow$ orientacja tego wektora jest dowolna w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali EM.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$|\vec{B}_0| = \underbrace{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}_{= \frac{1}{c}} \, |\vec{E}_0|$$

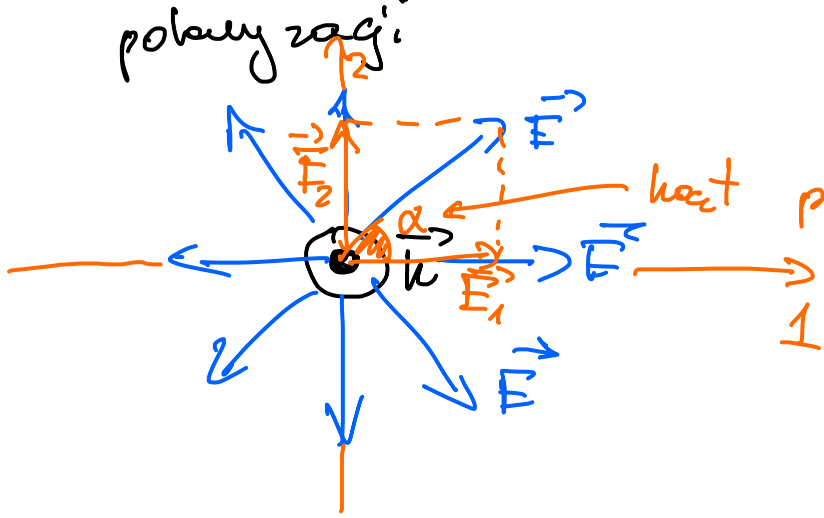
$$\vec{E} \perp \vec{B} \quad : \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

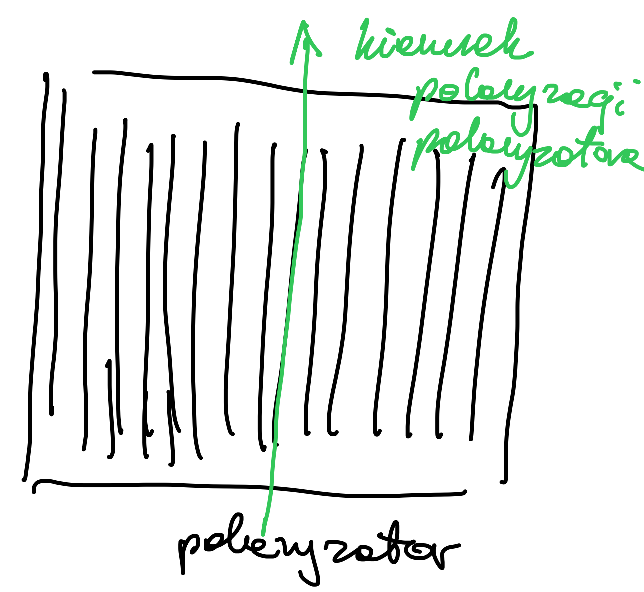


$$k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

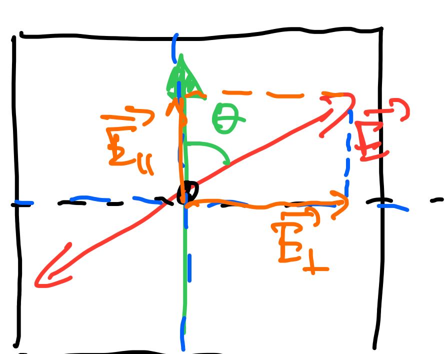
$$c = \frac{\omega}{k}$$

Światło słoneczne jest mieszaniną różnych polaryzacji





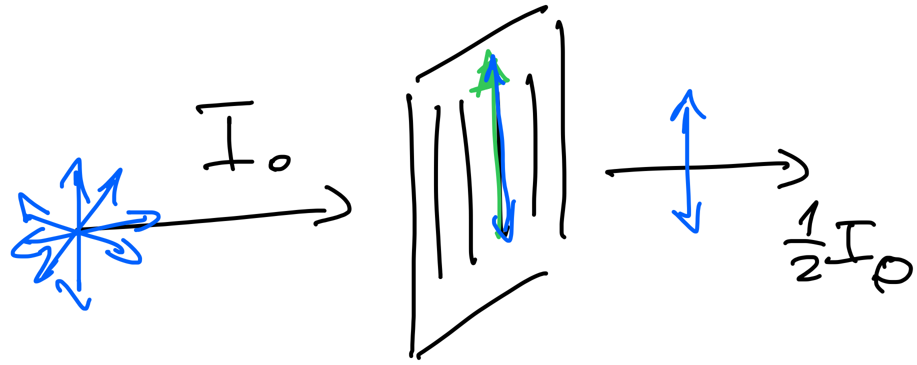
$$I \propto |\vec{E}|^2$$



$$\vec{E}_\parallel = \vec{E} \cos\alpha$$

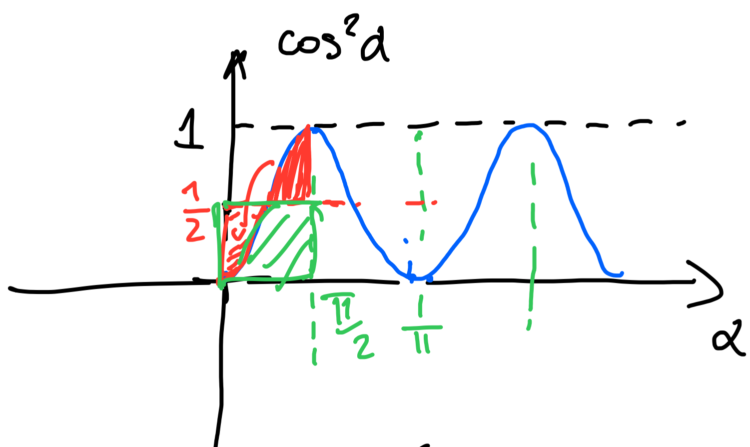
$$\boxed{I = I_0 \cos^2\alpha}$$

Prawo Malusa



Natężenie światła niespolaryzowanego
z-mniejsza się
o połowę przy przejściu przez polaryzator i następuje pełna polaryzacja
$\pi/2$

$$I = \int dI = \frac{2}{\pi}\int_0 I_0 \cos^2\alpha \, d\alpha =$$

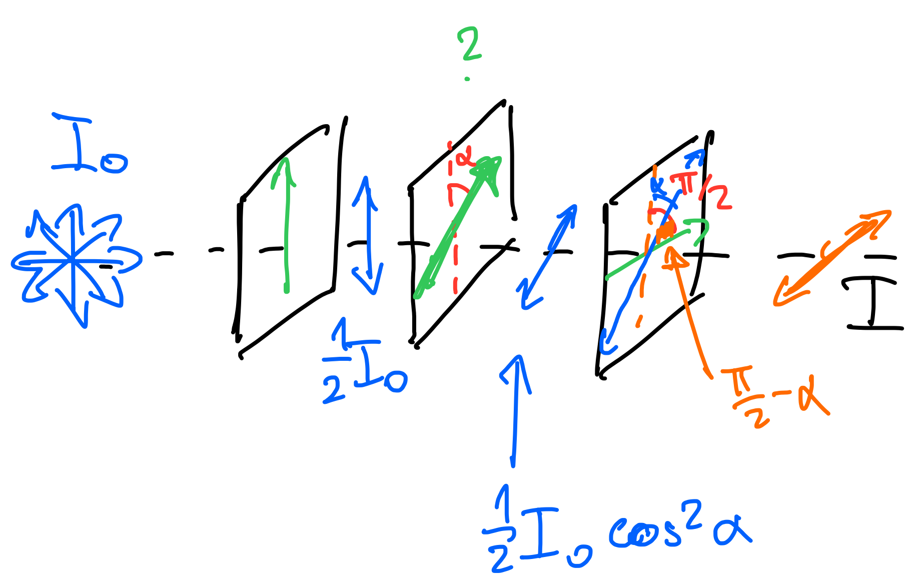


$$= I_0 \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} I_0$$

Uśrednienie po okresie

$$\left\langle \cos^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right\rangle_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \cos^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\right\rangle_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \sin^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{2}$$

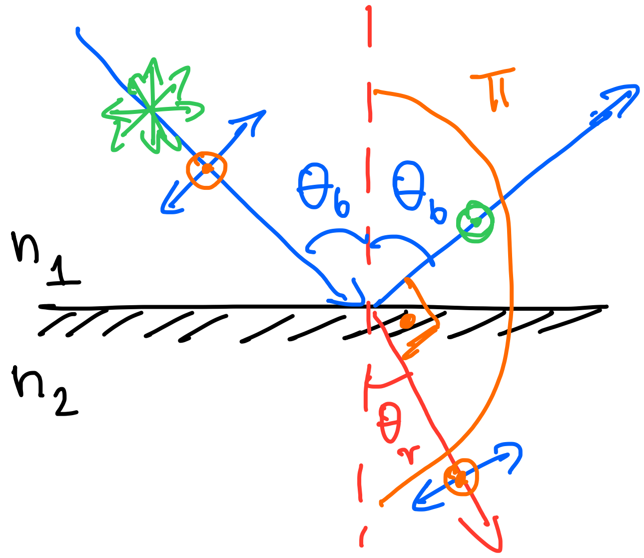


$$\frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha \, \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \underbrace{\underbrace{\cos^2\alpha \sin^2\alpha}_{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}}_{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}$$

$$I = \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\theta$$

jest maksymalna, gdy $\theta = 45°$



$$\pi = \theta_b + \frac{\pi}{2} + \theta_r$$

$$\theta_b + \theta_r = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_r = \frac{\pi}{2} - \theta_b$$

$$n_1 \sin\theta_b = n_2 \sin\theta_r$$

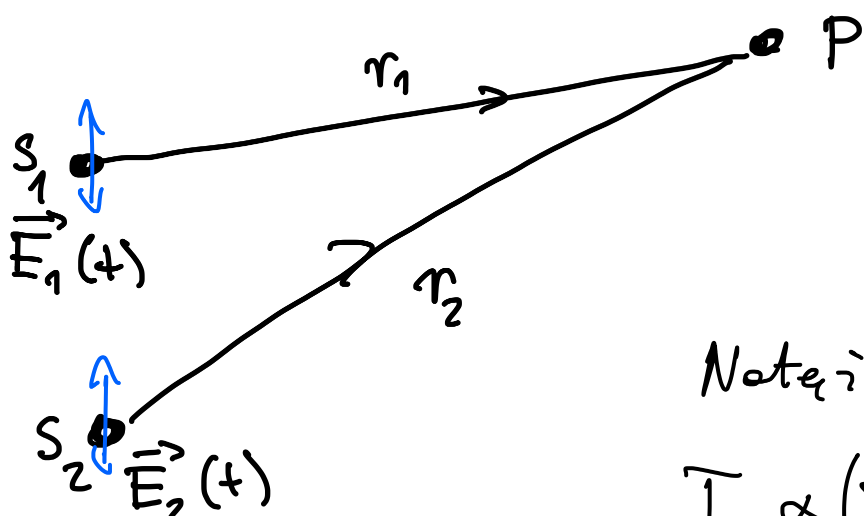
$$n_1 \sin\theta_b = n_2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_b\right)}_{\cos\theta_b}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_b = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \theta_b = \mathrm{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Korzystając z odbicia pod kątem Brewstera można spolaryzować światło

Interferencja



$$\vec{E}_1 = \vec{\mathcal{E}}_1 \cos(kr_1 - \omega t + \alpha_1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{\mathcal{E}}_2 \cos(kr_2 - \omega t + \alpha_2)$$

Natężenie światła w punkcie P:

$$I \propto (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2$$

$$I = c\varepsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2$$

$$\tilde{E}_1 = \mathcal{E}_1 e^{i(kr_1 - \omega t + \alpha_1)}$$

$$\tilde{E}_2 = \mathcal{E}_2 e^{i(kr_1 - \omega t + \alpha_1)}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 = |\vec{E}_1|^2$$

$$\underset{\underset{\mathbb{R}}{\Uparrow}}{|\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2|^2} = (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)(\tilde{E}_1^* + \tilde{E}_2^*) = \tilde{E}_1 \tilde{E}_1^* + \tilde{E}_2 \tilde{E}_2^* + \tilde{E}_1^* \tilde{E}_2 + \tilde{E}_1 \tilde{E}_2^*$$

$$= |\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{i(kr_1 - \omega t + \alpha_1)} e^{-i(kr_2 - \omega t + \alpha_2)} +$$

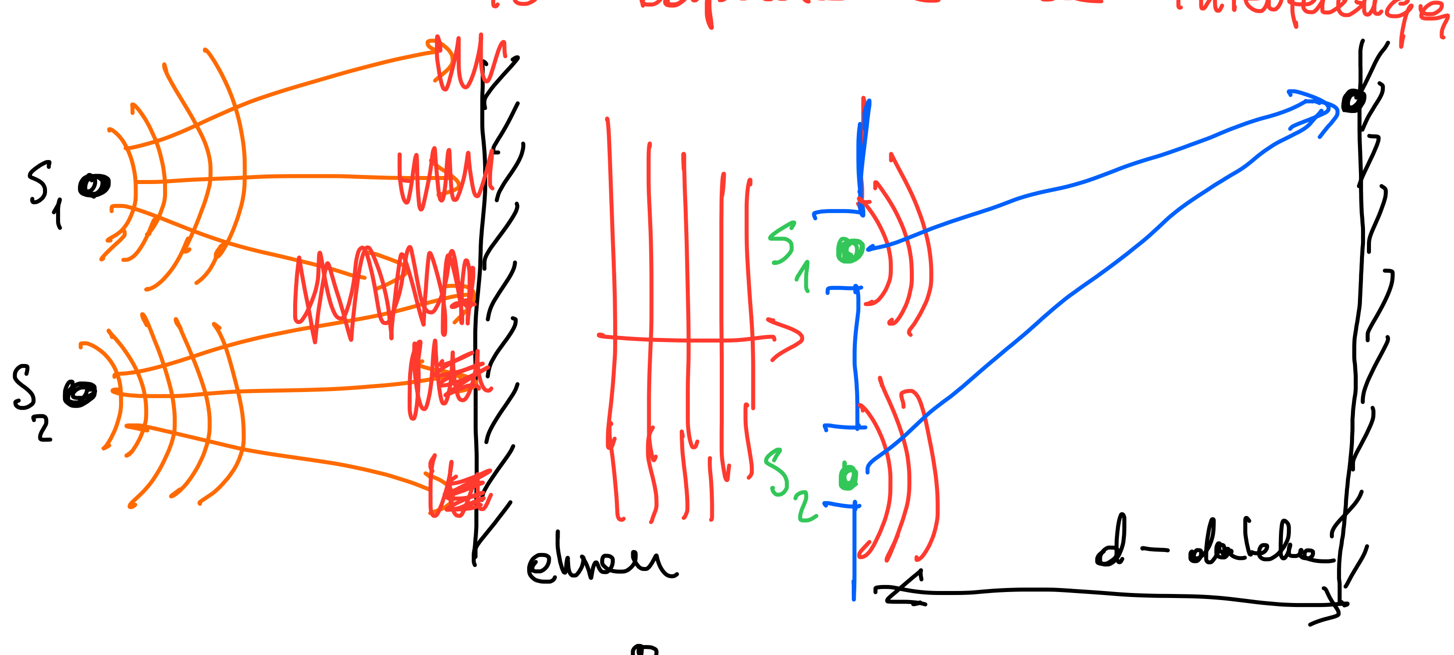
$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{-i(kr_1 - \omega t + \alpha_1)} e^{+i(kr_2 - \omega t + \alpha_2)} =$$

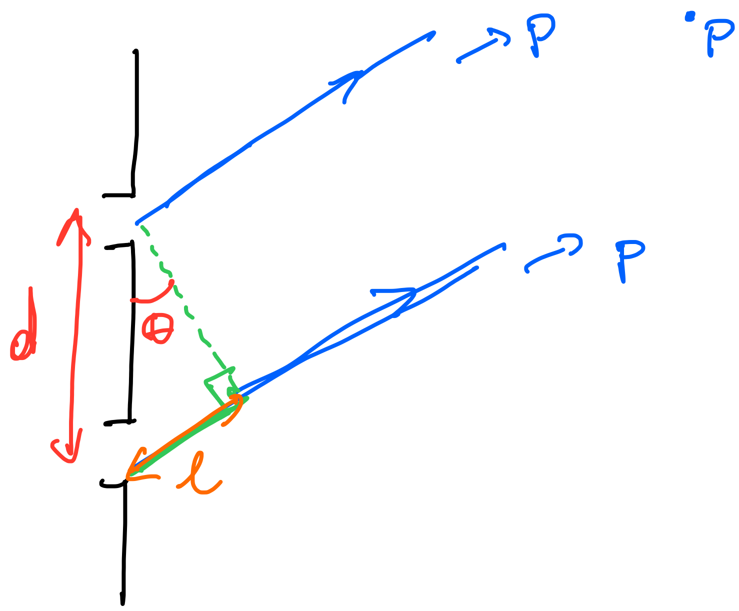
$$= \underset{\{\tilde{E}^* \tilde{E} = \varepsilon e^{i\varphi} \varepsilon e^{-i\varphi} = \varepsilon^2\}}{\underset{\parallel}{|\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2}} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \underbrace{\left(e^{i(k(r_1 - r_2) + \alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(k(r_1 - r_2) + \alpha_1 - \alpha_2)} \right)}_{2\cos(k(r_1 - r_2) + \alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(k(r_1 - r_2) + \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$I = \varepsilon_0 c \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(k(r_1 - r_2) + \alpha_1 - \alpha_2) \right] =$$

$$= I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(r_1 - r_2) + \alpha_1 - \alpha_2)}_{\text{to odpowiada za interferencję}}$$





$$\frac{l}{d} = \sin\theta$$

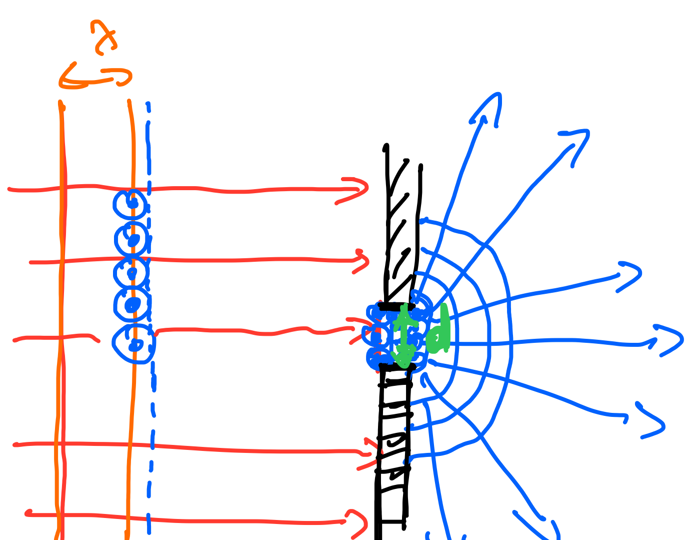
Jeżeli l będzie wielokrotnością długości fali, wtedy w punkcie P następuje interferencja konstruktywna

$$\boxed{n\lambda = d\sin\theta}$$

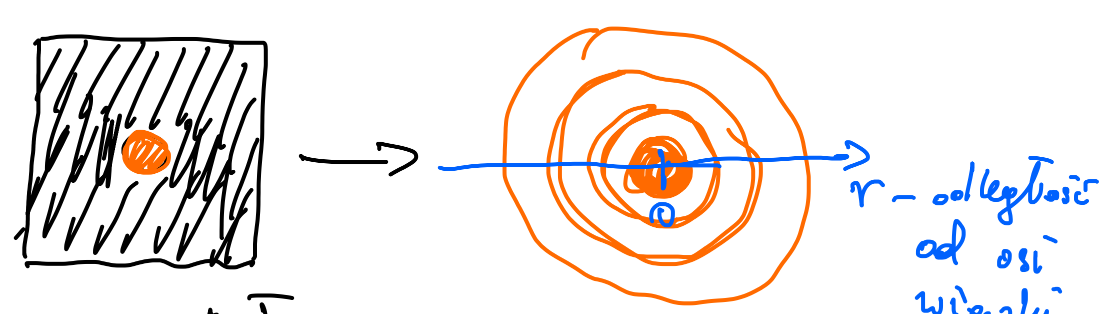
n – rząd prążka

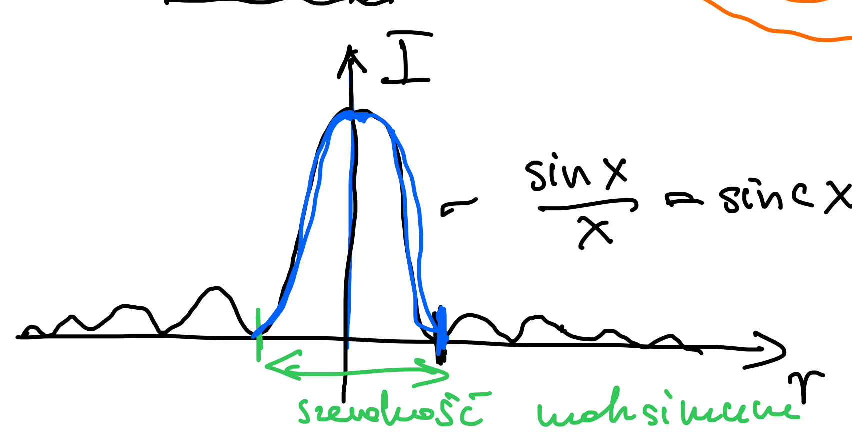
Dyfrakcja

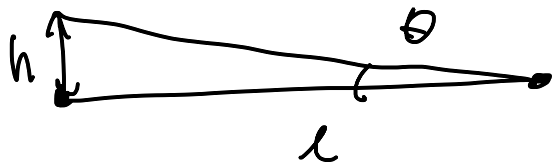
Zasada Huygensa: Każdy punkt do którego dochodzi fala jest źródłem nowej fali kulistej.



Dyfrakcja = ugięcie fali na przeszkodzie







rozmiar kątowy

$$\theta = \operatorname{tg}\frac{h}{l} \simeq \frac{h}{l}$$

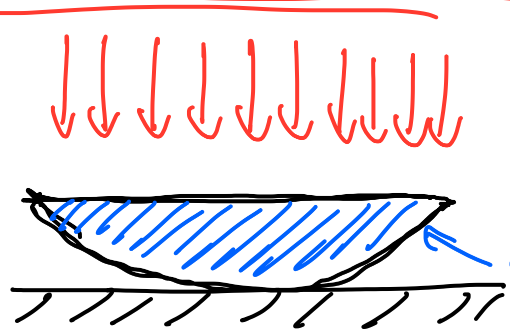
$l >> h$

Kątowa zdolność rozdzielcza urządzenia optycznego jest ograniczona ze względu na dyfrakcję:

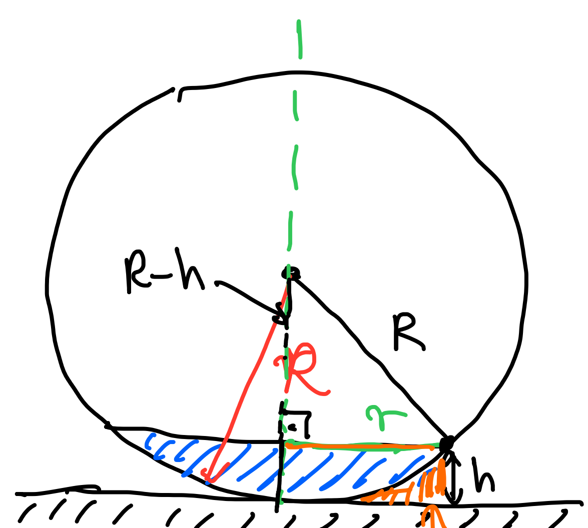
$$\varphi = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d}$$

Obiektyw lub zwierciadło o średnicy d w układzie.

Pierścienie Newtona



Znaleźć promień n-tego ciemnego i jasnego prążka?



$$r^2 + (R-h)^2 = R^2$$

$$r^2 + R^2 - 2Rh + h^2 = R^2$$

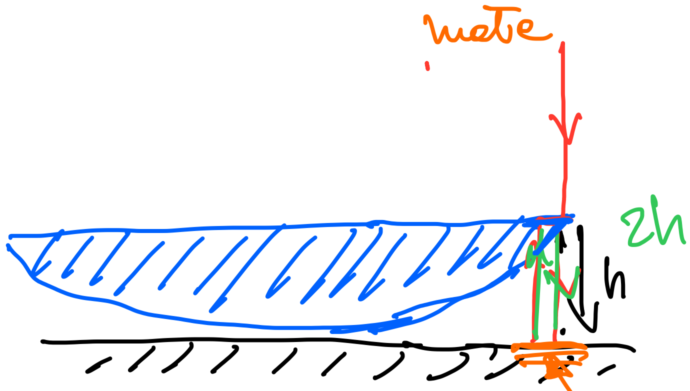
$$r^2 = 2Rh - h^2 = h(2R-h)$$

$$\approx h\,2R$$

$$\Rightarrow \quad h \simeq \frac{r^2}{2R}$$

Interferencja konstruktywna:

$$2h = \left(n - \frac{1}{2}\right)\lambda$$



przy odbiciu światła od lustra następuje przesunięcie fazowe o π

Interferencja destruktywna:

$$2h = \left(n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\lambda = (n-1)\lambda$$

po to, aby światło padające i odbite były w przeciw fazie

$$r^{(n)}_{jasnego} = \sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)\lambda R}$$

$$r^{(n)}_{ciemny} = \sqrt{(n-1)\lambda R}$$