

ELEKTROMAGNETYZM cz. 1

zaawansowane zagadnienia

① Rozwinięcie multipolowe

1°) Potencjał elektrostatyczny φ w dowolnym punkcie P jest stosunkiem pracy W wykonanej przez siłę elektryczną przy przeniesieniu ładunku q od tego punktu do nieskończoności, do wartości tego ładunku:

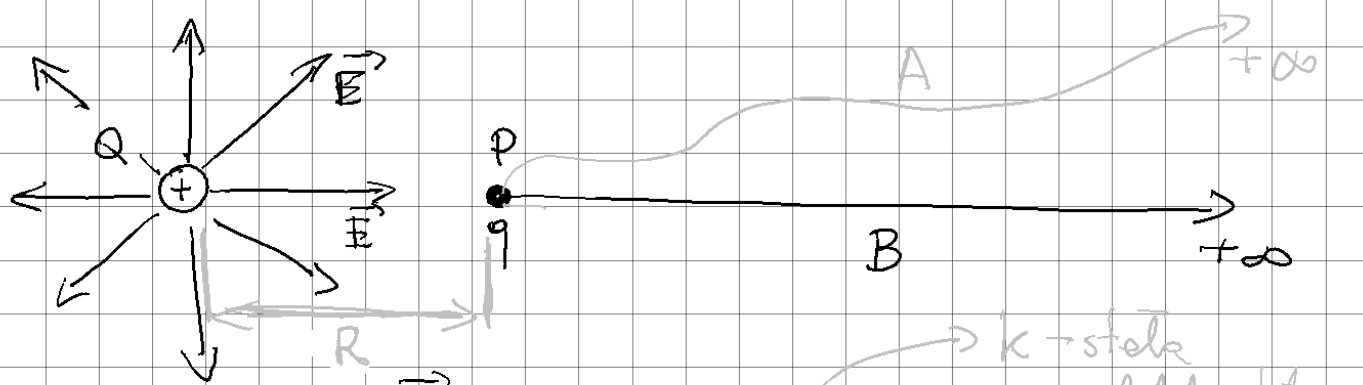
$$\varphi = \frac{W_{P \rightarrow \infty}}{q}$$

Wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ definiujemy jako:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q}, \text{ gdzie}$$

$\vec{F}_{el}$ - siła elektryczna doświadczona przez ładunek próbny q

wieć $\varphi = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$, gdzie $d\vec{l}$ jest elementem długości równoległym do trajektorii po której przenosimy ładunek do nieskończoności, np. dla pola elektrycznego wytwarzanego przez ładunek punktowy Q mamy:



$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{Coulomba}}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$

$\varphi(R) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} =$

$= \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

Handwritten notes:
 $\hat{r}$ - stałe elektrostatyczne
 $\hat{r}$ - jednostkowy wektor skierowany radialnie od ładunku Q
 zerowe tylko wtedy gdy $\hat{r} \perp d\vec{l}$

Potencjał elektrostatyczny jest związany z elektrostatyczną energią potencjalną relacja:

$$E_{\text{pot, el.}} = \varphi \cdot q$$

↑ energia potencjalna ładunku q znajdującego się w potencjale φ .

Napięcie to różnica potencjału w dwóch punktach (A: B):

$$U = \varphi_A - \varphi_B, \text{ gdzie } \varphi_A > \varphi_B$$

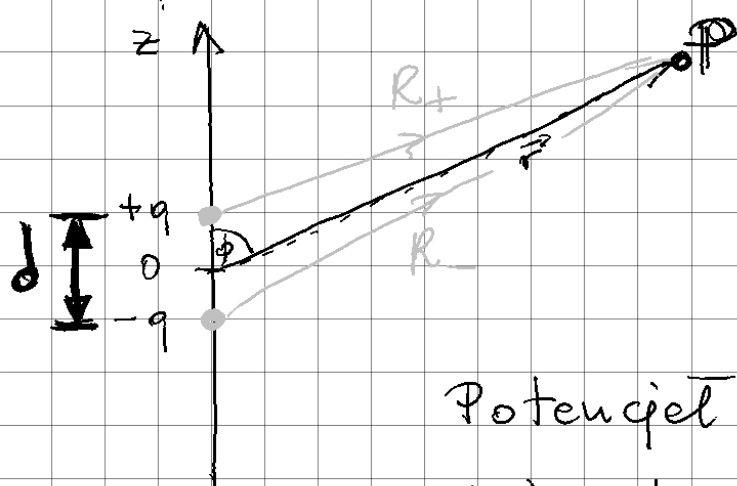
2°) Rozwinięcie multipolowe dla dipola

W tym problemie wykorzystamy przez nas na pewno będzie rozwinięcie funkcji w szereg Taylora:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots,$$

gdzie $f'(a)$ to I pochodna funkcji $f(x)$

w punkcie a , $f''(a)$ to odpowiednio
II pochodna $f(x)$ w punkcie a .

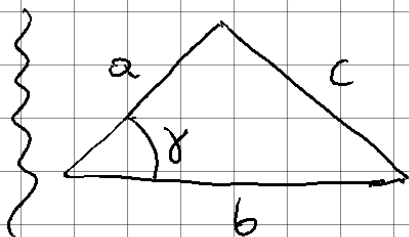


Potencjał w punkcie P :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_+} - \frac{q}{R_-} \right)$$

na mocy zasady superpozycji

Na mocy twierdzenia cosinusów mamy:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$R_+^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r \frac{d}{2} \cos \phi = r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \phi$$

$$R_-^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r \frac{d}{2} \cos(\pi - \phi) = r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \cos \phi$$

stosujemy oznaczenie:

$$R_{\pm}^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd \cos \phi$$

W przypadku, gdy $r \gg d$ mamy:

$$\frac{1}{R_{\pm}} = \frac{1}{\left(r^2 + \frac{d^2}{4} \pm rd \cos \phi\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{d \cos \phi}{r}}}$$

metoda
wyższego rzędu
(pomińmy)

Przybliżamy wykorzystując rozwinięcie Taylora:

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{d \cos \phi}{r}}} = 1 \pm \frac{d}{2r} \cos \phi + \dots$$

Zatem

$$\frac{1}{R_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \phi \right)$$

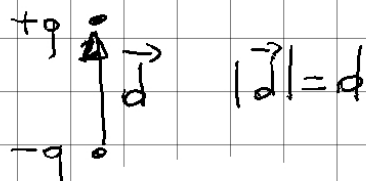
czyli

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \phi \right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \phi \right) \\ &= \frac{d}{r^2} \cos \phi \end{aligned}$$

czyli

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{r^2} \cos \phi$$

Wprowadzając tzw. moment dipolowy
jako $\vec{p} = q \vec{d}$, gdzie



wtedy

$$\left\{ \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi \right. \quad \left. \begin{array}{c} \vec{a} \\ \nearrow \phi \\ \vec{b} \end{array} \right\}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^2}$$

Ogólnie:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_{\text{całk}}}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \right)$$

Takimeli całkowity $Q_{\text{całk}} =$ moment
monopolowy

$\vec{p} =$ moment dipolowy

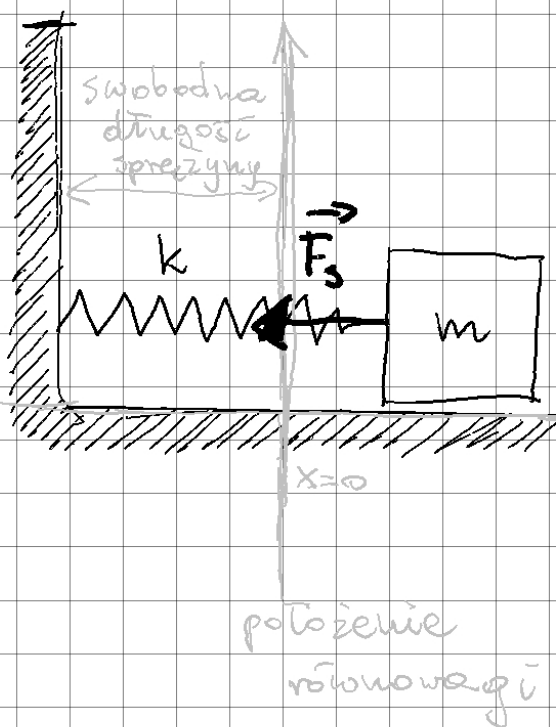
wyższe poprawki to np. momenty
kwadrupolowe

Jest to tak zwane rozwinięcie
multipolowe dla potencjałów.

② Mece drgania

1°) Drgania w układach sprężystych

Rozważmy sytuację:



k - stała sprężystości
sprężyny

m - masa blocka

Na klocek działa
siła sprężystości

$$F_s = -kx$$

Konstancja z II zasady dynamiki Newtona:

$$F_{\text{wyp}} = F_s = -kx = ma$$

$$\Rightarrow a + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Jest to równanie oscylatora
harmonicznego, którego rozwiązanie
jest postaci:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta),$$

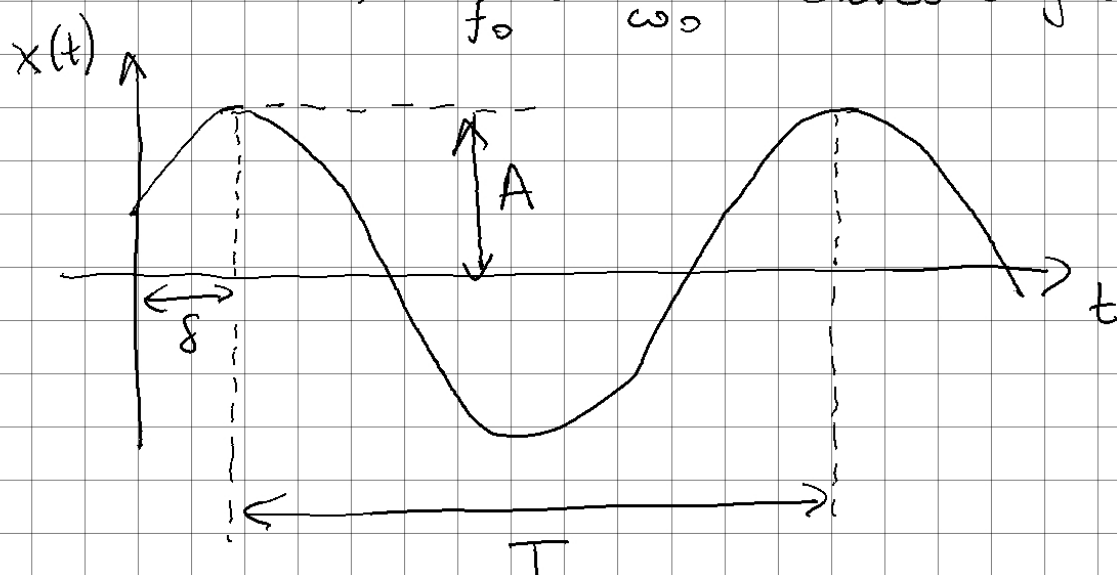
gdzie A - amplituda drgań

ω_0 - częstość kątowa drgań

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ - częstotliwość drgań

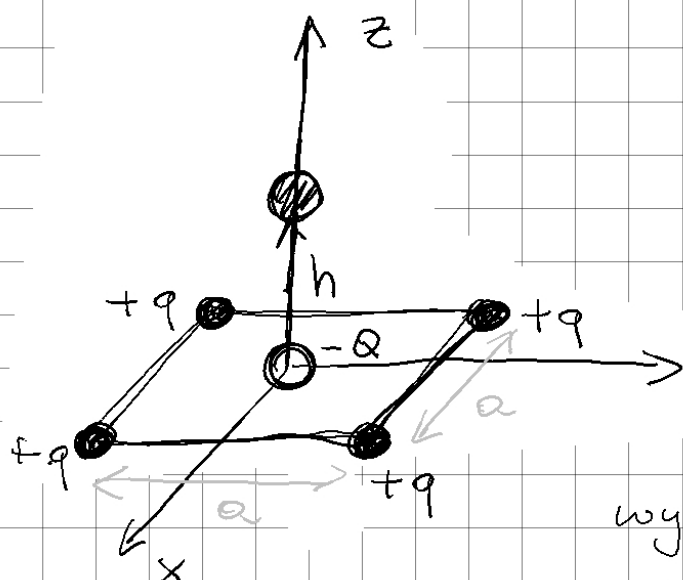
δ - faza drgań

$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - okres drgań



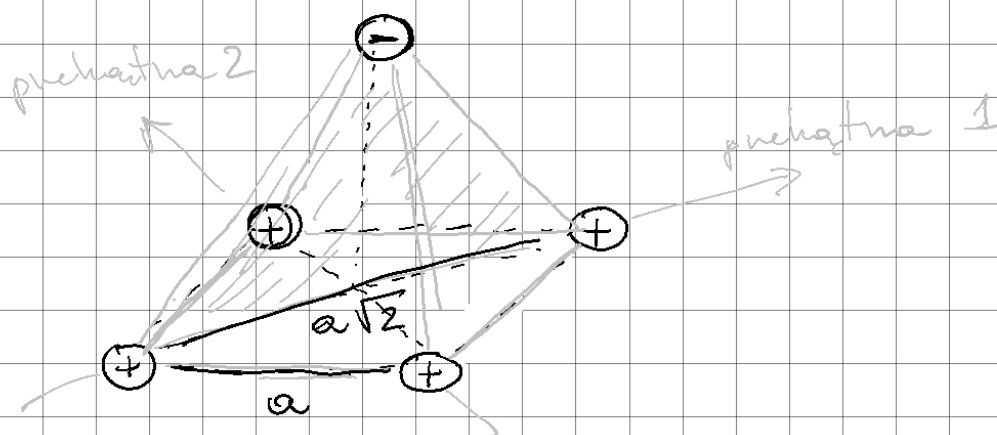
A i δ wyznaczone z warunków
początkowych.

2°) Rozważmy następującą konfigurację ładunków punktowych



ładunki $+q$ są uziemnione, a ładunek $-Q$ może się poruszać.

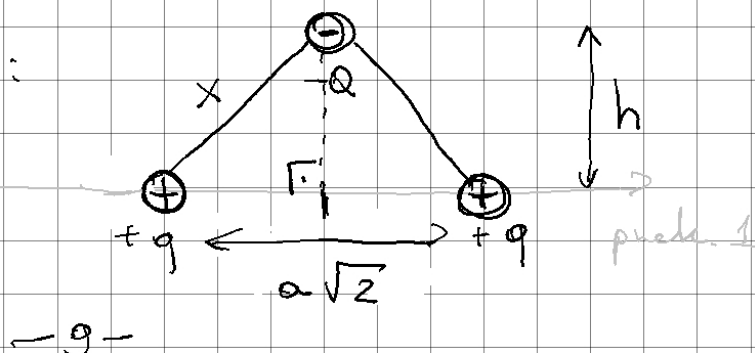
Jak będzie wyglądał ruch tego ładunku po odchyleniu go o
wzdłuż kierunku z ?



z tw. Pitagorasa:

$$h^2 + \frac{a^2}{2} = x^2$$

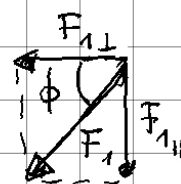
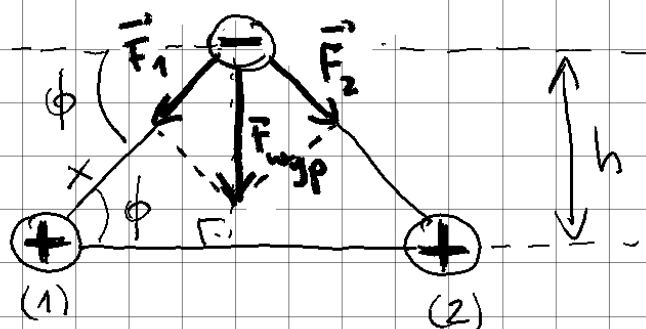
$$x = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$$



Niech wychylenie będzie niewielkie
tj. $h \ll a$, wtedy:

$$X = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{2h^2}{a^2} \right)^{1/2}$$

$\frac{h^2}{a^2}$ — mały parametr



$$\sin \phi = \frac{h}{X}$$

$$F_{1||} / F_1 = \sin \phi$$

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{2} X}$$

$$F_{1||} = F_1 \sin \phi$$

stąd

symetrie układu

$$F_{wyp} = F_{1||} + F_{2||} \stackrel{\text{symetrie układu}}{=} 2 F_{1||} = 2 F_1 \sin \phi = 2 F_1 \frac{h}{X}$$

$$|F_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{X^2} = k \frac{qQ}{X^2}$$

Pozostałe dwa ładunki możemy rozpatrzeć analogicznie i wynik

Z powodu symetrii układu będzie
tęli sum, czyli siła wypadkowa
wynosi:

$$F_{\text{wyp}} = -4k \frac{qQ}{x^3} h$$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{2^{3/2}}{a^3} \left(1 + \frac{2h^2}{a^2} \right)^{-3/2} \quad \frac{h^2}{a^2} \ll 1$$

Korzystamy ze wzoru Taylora:

$$\frac{1}{x^3} = \frac{2^{3/2}}{a^3} \left(1 - 3 \frac{h^2}{a^2} + \dots \right), \text{ więc}$$

$$F_{\text{wyp}} = \underbrace{-8\sqrt{2} k \frac{qQ}{x^3} h}_{\text{cz. harmoniczna}} + \underbrace{24\sqrt{2} k \frac{qQ}{a^5} h^3 + \dots}_{\text{cz. anharmoniczna}}$$

Gdy wychylenie h jest odpowiednio
małe siła wypadkowa jest
proporcjonalna do ($-$ wychylenia),
czyli w układzie występuje drganie.
Zapisując równania ruchu dla
ciałka Q (o masie m) mamy:

$$m \ddot{z} = - 8\sqrt{2} k \frac{qQ}{a^3} z$$

$$\ddot{z} + \frac{8\sqrt{2} k q Q}{m a^3} z = 0$$

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego daje:

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta),$$

$$\text{gdzie } \omega_0 = \sqrt{\frac{8\sqrt{2} k q Q}{m a^3}}$$

Niech w chwili $t=0$ ładunek Q znajduje się w położeniu $z=h$, a jego prędkość wynosi 0 ; wtedy:

$$z(t=0) = h = A \cos(\delta)$$

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$v_z(t=0) = 0 = -A\omega_0 \sin \delta \Rightarrow \delta = 0$$

$$\cos(0) = 1 \Rightarrow A = h, \text{ czyli}$$

$$z(t) = h \cos(\omega_0 t)$$

③ Metoda obrazów

Obserwacja: powierzchnia przewodnika
jest zarazem powierzchnią
ekwipotencjalną

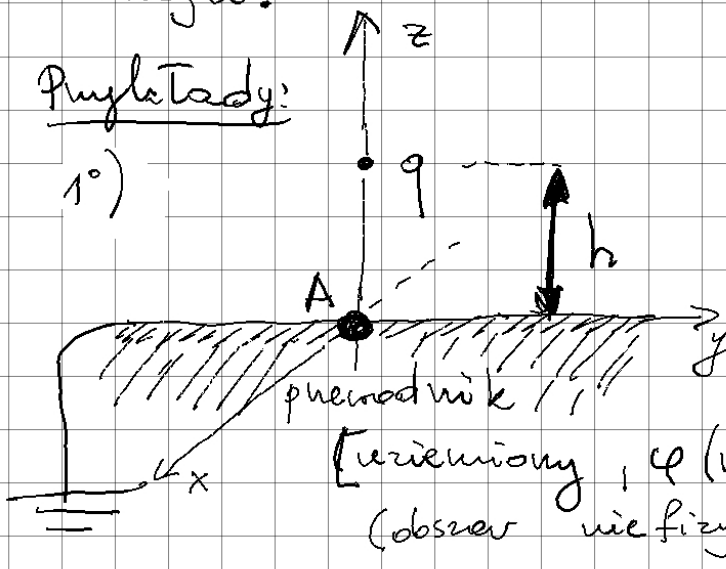
Fakt: Jeżeli znamy rozkład ładunków
w rozważanym przez nas obszarze
oraz warunki narzucone na
powierzchni przewodnika, wtedy
istnieje tylko jedna możliwa
postać pola $\vec{E}$ (rozwiązanie
tego zagadnienia) w obszarze
nas interesującym. Mówi o
tym tzw. twierdzenie
o jednoznaczności.

Pomysł: Zgadnąć taki rozkład obciążonych
ładunków w obszarze nie-fizycznym

na płytce wewnątrz przewodnika,
który będzie spełniał warunki na
brzeżu.

Płytkady:

1°)



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

potencjał od
ładunku punktowego

[uziemiony, φ (na powierzchni) = 0]
(obszar niefizyczny)

Chcemy, aby w punkcie A potencjał
był równy 0, bo płyta jest
uziemiowana, czyli

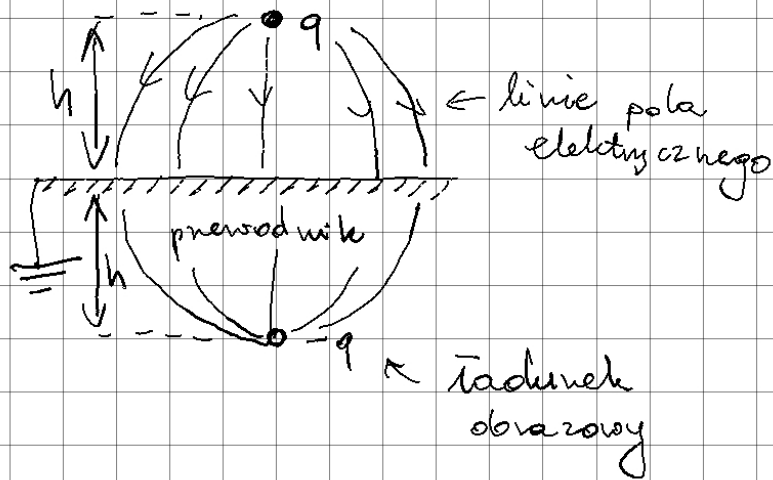
$$\varphi(h) + \varphi_i(z_0) = 0$$

↑ potencjał pochodzący
od ładunku obrazowego
we wnętrzu przewodnika

$$\varphi_i(z_0) = -\varphi(h) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{h}$$

uzyskany potencjał odpowiada

Ładunkowi $-q$ położonemu w $z = -h$.



Rzeczywisty ładunek, który indukuje się na powierzchni przewodnika wynosi tyle co ładunek obrazowy!

Siła działająca na ładunek q

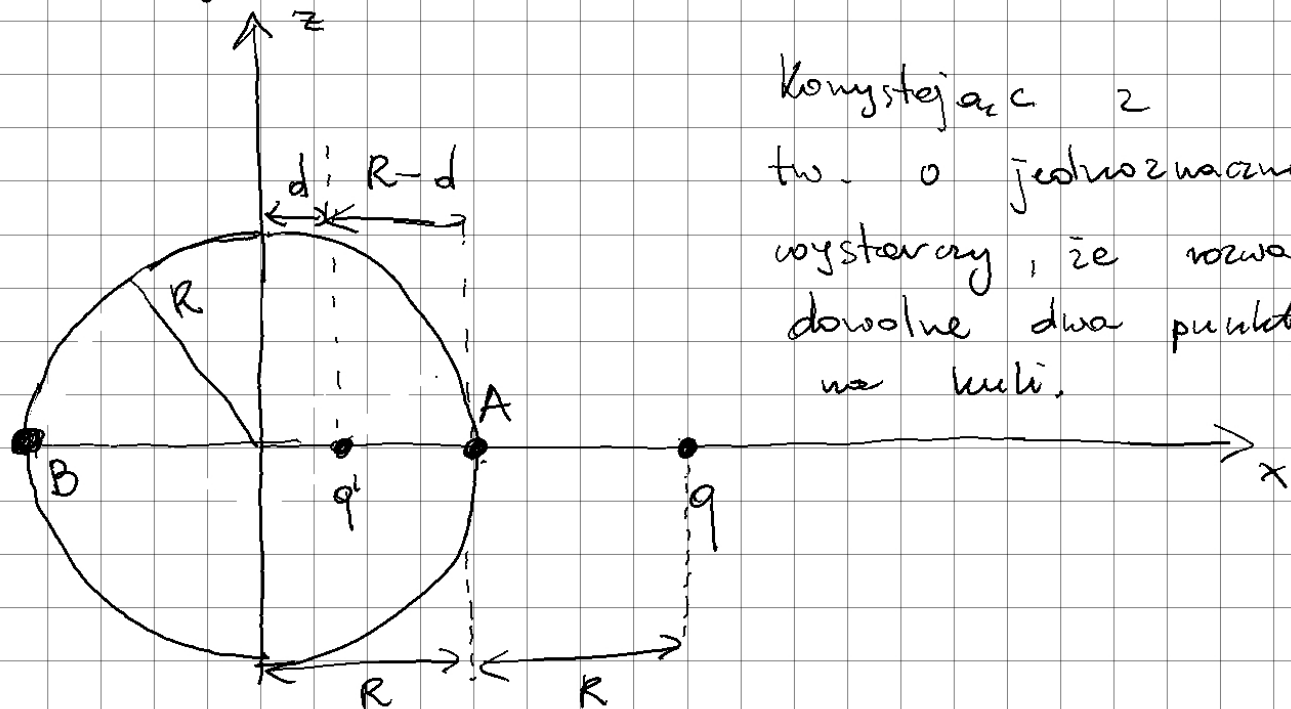
wynosi po prostu:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4h^2} \hat{z}$$

wektor jednostkowy wzdłuż osi z .

2°) W odległości R od powierzchni kuli przewodzącej o promieniu R znajduje się ładunek punktowy q . Oblicz wielkość ładunku jakim powinna być naelektryzowana kula, by siła elektrostatyczna działająca na ładunek q

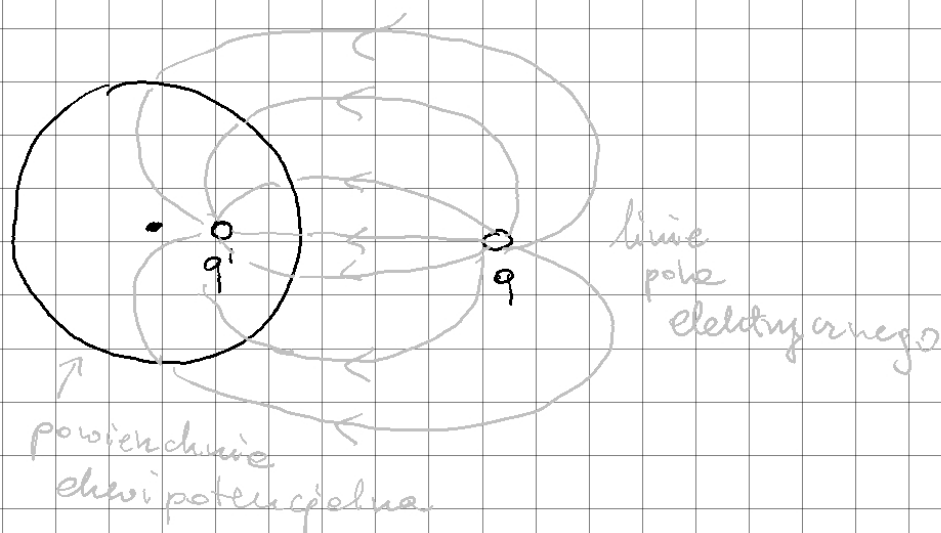
była równa zero.



Konstatacja z
tw. o jednoznaczności
wystarczy, że rozważymy
dowolne dwa punkty
na kuli.

Obserwacja: powierzchnie ekwipotencjalne
wokół ładunku punktowego
są sferami (potencjał jest
sfericznie symetryczny)

a) chcemy wybrać ładunek obrazowy
tak, aby powierzchnia kuli
miała zerowy potencjał (tak jak
dla kuli ziemskiej)



Korzystając z rysunku z poprzedniej strony możemy napisać:

i) potencjał w punkcie A

$$\varphi(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R-d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = 0$$

ii) potencjał w punkcie B

$$\varphi(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R+d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{3R} = 0$$

Możemy wykorzystując ten układ równań znaleźć q' i d :

$$i) \quad \frac{q'}{q} = -1 + \frac{d}{R}$$

$$ii) \quad \frac{q'}{q} = -\frac{R+d}{3R} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{d}{R} \right)$$

$$1 - \frac{d}{R} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{d}{R} \right)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \frac{d}{R} \Rightarrow d = \frac{R}{2}$$

$$\frac{q'}{q} = -1 + \frac{d}{R} = -\frac{1}{2} \Rightarrow q' = -\frac{q}{2}$$

b) w ogólności na powierzchni kuli możemy mieć dowolny stały potencjał V_0 , który możemy uwzględnić wykorzystując wcześniejszą obserwację o symetrii potencjału ładunku punktowego i wstawić ładunek q_0 w środku kuli, wtedy

$$\varphi(\text{bieg kuli}) = V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{R}$$

$$\Rightarrow q_0 = 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

Mamy już wszystko, aby rozwiązać

postawiony problem.

Sila działająca na ładunek

q ze strony kuli wynosi
 $\{ \text{wzdłuż osi } x \}$

$$F_{\text{wyp}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{4R^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{(R-d)^2} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qq_0}{4R^2} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{\frac{9}{4}R^2} \right] = 0$$

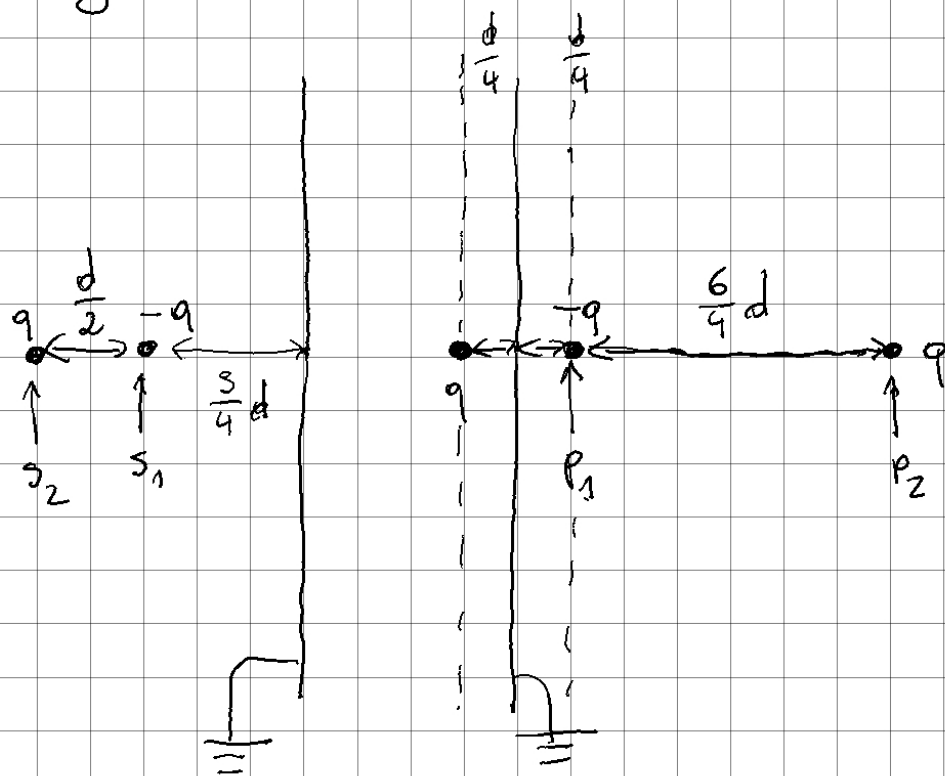
$$\Rightarrow \frac{qq_0}{4R^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{9}{4}} \frac{q^2}{R^2} \Rightarrow q_0 = \frac{8}{9} q$$

Zatem, aby ładunek q nie
„odmknął” żadnej siły kuli
musimy nadać ładunkiem:

$$Q = q_0 + q' = \frac{8}{9} q - \frac{1}{2} q = \frac{7}{18} q$$

3°) Dwie nieskończone, równoległe i uziemione płyty przewodzące są od siebie oddalone o d . Pomiedzy nimi, w odległości $x = d/4$ od jednej z nich znajduje się ładunek punktowy q . Wyznacz siłę działającą na ładunek q z błędem względnym nie większym niż 2,5%.

Stosujemy metodę obrazów:



ładunki obrazowe produkują własne obrazy. Dostajemy tu nieskończoną liczbę obrazów na lewo i prawo, które na przemian są $-q$ oraz $+q$.

Te po prawej stronie będą znajdowały się w odległościach:

$$\frac{d}{4}, \left(\frac{d}{4} + \frac{6d}{4}\right), \left(\frac{d}{4} + \frac{6d}{4} + \frac{2d}{4}\right), \left(\frac{d}{4} + \frac{6d}{4} + \frac{2d}{4} + \frac{6d}{4}\right), \dots$$

Te po lewej będą znajdowały się w odległościach:

$$\frac{3}{4}d, \left(\frac{3}{4}d + \frac{2d}{4}\right), \left(\frac{3}{4}d + \frac{2d}{4} + \frac{6d}{4}\right), \left(\frac{3}{4}d + \frac{2d}{4} + \frac{6d}{4} + \frac{2d}{4}\right), \dots$$

wieci $a = \frac{d}{4}$, wtedy

$$P: a, 7a, 9a, 15a, \dots$$

$$L: 3a, 5a, 11a, 13a, \dots$$

Sita światająca ze strony ładunków

po prawo:

$$\vec{F}_p = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{16^2} + \dots \right)$$

Siła działająca ze strony ładunków na lewo:

$$F_L = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(-\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{14^2} - \frac{1}{16^2} + \dots \right)$$

Calkowita siła działająca na ładunek q wynosi więc:

$$F = F_L + F_P = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{14^2} + \dots \right) =$$

$$= \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 d^2} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right)$$

Błąd względny: $2,5\% = \frac{x - x_0}{x} = \frac{\Delta x}{x}$

ilość wyrazów	wartość liczbowa ułamka	błąd względny
1	1	—
2	$\frac{8}{9} = 0,88\dots$	$\frac{\frac{1}{9}}{0,88\dots} = 12,5\%$
3	0,9288..	$\frac{\frac{1}{25}}{0,9288\dots} = 4,3\%$
4	0,90839...	$\frac{\frac{1}{49}}{0,90839\dots} = 2,3\%$

cyli

$$F \approx 0,91 \frac{q^2}{\pi \epsilon_0 d^2}$$

występująca w tym problemie stała

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \approx 0,916$$

to tak zwana stała Catalan.