Zagadnienia do egzaminu ustnego Algebra B 2010-11

Uwaga: Pytania zostały podzielone na 2 grupy. Każdy otrzyma pytanie z pierwszej grupy i jedno lub dwa z grupy drugiej. **Udzielenie satysfakcjonującej odpowiedzi na pytanie z pierwszej grupy jest warunkiem koniecznym zdania egzaminu.**

Pierwsza grupa pytań.

1. Liczby zespolone: definicja, interpretacja geometryczna, własności działań, sprzężenie, moduł, postać trygonometryczna, wzory de Moivre'a, pierwiastki z liczb zespolonych.
2. Wielomiany, dzielenie wielomianów, algorytm Euklidesa, NWD, rozkład na czynniki, wielomiany nierozkładalne.
3. Przestrzenie wektorowe: definicja, przykłady, podprzestrzenie, suma i przecięcie podprzestrzeni, suma prosta.
4. Kombinacje liniowe wektorów, podprzestrzeń generowana przez podzbiór, liniowa niezależność wektorów, baza przestrzeni wektorowej.
5. Jądro i obraz odwzorowania liniowego, związek między wymiarami.
6. Macierz odwzorowania liniowego w bazach, zmiana macierzy przy zmianie baz, macierz złożenia.
7. Grupy, definicja, przykłady, grupa permutacji.
8. Wyznacznik macierzy - definicja, podstawowe własności, rozwinięcie Laplace'a.
9. Wartości i wektory własne, wielomian charakterystyczny, tw. Cayleya-Hamiltona.
10. Sposoby obliczania funkcji od endomorfizmu.
11. Formy dwuliniowe symetryczne, formy kwadratowe, sygnatura i rząd formy kwadratowej.
12. Metoda Lagrange'a znajdowania bazy diagonalizującej formę.
13. Ortogonalizacja Grama-Schmidta.
14. Iloczyn skalarny, podstaweowe własności, nirówność Schwarta, podstawowe przykłady.
15. Dopełnienie ortogonalne, tw o rzucie ortogonalnym.
16. Postać funkcjonału liniowego w p. z iloczynem skalarnym, operator hermitowsko sprzężony.
17. Operatory normalne, hermitowskie, unitarne - definicje i podstawowe własności.
18. Twierdzenie o diagonalizacji operatora normalnego. Rozkład spektralny operatorów samosprzężonych.
19. Powierzchnie stopnia 2 (kwadryki) i ich klasyfikacja.

Druga grupa pytań.

1. Zasadnicze twierdzenie algebry, wielomiany nierozkładalne o wsp. zespolonych.
2. Ułamki proste nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste.
3. Równania wielomianowe o współczynnikach zespolonych, rozwiązania równań 2-go i 3-go stopnia, pierwiastki wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.
4. Definicja ciała, przykłady ciał.
5. Pierwiastki z liczb zespolonych, pierwiastki n-tego stopnia z jedynki jako grupa.
6. Rozkład permutacji na cykle, znak permutacji – różne definicje.
7. Odwzorowania liniowe, własośći zbioru $L(V, W)$
8. Operacje na macierzach, rząd (kolumnowy) macierzy, operacje nie zmieniające rzędu macierzy.

9. Układy równań liniowych, redukcja wierszowa, istnienie rozwiązań i postać rozwiązań.
10. Wzory Cramera.
11. Wyznacznik iloczynu macierzy, wzór na macierz odwrotną, wyznacznik odwzorowania liniowego.
12. Operatory nilpotentne, tw. o rozkładnie na podprzestrzenie pierwiastkowe, postać kanoniczna endomorfizmu.
13. Przestrzeń sprzężona, baza dualna, sprzężenie odwzorowania liniowego.
14. Formy dwuliniowe, macierz formy dwuliniowej, własności transformacyjne przy zmianie bazy.
15. Własności metryczne p. z iloczynem skalarnym, odległość wektora od podprzestrzeni, odległość podprzestrzeni afinicznych.
16. Objętość równologłościanu, wyznacznik Grama.
17. Formy dwuliniowe (hermitowskie) a operatory w p. z iloczynem skalarnym.
18. Diagonalizacja formy kwadratowej w przestrzeni z iloczynem skalarnym.
19. Rozkład biegunowy.
20. Wąsności komutatora macierzy, def. algebry Liego, podstawowe przykłady.
21. Grupa obrotów w $\mathbb{R}^3$.