Algebra z geometrią, seria zadań No.1

22.10.2010

1. Przedstaw w postaci $a + bi$ podane liczby zespolone:

   a) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; b) $(1-i)^3$ c) $(1+i)^5$; d) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$;

   e) $(3+i)^3+(3-i)^3$; f) i^{98}; g) i^{-57}; h) $\frac{(1-i)^4-1}{(1+i)^4+1}$; i) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

   j) $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$; k) $(1+i)^{8n}$; l) $(1-i)^{4n}, n \in \mathbb{N}$; m) $(\sqrt{3}-1)^{111}$;

2. Stosując interpretację geometryczną działań w $\mathbb{C}$ wykaż, że jeśli $z \in \mathbb{C}$ nie leży na ujemnej półosi rzeczywistej, to:

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\frac{z+|z|}{|z+|z||}.$$

3. Rozwiąż równania:

   a) $z^2 = i$; b) $z^2 = 3-4i$; c) $z^2 = 5-12i$; d) $z^2-(1+i)z+6+3i=0$;

   e) $z^2-5z+4+10i=0$; f) $(1+i)z^2+(1-3i)z+6i=0$;

   Wskazówka: Zadanie 2 podaje efektywną metodę znajdowania pierwiastków z danej liczby zespolonej.

4. Oblicz moduły liczb:

$$\text{a) } \sqrt{3}-i; \text{ b) } \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, \lambda \in \mathbb{R}; \text{ c) } (1+i)^{99}; \text{ d) } (-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2008}$$

5. Rozwiąż równania:

   a) $\overline{z} = z^2$; b) $\overline{z} = z^3$; c) $z\overline{z}+(z-\overline{z}) = 3+2i$; d) $i(z+\overline{z})+i(z-\overline{z}) = 2i-3$;

   e) $z^6 = (\overline{z}+1)^6$; f) $\left(\frac{1-\overline{z}}{1+z}\right)^{2003} = 1$; g) $(z+i)^n+(z-i)^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$

   h) $z^3+4i|z|=0$; i) $z^2-12\overline{z}+61=0$; j) $2z+3\overline{z}-\text{Re}z+2\text{Im}z = 8-3i$

6. Opisz geometrycznie i narysuj zbiór:

   a) $\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{2z+1}\right| < 1\}$; b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg}\frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4}\}$;

   c) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\frac{2z-1}{z^2-z} > 0\}$; d) $\{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1+2i}{1+ti}, t \in \mathbb{R}\}$;

   e) $\{z \in \mathbb{C} : |1-i-\overline{z}| < 2-\text{Re}(z)\}$; f) $\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-2i}{z-2-i}\right| > 1\}$

   g) $|z-1|+|z+1| \leqslant 4$

7. Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2 &= 1+i \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2 &= 1+3i \end{cases} \quad \begin{cases} 2z_1-(2+i)z_2 &= -i \\ (4-2i)z_1-5z_2 &= -1-2i \end{cases}$$

8. Udowodnij równość:

$$\forall u,v\in\mathbb{C}: \quad |u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v^2|$$

Jakie jest jej znaczenie geometryczne?

9. Wyraź w postaci wielomianów od $\sin x$ i $\cos x$ funkcje:

a) $\sin 4x$; b) $\cos 4x$; c) $\sin 5x$; d) $\cos 5x$

10. Wykaż równości:

a) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$;

b) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$;

c) $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\phi=\frac{\sin 2n\phi}{2\sin\phi}$, jeśli $\phi\neq 0$;

d) $\sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\phi=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)\phi\sin n\phi}{2\sin\phi}$ jeśli $\phi\neq 0$

e) $\cos 8^\circ+\cos 16^\circ+\cos 24^\circ+\ldots+\cos 176^\circ=-\frac{1}{2}$

f) $\sin^2 4^\circ+\sin^2 8^\circ+\sin^2 12^\circ+\ldots+\sin^2 88^\circ=-\frac{1}{2}$

g) $\cos^n\phi=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2k-n)\phi$

h*) $\sin^{2m-1}\phi=\frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{k=1}^{m}\binom{2m-1}{m-k}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)\phi$

i*) $\sin^{2m}\phi=\frac{1}{2^{2m-1}}\left[\frac{1}{2}\binom{2m}{m}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2m}{m-k}(-1)^k\cos 2k\phi\right]$

11. Korzystając z tego, że suma wartości $\sqrt[11]{1}$ jest zerem, wyprowadź następujące wzory:

a) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$

b) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

c) $\sin\frac{\pi}{22}-\sin\frac{3\pi}{22}+\sin\frac{5\pi}{22}-\sin\frac{7\pi}{22}+\sin\frac{9\pi}{22}=\frac{1}{2}$

12. Podaj wzory dla sum:

a) $\sum_{k=1}^{n}k\cos(kx)$;

b) $\sum_{k=1}^{n}k\sin(kx)$;

Wskazówka. Udowodnij wzór: $\sum_{k=1}^{n}kz^k=z\frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2}$

c) $\sum_{k=1}^{n}2^k\cos(kx)$;

d) $\sum_{k=1}^{n}2^k\sin(kx)$;

e) $\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\phi\cos k\phi$;

f) $\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\phi\sin k\phi$;

13. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n, k wielomian $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$ jest podzielny przez wielomian $x^2 + x + 1$.

14. Pokaż że:

    a) $x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}(x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{2n+1} + 1)$;

    b) $x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{2n} + 1)$;

    Wyprowadź analogiczne równości dla wielomianów $x^{2n+1} + 1$ oraz $x^{2n} + 1$ (tzn. przedstaw je jako iloczyny wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego).

15. Wypisz wszystkie pierwiastki: a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-i}$; c) $\sqrt[6]{16}$. Zaznacz je na płaszczyznie zespolonej.

16. Pokaż, że dla $\epsilon^0, \epsilon^1, \ldots, \epsilon^{n-1}$ (pierwiastków n-tego stopnia z 1) zachodzą następujące równości:

    $$\text{a) } \epsilon^0 + \epsilon^1 + \cdots + \epsilon^{n-1} = 0; \qquad \text{b) } \epsilon^0\epsilon^1 \ldots \epsilon^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

17. Uzasadnij, że nastepujący zbiór jest skończony, znajdź liczbę jego elementów oraz opisz geometrycznie zbiór:

    $$\mathbb{Z}_{24} := \{\left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

18. Rozwiąż równanie, posługując się, metodą Cardana:

    a) $z^3 - 6z + 4 = 0$;

    b) $z^3 - 6z^2 - 4 = 0$;

    c) $z^3 + (3+3i)z + 2 + i = 0$;

    d) $z^3 - 3\sqrt[3]{2}z + 2 = 0$;

    e) $z^3 + 6iz + 4 + 4i = 0$;

    f) $z^3 - 3z^2 + 1 = 0$;