Algebra z geometrią, seria zadań nr 3

09.12.2010

1. Sprawdź, czy następujące zbiory są przestrzeniami wektorowymi:

   a) $\{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$ (nad $\mathbb{R}$)

   b) $\{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = 0, f(1) = 1\}$ (nad $\mathbb{R}$)

   c) Dowolna grupa abelowa (przemienna) nad $\mathbb{Z}_2$

   d) Zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych (nad $\mathbb{R}$).

2. Rozwiąż następujące układy równań:

   a) $$\begin{cases} 2x - 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 3x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$$

   b) $$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -17 \\ x + y + z = -42 \\ 6x + 9y + 15z = 13 \end{cases}.$$

3. Rozwiąż następujące układ równań $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dla:

   a) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   c) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   d) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Podaj wymiary i bazy dla przestrzeni $A, B, A + B$ oraz $A \cap B$, dla:

   a) $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0\}$,
   $B = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$

   b) $A = ker(T), B = Im(T)$, dla $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$

c) $A = ker(T), B = Im(T)$, dla $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \{w \in \mathbb{R}_4[.] : w(-1) = w(1)\}, B = \{w \in \mathbb{R}_4[.] : w'(1) = 0\}$

e) $A_p = \{w \in \mathbb{R}_4[.] : w(-p) = w(p)\}, B = \{w \in \mathbb{R}_4[.] : w'(-1)+w'(1) = 0\}$ dla ustalonego $p \in \mathbb{R}$

f) $A = \{w \in \mathbb{R}_3[.] : w(1) = w'(0) = -\frac{1}{2}w(0)\}, B = \{w \in \mathbb{R}_3[.] : w(0) = w(1) = 0\}$.