4. SERIA ZADAŃ DOMOWYCH DO WYKŁADU "ALGEBRA Z GEOMETRIĄ"

Zad. 1. Wyznaczyć wartości parametru rzeczywistego λ, dla których $v \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(i) $v_1 = (4,4,3),\ v_2 = (7,2,1),\ v_3 = (4,1,6);\ v = (5,9,\lambda);$

(ii) $v_1 = (3,2,5),\ v_2 = (2,4,7),\ v_3 = (5,6,\lambda);\ v = (1,3,5);$

(iii) $v_1 = (3,2,6),\ v_2 = (5,1,3),\ v_3 = (7,3,9);\ v = (\lambda,2,5).$

Zad. 2. Znaleźć (dowolną) bazę powłoki liniowej każdego z podanych niżej układów wektorów, a następnie rozłożyć wektory układu w tej bazie.

(i) $v_1 = (5,2,-3,1),\ v_2 = (4,1,-2,3),\ v_3 = (1,1,-1,-2),\ v_4 = (3,4,-1,2);$

(ii) $v_1 = (2,1),\ v_2 = (3,2),\ v_3 = (1,1),\ v_4 = (2,3);$

(iii) $v_1 = (2,2,7,-1),\ v_2 = (3,-1,2,4),\ v_3 = (1,1,3,1).$

Zad. 3. Rozważmy parę podprzestrzeni przestrzeni liniowej $V := \mathbb{R}_4[\cdot]$

$$V_1 := \{\ w \in V \quad | \quad w(-2) = w(2) = 0\ \}, \qquad V_2 := \{\ w \in V \quad | \quad w(-1) = w(0) = w(1) = 0\ \}.$$

Znaleźć bazy V_1 i V_2, sprawdzić prawdziwość relacji $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ i pokazać, że $V = V_1 \oplus V_2$, a następnie rozłożyć dowolny wielomian $w \in V$ na składowe $w_i \in V_i,\ i \in \{1,2\}$.

Zad. 4. Załóżmy, że wektory e_1, e_2 tworzą bazę przestrzeni liniowej V, a operator $\widehat{F} \in \operatorname{End} V$ spełnia warunki

$$\widehat{F}\, e_1 = -7e_1 - 2e_2\,, \qquad \widehat{F}\, e_2 = 10e_1 + 3e_2\,.$$

Wypisać macierz $\widehat{F}$ względem bazy V zadanej przez wektory

$$f_1 = 3e_1 + 2e_2\,, \qquad f_2 = 4e_1 + 3e_2\,.$$

Zad. 5. Rozważmy operator liniowy $\widehat{D}\ :\ \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}^3$ dany wzorem

$$\widehat{D}\, w := \begin{pmatrix} w'(0) \\ w'(1) \\ w'(-1) \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} w(-1) \\ w(0) \\ w(1) \end{pmatrix}, \qquad w'(t) := \tfrac{\mathsf{d}w}{\mathsf{d}t}(t),\ t \in \mathbb{R}$$

(i) Znaleźć macierz $\widehat{D}$ względem baz: (w_1, w_2, w_3) dla $\mathbb{R}_2[\cdot]$ oraz (e_1, e_2, e_3) dla $\mathbb{R}^3$, gdzie

$$w_k(t) := t^{3-k}, \qquad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wyznaczyć bazy podprzestrzeni $\ker\widehat{D}$ i $\mathrm{im}\widehat{D}$.

Zad. 6. Sprawdzić, czy zachodzi

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$$

dla podprzestrzeni $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ określonych, jak następuje:

$$V_1 := \ker\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 := \mathrm{im}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 12 & 6 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

W przypadku uzyskania odpowiedzi twierdzącej dokonać rozkładu wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na składowe z V_1 i V_2.

Zad. 7. Wyznaczyć rząd macierzy M i przedstawić obraz reprezentowanego przez nią operatora jako jądro pewnego operatora $\widehat{O}_M$ (tj. wypisać macierz $\widehat{O}_M$ względem odnośnych baz kanonicznych).

$$\text{(i)} \quad M = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zad. 8. Określmy przestrzenie liniowe V_1 i V_2 wzorami:

$$V_1 := \ker M, \qquad V_2 := \mathrm{im} M, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & 0 & -7 \\ 5 & 9 & 6 & -17 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć takie bazy przestrzeni V_1 i V_2, których przecięcie jest bazą przestrzeni liniowej $V_1 \cap V_2$, a następnie podać wymiar sumy algebraicznej $V_1 + V_2$. Na koniec sprzwdzić, czy wektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ należy do $V_1 + V_2$.

Zad. 9. Obliczyć wyznacznik następujących macierzy:

(i) $$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & hx & h & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^3 & hx^2 & hx & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ x^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \cdots & hx & h \end{pmatrix}$$

(ii)* $$M_n = \mathbf{1}_{n\times n} + \sum_{k=1}^{n-1} A^k, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $$X_n = \begin{pmatrix} x_1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 2 & x_2 & 6 & 8 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & x_3 & 12 & \cdots & 3n \\ \vdots & 8 & 12 & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & x_{n-1} & (n-1)\,n \\ n & 2n & 3n & \cdots & (n-1)\,n & x_n \end{pmatrix}$$

(iv)* $$B_n = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

(v) $$S_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$
\text{(vi)*} \qquad T_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{(vii)} \qquad \Xi_n = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & \cdots & x^n \\ a_{1,1} & 1 & x & x^2 & \cdots & \cdots & x^{n-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 1 & x & \cdots & \cdots & x^{n-2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{n-1,n-1} & 1 & x \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & 1 \end{pmatrix}.
$$

Zad. 10. Obliczyć wyznacznik operatora $F \in \mathrm{End}\mathbb{R}_n[\cdot]$ zadanego wzorem

$$
(Fw)(t) \coloneqq 4w(t) + \tfrac{3}{t}\left[w(t) - w(0)\right] + t\left[w(t) - \tfrac{t^n}{n!}\tfrac{\mathsf{d}^n w}{\mathsf{d}t^n}(0)\right].
$$

Zad. 11.* Przedyskutować rozwiązania równania

$$
\det A_n(x|a) = 0
$$

dla macierzy

$$
A_n(x|a) = \begin{pmatrix} x & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 2x & a & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & a & 2x & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 2x \end{pmatrix}
$$

w zależności od wartości parametru rzeczywistego a.

Zad. 12. Znaleźć wszystkie rozwiązania poniższego układu równań należące do $\mathbb{Z}^4$:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 & -11 & -15 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Zad. 13. Wyznaczyć czwórmian $w \in \mathbb{R}_4[\cdot]$ spełniający następujące warunki:

$$w(-3) = -77\,, \qquad w(-2) = -13\,, \qquad w(-1) = 1\,, \qquad w(1) = -1\,, \qquad w(2) = -17\,.$$

Zad. 14.* Znaleźć zbiór rozwiązań układu kongruencji:

$$\text{(i)} \quad \left.\begin{array}{r} 2x + y + z \equiv 1 \\ x + 2y + z \equiv 2 \\ x + y - z \equiv -1 \end{array}\right\} \ \operatorname{mod}\ 5\,; \qquad \text{(ii)} \quad \left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 5z \equiv 1 \\ 2x + 5y + 3z \equiv 2 \\ 5x + 3y + 2z \equiv 4 \end{array}\right\} \ \operatorname{mod}\ 17\,.$$

Zad. 15. Wyznaczyć przestrzeń R rozwiązań każdego z poniższych układów równań liniowych z niejednorodnością i sprawdzić, czy należy do niej $v^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})$.

$$\text{(i)} \qquad \left\{\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{array}\right. , \qquad v^{(0)} = (0, 1, -1, 1)\,;$$

$$\text{(ii)} \qquad \left\{\begin{array}{l} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{array}\right. , \qquad v^{(0)} = (2, 3, 4, 1)\,.$$

Zad. 16. Opisać wszystkie możliwe sposoby przedstawienia wektora v^A, $A \in \{1, 2\}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów v_i^A, gdzie

$$v^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

oraz

$$v_1^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_4^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad v_5^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$v_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2^2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_4^2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zad. 17. Omówić zbiór rozwiązań poniższych układów równań w zależności od wartości parametru λ,

$$\text{(i)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{pmatrix} 3\lambda - 1 & 2\lambda & 3\lambda + 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 3\lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 & 2\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Zad. 18. Przedyskutować zależność rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} (\lambda + 3)\, x + y + 2z = a\lambda + b \\ \lambda x + (\lambda - 1)\, y + z = b\,(\lambda - 1) \\ 3(\lambda + 1)\, x + \lambda y + (\lambda + 3)\, z = (a + b)\, \lambda \end{cases}$$

od wartości parametrów rzeczywistych λ, a, b.

Warszawa, 25. lutego 2011 r.