Algebra z geometrią, seria zadań nr 5.

21.03.2011

1. Rozwiąż rekurencję:

   a) $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$ z warunkami początkowymi $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $D_n = 2D_{n-1} - 2D_{n-2}$ z warunkami początkowymi $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c) $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ z warunkami początkowymi $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   d) $D_n = 4D_{n-1} - 4D_{n-2}$ z warunkami początkowymi $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Czy istnieją $r \in \mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$ takie że $D_{n+k} = r^k D_n$?

2. Oblicz $\exp(At)$ dla jednej z poniższych macierzy:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Znaleźć macierz B dla której:

   a) $B^2 = A$

   b) $B^3 = A$

   dla macierzy A z poprzedniego zadania.

4. Znajdź rozwiązanie równania różniczkowego $\frac{d}{dt}\overrightarrow{x}(t) = A\overrightarrow{x}(t)$ z warunkiem początkowym $\overrightarrow{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Znajdź przestrzenie pierwiastkowe endomorfizmów $\mathbb{R}^3$ zadanych w bazie standardowej macierzami z zadania 2.

6. Znajdź bazę $\mathbb{R}^3$ w której wybrany endomorfizm z poprzedniego zadania ma macierz blokowo-diagonalną i wypisz tą macierz. Zapisz ją w postaci $D + N$ gdzie D jest macierzą diagonalną, N nilpotentną.

7. Wybraną macierz z zadania 2 zapisz w postaci sumy $D + N$, gdzie N jest macierzą nilpotentną oraz zachodzi $DN = ND$.

8. Dla wybranej macierzy z zadania 2 znajdź $\exp(A^k t)$, $k \in \mathbb{N}$.

9. Dla wybranej macierzy z zadania 2 znajdź $\sum_{k=1}^{n} A^k$, $n \in \mathbb{N}$.

10. Czy macierz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ można zapisać w postaci $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$, gdzie P_i są operatorami rzutowymi, tzn. $P_i^2 = P_i$, $i = 1, 2, 3$.

11. Niech $V = \mathbb{C}_2[.]$, zaś A będzie operatorem różniczkowania

$$Aw(x) = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}w(x).$$

Znajdź macierz operatora $\exp(itA)$ w bazie standardowej przestrzeni wielomianów. Wykaż, że $\exp(itA)$ jest operatorem przesunięcia

$$\exp(itA)w(x) = w(x + t).$$

12. Niech $V = \mathbb{C}_2[.]$ zaś A będzie operatorem różnicowym

$$A_w(x) = \frac{w(x+1) - w(x)}{i}.$$

Znajdź macierz operatora $\exp(itA)$ w bazie standardowej przestrzeni wielomianów.

13. *Rozważmy odwzorowanie liniowe $T : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ dane wzorem

$$T(A) = i(\sigma_z A - A\sigma_z),$$

gdzie $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pokaż że $\exp(i\varphi T)(A) = \exp(i\varphi\sigma_z)A\exp(-i\varphi\sigma_z)$.

14. Dla dowolnej macierzy A zachodzi $\det\exp(A) = \exp(Tr(A))$. Udowodnij równość w przypadku, gdy A jest macierzą diagonalizowalną.

15. Oblicz $\det(\exp(A))$ dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 & 134 & 13 & 8 & -117 \\ 2 & -33 & 110 & 23 & 34 & -17 & 12 \\ 13 & 32 & 17 & 32 & 198 & 34 & -3 \\ 17 & \sqrt{2} & 100 & 82 & 189 & 91 & 3 \\ 19 & 0 & 93 & -4 & 20 & 31 & 53 \\ 23 & 3 & 12 & -19 & 89 & -128 & 82 \\ 124 & -34 & 53 & 91 & -123 & 11 & 41 \end{pmatrix}.$$

16. Wykaż, że wartości własne macierzy A oraz A^T są jednakowe.

17. Niech $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, $n \geqslant k$. Wykaż, że niezerowe wartości macierzy $A^T A$ oraz AA^T są jednakowe.

    Wskazówka. Pokaż, że wektor $A^T v$ jest wektorewm własnym $A^T A$, dla v będącego wektorem własnym AA^T o wartości własnej $\lambda \neq 0$.