

# Zadania Domowe do wykładu Algebra z Geometrią

## Seria 6

19.04.2011

1. Niech  $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$ . Trzy jednoformy  $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \in V^*$  są zdefiniowane w następujący sposób  
 $\phi_0(w) := w(0)$        $\phi_1(w) := w(1)$        $\phi_2(w) := w(2)$       gdzie  $w \in V$   
(a) Sprawdzić, że jednoformy  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  tworzą bazę przestrzeni  $V^*$ .  
(b) Niech  $A \in L(V)$  oraz  $A(w) := w'$ , gdzie  $w \in V$   
Znaleźć macierz operatora  $A^*$  w bazie  $(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ .

2. Niech  $Q$  będzie formą kwadratową na przestrzeni  $V = \mathbb{R}^4$  oraz  $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in V$ .

Znaleźć kanoniczną postać formy  $Q$ , wyznaczyć jej sygnaturę oraz bazę przestrzeni  $V$ , w której  $Q$  ma postać kanoniczną, gdy

- (a)  $Q(v) := x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 6t^2 - 4xy + 6xz + 2xt - 14yz + 4yt + 24zt$   
(b)  $Q(v) := -2xy + 2xt + 2yz + 2zt$   
(c)  $Q(v) := x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 16t^2 + 4xy - 6xz + 8xt - 12yz + 16yt - 24zt$

3. Niech  $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$  oraz  $\omega(v, w) := \int_{-1}^1 (x^2+1)v(x)w(x)dx$ , gdzie  $v, w \in V$ . Niech  $V_1 := \langle x-1, x^2-x+1 \rangle$

- (a) Udowodnić, że forma  $\omega$  jest iloczynem skalarnym na przestrzeni  $V$   
(b) Znaleźć dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni  $V_1 \subset V$  względem iloczynu skalarnego  $\omega$   
(c) Znaleźć rzut ortogonalny na podprzestrzeń  $V_1$  względem iloczynu skalarnego  $\omega$  oraz macierz tego rzutu w bazie  $(x^3, x^2, x, 1)$

4. Niech  $V_1, V_2$  będą podprzestrzeniami  $V$  - dowolnej przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym. Udowodnij, że  $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$

5. Niech  $w_1, w_2 \in V - \{0\}$ , gdzie  $V$  jest dowolną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym  $(\cdot | \cdot)$ . Niech operator liniowy  $P_{w_1, w_2} \in L(V)$  będzie zdefiniowany w następujący sposób:

$$P_{w_1, w_2}(v) := \frac{(v|w_1)}{(w_1|w_1)}w_1 + \frac{(v|w_2)}{(w_2|w_2)}w_2, \text{ gdzie } v \in V$$

- (a) Kiedy operator  $P_{w_1, w_2}$  jest rzutem?  
(b) Kiedy operator  $P_{w_1, w_2}$  jest rzutem ortogonalnym?

6. Niech  $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  oraz  $\rho(A, B) := Tr(AB)$ , gdzie  $A, B \in V$ . Dokonać ortogonalizacji Grama-Schmidta względem formy  $\rho$  rozpoczynając od bazy  $(A, B, C, D)$ , gdy

- (a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$   
(b)  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 25 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 25 & 6 \end{bmatrix}$

7. Niech  $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  oraz  $\rho'(A, B) := Tr(A^T B)$ , gdzie  $A, B \in V$ .

- (a) Sprawdzić, czy forma  $\rho'$  jest iloczynem skalarnym na przestrzeni  $V$   
(b) Rozwiązać zadanie 6 z formą  $\rho'$  zamiast formy  $\rho$

8. Niech  $\sigma$  będzie formą 2-liniową na przestrzeni  $V \oplus V^*$ , gdzie  $V$  jest skończenie-wymiarową przestrzenią

wektorową i  $\dim V = n \in \mathbb{N}$ .  $\sigma$  jest zdefiniowana w następujący sposób

$\sigma((v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2)) := \varphi_1(v_2)$ , gdzie  $(v_1, \varphi_1), (v_2, \varphi_2) \in V \oplus V^*$

(a) Rozłożyć formę  $\sigma$  na część symetryczną  $\sigma_s$  i antysymetryczną  $\sigma_a$ .

(b) Znaleźć bazę przestrzeni  $V \oplus V^*$ , w której macierz formy  $\sigma_a$  wygląda następująco:

$$[\sigma_a] = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

(c) Znaleźć kanoniczną postać formy  $\sigma_s$ , wyznaczyć jej sygnaturę oraz bazę przestrzeni  $V \oplus V^*$ , w której  $\sigma_s$  ma postać kanoniczną.