

Seria zadań nr 7

19.05.2009

1. Niech $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Znaleźć bazę przestrzeni W^\perp :

(a) w \mathbb{R}^4 ze standardowym iloczynem skalarnym

(b) w \mathbb{R}^4 z iloczynem skalarnym danym wzorem $(\vec{x} | \vec{y}) = x^1 y^1 - x^1 y^2 - x^2 y^1 + 4x^2 y^2 + 2x^3 y^3 - x^3 y^4 - x^4 y^3 + 2x^4 y^4$.

2. Uzupełnić do bazy ortogonalnej podane układy wektorów:

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta znajdź ortonormalne bazy przestrzeni W otrzymane z podanych baz \mathcal{A} :

(a) $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\},$
 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\},$
 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

(c) $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\},$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(d) $W = \mathbb{R}_4[x], \mathcal{A} = st, (f|g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

(e) $W = \mathbb{R}_3[x], \mathcal{A} = st, (f|g) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx$

4. Znajdź: dopełnienie ortogonalne W^\perp podprzestrzeni W , rzut ortogonalny wektora u na podprzestrzeń W , odbicie symetryczne u względem W , odległość punktu u od podprzestrzeni W , kąt pomiędzy u i W :

(a) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ dla obu iloczynów skalarnych z zad. 1

(b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ dla obu iloczynów skalarnych z zad. 1

(c) $u = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ dla obu iloczynów skalarnych z zad. 1

(d) $u(t) = x^4 \in \mathbb{R}_4[x], W = \mathbb{R}_3[x], (f|g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

(e) $u(t) = x^4 - 2x^3 \in \mathbb{R}_4[x], W = \mathbb{R}_3[x], (f|g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

(f) $u(t) = 6x^3 \in \mathbb{R}_3[x], W = \mathbb{R}_2[x], (f|g) = \int_{-1}^1 5\sqrt{x} f(x)g(x)dx$

5. Znajdź odległość:

(a) punktu $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ od prostej $l = \{x \in \mathbb{R}^3 : -x_1 + 3x_3 - 1 = 0, x_2 - 2x_3 - 1 = 0\}$

(b) prostej $l_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ od prostej $l_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_2 - x_3 = 2, x_1 + x_2 - x_3 = 2\}$

(c) prostej $l = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_4 = 2\}$ od płaszczyzny $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_4 = 0, 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2\}$.

6. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej (V, h) oraz $\{n_1, \dots, n_p\}$ będzie bazą ortonormalną W . Wykaż że dla dowolnej bazy \mathcal{A} przestrzeni V macierz

$$(n_1)^\mathcal{A}((n_1)^\mathcal{A})^T[h]_\mathcal{A} + \dots + (n_p)^\mathcal{A}((n_p)^\mathcal{A})^T[h]_\mathcal{A}$$

jest macierzą rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń W w bazie \mathcal{A} , gdzie $[h]_\mathcal{A}$ jest macierzą iloczynu skalarnego h w tej bazie.

7. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej (V, h) oraz \mathbb{X} będzie macierzą utworzoną z wektorów bazowych W zapisanych w pewnej bazie \mathcal{A} przestrzeni V . Wykaż że macierz

$$\mathbb{X}(\mathbb{X}^T[h]_\mathcal{A}\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}^T[h]_\mathcal{A}$$

jest macierzą rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń W w bazie \mathcal{A} ($[h]_\mathcal{A}$ jest macierzą iloczynu skalarnego h w tej bazie).

8. Znajdź macierze rzutu ortogonalnego oraz symetrii prostopadłej dla podprzestrzeni W z zadania 4 w bazie standardowej.
9. Niech $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ oraz $h(A, B) = \text{Tr}(AB)$ będzie formą dwuliniową na V . Czy h zadaje iloczyn skalarny

(a) na V

(b) na $W := \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A^T = A\}$?

W obydwu przypadkach znajdź bazy diagonalizujące h na zadanej przestrzeni.