Zadania z Analizy IIR

12.03.2011

(1) Niech X będzie przestrzenią wektorową wielomianów na $\mathbb{R}$ (o współczynnikach rzeczywistych). a) Czy X ma skończony wymiar? b) Wykazać, że wzór: $\| a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \| := max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}$ określa na X normę. c) $(X, \| \|)$ nie jest przestrzenią Banacha. (Wsk. rozważyć ciąg $W_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.) d) $A : X \ni a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mapsto a_0 + \frac{a_1}{1}x + \dots + \frac{a_n}{n}x^n \in X$ jest ograniczonym (czyli ciągłym) odwzorowaniem liniowym. e) Znaleźć odwzorowanie odwrotne i wykazać, że nie jest ono ograniczone (czyli nie jest ciągłe).

(2) Niech l^∞ oznacza przestrzeń ciągów ograniczonych. Określmy $T : l^\infty \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots) \in l^\infty$. Zbadaj różniczkowalność T oraz znajdź $\nabla_e T(f)$, dla $e := (1, 1, 1, \dots)$, $f := (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$.

(3) Wykazać, że odwzorowanie $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ dane wzorem $T(f)(x) = \int_0^x \sin(f(t))dt$ jest różniczkowalne i znaleźć jego pochodną. Obliczyć $T'(f)h$ gdzie $f(x) = x = h(x)$.

(4) Niech X oznacza przestrzeń Banacha ograniczonych ciągów o wyrazach rzeczywistych z normą $||(x_1, \dots, x_n, \dots)|| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Sprawdzić, że odwzorowanie $F : X \ni (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ jest liniowe, ograniczone i injektywne, ale nie istnieje ograniczone odwzorowanie $G : X \to X$ takie, że $FG = id$.

(5) Niech X będzie jak wyżej. Określmy odwzorowanie $F : X \to X$ wzorem $(Fx)_n := \frac{x_{n+1}}{n+1}$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} ||F^n||^{1/n} = 0$.

(6) Zbadać różniczkowalność odwzorowań:
(a) $C[0, 1] \ni f \mapsto f(1) + f(1/2)^2 \in \mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \int_a^{x+y} f(t)dt \in \mathbb{R}$, $f-$ustalona f. ciągła; (c) $C[0, 1] \ni f \mapsto T(f) \in C[0, 1] : (Tf)(x) := \int_0^x (1+f^2(t))dt$; (d) $C[0, 1] \ni f \mapsto \int_0^1 \varphi(f(t))dt$, gdzie $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$;
(e) $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(7) Sprawdzić, że funkcja $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ jest klasy C^1 na $\mathbb{R}^2$, posiada wszędzie pochodne cząstkowe rzędu 2 ale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

(8) Sprawdź, że jeśli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia r. Laplace'a: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, a $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są klasy C^2 i spełniają równania: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, to funkcja złożona $F := f \cdot (u, v)$ też spełnia r. Laplace'a.

(9) Wykazać, że funkcja $u : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, y) := \frac{1}{y}[\phi(ax + y) - \psi(ax - y)] \in \mathbb{R}$, gdzie funkcje $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są dwukrotnie różniczkowalne, a $a \neq 0$ spełnia równanie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \frac{\partial u}{\partial y}).$$

(10) Niech funkcje f, g, h, k będą rózniczkowalne. Wyrazić pochodne cząstkowe funkcji F przez pochodne cząstkowe funkcji f, g, h, k: (a) $F(x, y) := f(g(x)+h(y), g(x)h(y))$; (b) $F(x, y) := f(g(xy)+h(x+y), k(x))$; (c) $F(x, y, z) := f(g(x^y), h(y^z))$.

(11) Niech $f \in C^\infty(]0, \infty[)$. W równaniu $x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx} + \omega^2 f = 0$ dokonać zamiany zmiennej: $t(x) := \log x$.

(12) Rozważmy operator różniczkowy

$$uv^{-1}(1 - u^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + vu^{-1}(1 - u^2) \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2(1 + u^2) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - 2u^2v^{-1}.$$

Znaleźć jego postać we współrzędnych x, y jeśli $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$.

(13) Zapisać w zmiennych $u := x + y$, $v := \frac{y}{x}$ i $w := \frac{z}{x}$ równanie: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ traktując w jako nową zmienną zależną.

(14) W obszarze $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 , y > 0 , z > 0\}$ wprowadzamy współrzędne: $u := x^2 + y^2$, $v := \log \frac{y}{x}$, $w := x + y - \log z$. Zapisać w tych współrzędnych równanie $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, traktując $w = w(u, v)$ jako nową zmienną zależną.

(15) Niech $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. W Ω wprowadzamy współrzędne: $u := \sqrt{xy}$, $v := \frac{y}{x}$. Dla $f \in C^2(\Omega)$ niech

$$L(f) := x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Wyrazić $L(f)$ w zmiennych (u, v) a następnie rozwiązać równanie $L(f) = 0$.

(16) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x, y, z) = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)\Big(1 + \frac{x}{y}\Big)\Big(1 + \frac{y}{z}\Big)\Big(1 + z\Big).$$

(17) Rozwiązać równanie $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xz^2$, wyrażając je w nowych współrzędnych $u = x, v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{1+xz}$ obszaru $\Omega = \{(x,y,z) : x, y > 0\}$ oraz traktując w jako zmienną zależną $w = w(u,v)$. *Odpowiedź.* $z = \frac{f(\frac{y}{x})}{1-xf(\frac{y}{x})}$.

(18) W równaniu różniczkowym dokonać wskazanej zamiany zmiennych:
(a) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, $(u, v, w(u, v)) := (x, \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z(x,y)})$
(c) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, $(u, v, w(u, v)) := (x^2 + y^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \log z(x, y) - (x + y))$

(19) Dokonując liniowej zamiany zmiennych sprowadzić równanie: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = g$ do postaci: $a\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + c\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = g$.

(20) W obszarze $\{(x,y)\,,\, x > 0\,,\, y > 0\}$ określamy odwzorowanie: $(u(x,y), v(x,y)) := (x^3 + y^3, x^2 + \frac{1}{y})$. Sprawdzić,że lokalnie definiuje ono zamianę zmiennych i zapisać w tych zmiennych równanie: $\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

(21) Wyznaczyć wszystkie punkty ekstermalne funkcji $f : R^2 \ni (x,y) \mapsto (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2} \in R\,,\, 0 < a < b$ i określić ich rodzaj.

(22) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji:
(a) $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) := \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$;
(b) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\,,\, y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) := \log(x^2 + y^2) - \arctan\frac{y}{x} + 2x + y$
(c) $\mathbb{R}^3_+ \ni (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := x + \frac{y^2}{4x} + \frac{2}{z} + \frac{z^2}{y}$
(d) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) := \frac{xy(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$.

(23) Wykazać, zę równania $\left\{\begin{array}{rcl} e^x \sin u - e^y \cos v + w & = & 0 \\ x\cosh w - u\sinh y - v^2 & = & \cosh 1 \end{array}\right.$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 0, 0, 1)$ pozwalają wyznaczyć x, y jako funkcje pozostałych zmiennych. Obliczyć $\frac{\partial x}{\partial u}$ w tym punkcie. Podać przykład jednej z par zmiennych, których powyższe równania nie pozwalają określić jako funkcji pozostałych zmiennych.

(24) Wykazać, że równanie: $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-4 = 0$ określa w otoczeniu punktu $p := (x_0, y_0, z_0) = (-2, 0, 0)$ funkcję $z = z(x,y)$. Obliczyć: $\frac{\partial z}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(p)$.

(25) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) := x^2y(4 - x - y)$ na zbiorze $\Omega := \{(x,y) \in [0,3] \times [0,3]\}$

(26) Niech $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Podać warunki, aby równanie $: 2x - y = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ określało funkcję $z = z(x,y)$. Pokazać, że $z\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y$.

(27) Niech funkcja $x \mapsto y(x)$ będzie w otoczeniu punktu $(1,1)$ określona równaniem $x^2 - xy + y^3 = 1$. Niech ponadto $z := x^2 + y^2$. Obliczyć $\frac{dz}{dx}(1)$ oraz $\frac{d^2z}{dx^2}(1)$.

(28) Niech $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $f(1) = 0$. Jaki warunek musi spełniać funkcja f, aby równanie $2f(xy) = f(x) + f(y)$ określało y jako funkcję x w otoczeniu punktu$(1,1)$.

(29) Niech $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Wykazać, że jeżeli równanie $F(x,y,z) = 0$ zadaje funkcje $x = X(y,z)$ oraz $z = Z(x,y)$ to:
(a) $Z_xZ_y = 1 \Longleftrightarrow X_y + (X_z)^2 = 0$
(b) $Z_x - yzZ_y = 1 \Longleftrightarrow X_z - yzX_y = 1$
(c) $Z_xZ_{xy} = Z_yZ_{xx} \Longleftrightarrow X_{yz} = 0$

(30) Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu ≤ 2 funkcji $z = z(x,y)$ zadanej równaniem:
(a) $z^3 - 3zxy = 1$ (b) $x + y + z = e^{xz}$

(31) Wprowadźmy w obszarze $\{(x_1, x_2, x_3, z) : x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^4$ nowe współrzędne $u_1 = \frac{x_1}{x_3}, u_2 = \frac{x_2}{x_3}, u_3 = x_3, v = \frac{z}{x_3}$; wyrazić w tych współrzędnych równanie $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3} = z + \frac{x_1x_2}{x_3}$, traktując v jako nową zmienną zależną $v = v(u_1, u_2, u_3)$. Rozwiązaując otrzymane równanie znaleźć rozwiązanie ogólne wyjściowego równania.