

- (1) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na zbiorze Ω :
- (a) $f(x, y) := x^2(4 - x - y)$, $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$
 - (b) $f(x, y) := x^2 - y^2$, $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 - (d) $f(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - (x^2 + 2y^2 + z^2)^2$, $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
 - (e) $f(x, y) := e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2)$, $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 6\}$
- (2) Znaleźć najkrótszy odcinek łączący krzywe: $C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = 7\}$ oraz $C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y^1)^2 = 25\}$.
- (3) Niech dane będą $\mathbb{N} \ni n > 2$ oraz dodatnie liczby a_1, \dots, a_n . Wykazać, że funkcja $f(x) := \frac{a_1}{x_1} + \dots + \frac{a_n}{x_n}$ przyjmuje na zbiorze $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_1, \dots, x_n > 0\}$ wartość minimalną. Wyznaczyć tę wartość.
- (4) Zbadać lokalną i globalną odwracalność odwzorowań.
- (a) $(x, y) \mapsto (\sin(x + y), e^{x+y})$;
 - (b) $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, \log|\frac{y}{x}|)$;
 - (c) $(x, y) \mapsto (\frac{y^2}{x}, \sqrt{2x^2 + y^2})$
 - (d) $C[0, 1] \ni f \mapsto \int_0^1 tf(t)dt$ ($C[0, 1]$ - p. Banacha z normą sup)
- (5) Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $(x, y) \mapsto z(x, y)$ zadanych równaniami:
- (a) $z^3 + z + \frac{14xz}{1+x^2} + (2x - y)^2 + 9 = 0$
 - (b) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$ $a \in \mathbb{R} a \neq 0$
 - (c) $2z^3 + \frac{6z}{1+x^2} + 5x - xy + y = 0$
 - (d) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 8yz - 6x + 8y = 0$
 - (e) $0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2$
- (6) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x, y, z) := xy^2z^3$ na powierzchni $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1\}$.
- (7) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji: $f(x, y, z) := x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + z^4 - 2z^2 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 1$ na zbiorze $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
- (8) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y, z) := (x + y)z^2$ na zbiorze $Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - \frac{6}{n^2} = 0, z > 0\}$.
- (9) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y, z, t) := xy + zt$ na zbiorze $S := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, x + y = 2(z + t)\}$.
- (10) Niech $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie operatorem, którego macierz w bazie standardowej jest postaci:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Przyjmując metrykę pitagorejską na \mathbb{R}^2 :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

wyznaczyć normę $\|T\|$ operatora T .

- (11) Wykazać, że równania $\begin{cases} e^x \sin u - e^y \cos v + w = 0 \\ x \cosh w - u \sinh y - v^2 = \cosh 1 \end{cases}$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 0, 0, 1)$ pozwalają wyznaczyć x, y jako funkcje pozostałych zmiennych. Obliczyć $\frac{\partial x}{\partial u}$ w tym punkcie. Podać przykład jednej z par zmiennych, których powyższe równania nie pozwalają określić jako funkcji pozostałych zmiennych.
- (12) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x, y, z) := 6x + 3y + 2z$ na zbiorze $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36\}$.