Zadania z Analizy IIR

21.03.2011

(1) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na zbiorze Ω:
(a) $f(x,y) := x^2(4-x-y)\,,\ \ \Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0\,,\, y\geq 0\,,\, x+y\leq 6\}$
(b) $f(x,y) := x^2-y^2\,,\ \ \Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 1\}$
(d) $f(x,y,z) := x^2+2y^2+3z^2-(x^2+2y^2+z^2)^2\,,\ \ \Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$
(e) $f(x,y) := e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)\ ,\ \Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ : x^2+4y^2\leq 6\}$

(2) Znaleźć najkrótszy odcinek łączący krzywe: $C_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2-xy+y^2=7\}$ oraz $C_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (x-1)^2+(y^1)^2=25\}$.

(3) Niech dane będą $\mathbb{N}\ni n>2$ oraz dodatnie liczby $a_1,...,a_n$. Wykazać, że funkcja $f(x) := \frac{a_1}{x_1}+...+\frac{a_n}{x_n}$ przyjmuje na zbiorze $\{x\in R^n\ :\ x_1^2+...+x_n^2=1\,,\, x_1,...,x_n>0\}$ wartość minimalną. Wyznaczyć tę wartość.

(4) Zbadać lokalną i globalną odwracalność odwzorowań.
(a) $(x,y)\mapsto(\sin(x+y),e^{x+y})$;
(b) $(x,y)\mapsto(x^2+y^2,\log|\frac{y}{x}|)$;
(c) $(x,y)\mapsto(\frac{y^2}{x},\sqrt{2x^2+y^2})$
(d) $C[0,1]\ni f\mapsto\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$ ($C[0,1]$ - p. Banacha z normą sup)

(5) Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $(x,y)\mapsto z(x,y)$ zadanych równaniami:
(a) $z^3+z+\frac{14xz}{1+x^2}+(2x-y)^2+9=0$
(b) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)\ \ a\in\mathbb{R}\ a\neq 0$
(c) $2z^3+\frac{6z}{1+x^2}+5x-xy+y=0$
(d) $x^2+4y^2+z^2-4xy+2xz+8yz-6x+8y=0$
(e) $0=\frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3+xyz^2+z-2$

(6) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x,y,z) := xy^2z^3$ na powierzchni $P := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x>0, y>0, z>0, \frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{3}+z^2=1\}$.

(7) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji: $f(x,y,z) := x^4-2x^2+y^4-2y^2+z^4-2z^2+2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2+1$ na zbiorze $K := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\leq 4\}$.

(8) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y,z) := (x+y)z^2$ na zbiorze $Z := \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\,,\ A_n := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2-\frac{6}{n^2}=0\,,\ z>0\}$.

(9) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y,z,t) := xy+zt$ na zbiorze $S := \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2+t^2=1\,,\ x+y=2(z+t)\}$.

(10) Niech $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ będzie operatorem, którego macierz w bazie standardowej jest postaci:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & -2 & -2 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Przyjmując metrykę pitagorejską na $\mathbb{R}^2$:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

wyznaczyć normę $||T||$ operatora T.

(11) Wykazać, zę równania $\left\{\begin{array}{rcl} e^x\sin u-e^y\cos v+w &=& 0 \\ x\cosh w-u\sinh y-v^2 &=& \cosh 1\end{array}\right.$ w otoczeniu punktu $(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0)=(1,0,0,0,1)$ pozwalają wyznaczyć x,y jako funkcje pozostałych zmiennych. Obliczyć $\frac{\partial x}{\partial u}$ w tym punkcie. Podać przykład jednej z par zmiennych, których powyższe równania nie pozwalają określić jako funkcji pozostałych zmiennych.

(12) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x,y,z) := 6x+3y+2z$ na zbiorze $\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 36x^2+9y^2-4z^2=36\}$.