Zadania z Analizy IIR

27.04.2011

(1) Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania:
(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x-5}{y-2x-4}$, (e) $\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 = y^2\frac{dy}{dx}$, (f) $x^2(\log x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ wsk. Znaleźć najpierw rozwiązanie w postaci wielomianu. (h) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos x$, (j) $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 0$ wsk. jednym z rozwiązań jest e^{x^2} (k) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ wsk. jednym z rozwiązań jest x (m) $y'' - (y')^2 = y^2y'$ (u) $\frac{dy}{dx} + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$, wsk. jednym z rozwiązań jest $\sin x$

(2) Rozwiązać zagadnienie początkowe:
(a) $(x+2)^5\frac{d^2y}{dx^2} = 1$, $y(-1) = \frac{1}{12}$, $\frac{dy}{dx}(-1) = -\frac{1}{4}$,
(b) $2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + x^2\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, $y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $\frac{dy}{dx}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dx}(0) = 1$,
(d) $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = x$, $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0$ (e) $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2 - 2$, $y(1) = -1$, $y(0) = 0$ (f) $\frac{dy}{dx}x + y = xy^2$, $y(0) = 1$ (g) $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$, $y(0) = 0$ (h) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + 2z & x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 3z & y(0) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y + 2z & z(0) = 2 \end{cases}$

(3) Wyznaczyć i naszkicować krzywe całkowe równań (w zależności od $p \in \mathbb{R}$):
(a) $xdx + ydy + p(xdx - ydy) = 0$ (b) $xdx + p(xdy - ydx) = 0$ (c) $xdy - ydx = 0$.

(4) Rozwiązać układy równań:
(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + t^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z & x(0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = x + z & y(0) = 1 \\ \frac{dz}{dt} = x + y & z(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y + 1 - t \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y + 1 + t \end{cases}$
(d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y - 2z & x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y & y(0) = -1 \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y - z & z(0) = -1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3 = 3x + 4y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -x - y + 5 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2z & x(0) = 2 \\ \frac{dy}{dt} = x - 5z & y(0) = -1 \\ \frac{dz}{dt} = y + 4z & z(0) = 0 \end{cases}$

(5) Znaleźć wszystkie ciągłe rozwiązania równania: $y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1$

(6) Znaleźć rozwiązania ogólne równania:
(a) $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$; (c) $y'' - 4y' + 4y = 2(x + \sin 2x)$; (h) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

(7) Ułożyć równanie, którego bazą rozwiązań jest:
(a) $\sin x$, e^x ; (b) $\sin x$, $\sin(2x)$; (c) x , x^2 , x^3 ;

(8) Niech $F(x,t) := \exp(-t^2 + 2tx) =: \sum_0^\infty \frac{H_n(x)}{n!}t^n$. Wykazać że:
(a) H_n są wielomianami stopnia n; (b) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$ $n \geq 1$;
(c) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$ $n \geq 1$ (d) $H_n''(x) - 2nH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$. wsk. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2tx$, $\frac{\partial F}{\partial t} + 2(t-x)F = 0$.($H_n(x)$ to wielomiany Hermitte'a)

(9) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania: $tx'(xx'' - (x')^2) - x(x')^2 - t^4x^3 = 0$. wsk. podstawić $x(t) := e^{u(t)}$.

(10) Rozwiązać równanie: $\dot{x}(t) = -\int_0^t x(s)ds - 2x(t) - \cos t - e^{-t}(t+1) + 2$.

(11) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania: $y''\sin y + y'^2\cos y = y'^3\sin^2 y$.

(12) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania: $\frac{dx}{dt}t - 4x - t^2\sqrt{x} = 0$.

(13) Rozwiązać zagadnienie początkowe: $yy'' = y'(y'^2 - 1)$, $y(0) = \sqrt{3}$, $y'(0) = -2$.

(14) Rozwiązać zagadnienie początkowe: $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 2x + y$, $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -x + 4y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

(15) Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 2e^{2t} + \frac{2}{t}$$

spełniające warunki:

$$\lim_{t\to 0^+} = 1\,,\ x(1) = 1 + e^2.$$

Wskazówka: całka $\int \frac{e^{-2x}}{x}\,dx$ *nie wyraża się przez funkcje elementarne.*

(16) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania róóniczkowego

$$t(2t+1)\ddot{x} + 2(t+1)\dot{x} - 2x = (2t+1)^2$$

szukając najpierw jednego z RSRJ w postaci wielomianu.

(17) Rozwiązać zagadnienie początkowe: $t^2(\frac{dx}{dt} - 1) = xt + x^2$, $x(1) = 1$.

(18) Znaleźć rozwiązanie ogólne równań:
$y' - y\cos x = y^2(1 - \sin x)\cos x$

(19) Znaleźć rozwiązanie równania:$x^3\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} = 1$, takie, że $y(1) = 0$.