

- (1) Zapisać całkę  $I = \int_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz$ , gdzie  $\Delta \in \mathbb{R}^3$  jest czworościanem o wierzchołkach  $(0, 1, 2)$ ,  $(1, 0, -1)$ ,  $(1, 3, 5)$ ,  $(1, 0, 2)$ , w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek):  
 (a)  $\int dx \int dy \int f dz$ ; (b)  $\int dz \int dx \int f dy$ .
- (2) Przetawić kolejność całkowania w całe:  
 (a)  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f dy$ ; (b)  $\int_{-2}^6 dx \int_{-\sqrt{12+4x-x^2}}^{\sqrt{12+4x-x^2}} f dy$ ; (c)  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f dy$ ; (d)  $\int_0^{\pi} dx \int_{-\sin x}^{\sin x} f dy$ ;
- (3) Obliczyć całki i skomentować otrzymane wyniki: (a)  $\int_1^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{y-x}{(x+y)^3}$ , (b)  $\int_0^1 dy \int_1^{\infty} dx \frac{y-x}{(x+y)^3}$ .
- (4) Udowodnić tożsamość:  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dz (\int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx)$ .
- (5) Odwracając kolejność całkowania wykazać, że  $\int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 = \int_a^b f(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$ .
- (6) Wyliczyć środek ciężkości jednorodnego obszaru płaskiego  $K := \{(x, y) : x > 0, xy \geq 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 2\}$  (przy  $a, b > 0, ab > 1$  danych); sprawdzić, że leży on na prostej o równaniu  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ .
- (7) Niech  $I$  oznacza całkę potrójną  $I = \int_K f(x, y, z) dx dy dz$ ; sprawdzić, że:  
 (a)  $K = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ ,  $f(x, y, z) = (1 + x + y + z)^{-3} \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\log 2 - \frac{5}{8})$ ;  
 (b)  $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{60}(96\sqrt{2} - 8)$ ;  
 (c)  $K = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ ,  $f(x, y, z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4} abc$ ;  
 (d)  $K = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2), x^2 \leq y \leq x\}$ ,  $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{35}$ ;  
 (e)  $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}$ ,  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{10}$ .
- (8) Obliczyć średnią wartość  $M(f, K) = \int_K f(x) dx / \int_K dx$  funkcji  $f$  na zbiorze  $K$ :  
 (a)  $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ ,  $f(x) = x_1^2 x_2$ ; (b)  $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ ,  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ; (c)  $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq x_1 + x_2 + x_3\}$ ,  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ; (d)  $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4, x_3 \geq 0\}$ ,  $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ .
- (9) Znaleźć środek ciężkości jednorodnej półkuli  $\Omega := \{x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \leq 1\}$
- (10) Obliczyć objętość brył:  
 (a)  $B_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, x^2 + y^2 \leq 3z\}$ ; (b)  $B_2 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ; (c)  $B_3 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z\}$ ; (d)  $B_4 := K_1 \cup K_2$  (e)  $B_5 := K_1 \cap K_2$ , gdzie  $K_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$ ,  $K_2 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ .
- (11) Znaleźć środek ciężkości jednorodnej bryły  $\Omega := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ .
- (12) Znaleźć moment bezwładności względem osi  $0z$  stożka  $C := \{x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$  o gęstości  $\rho(x, y, z) = z^2$ ;
- (13) Oznaczmy  $\Omega := \{(x, y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$  oraz  $I_p := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \varphi d\varphi$  dla  $p > -1$ . Licząc całkę  $\int_K \frac{y^p dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$  dwoma sposobami: jako całkę iterowaną i przez parametryzację  $x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \sin \theta \sin \varphi$ , wykazać tożsamość  $I_p I_{p+1} = \frac{\pi}{2(p+1)}$ . Korzystając z tej tożsamości wyprowadzić następujące oszacowanie:  $\sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} < I_p < \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$ .
- (14) Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą  $B := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}$  o gęstości  $\rho = 1$ , a masą punktową  $m$  umieszczoną w punkcie  $(0, 0, 1)$ ;
- (15) Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą  $B := \{1 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq z^2\}$  o masie  $M$ , a masą punktową  $m$  umieszczoną w punkcie  $(0, 0, 0)$ .
- (16) Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą  $B = \{x^2 + y^2 \leq 1 \leq z \leq 2\}$  o masie  $M$ , a masą punktową  $m$  umieszczoną w punkcie  $(0, 0, 0)$ .
- (17) Niech
- $$I := \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{y+2} dz f(x, y, z).$$
- Zapisać  $I$  jako całkę iterowaną:  $\int dz \int dx \int dy f(x, y, z)$ . Wyrazić  $I$  we współrzędnych walcowych  $(r, \varphi, z)$ .
- (18) Znaleźć jawną postać funkcji  $F(a) = \int_0^1 \frac{\log(1-a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $|a| < 1$ .
- (19) Obliczyć objętość bryły w  $\mathbb{R}^3$  ograniczonej płaszczyzną  $z = 0$  i powierzchniami o równaniach  $y^2 + 3x^2 = 4$ ,  $y + z = 4$ .
- (20) Obliczyć:  $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+ax)}{(1+x)\sqrt{x}} dx$ ,  $a \geq 0$ .