Zadania z Analizy IIR

06.06.2011

(1) Zapisać całkę $I=\int_{\triangle} f(x,y,z)dxdydz$, gdzie $\triangle \in \mathbb{R}^3$ jest czworościanem o wierzchołkach $(0,1,2)$, $(1,0,-1)$, $(1,3,5)$, $(1,0,2)$, w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek):
(a) $\int dx \int dy \int f\, dz$; (b) $\int dz \int dx \int f\, dy$.

(2) Przestawić kolejność całkowania w całce:
(a) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f\, dy$; (b) $\int_{-2}^6 dx \int_{-\sqrt{12+4x-x^2}}^{\sqrt{12+4x-x^2}} f\, dy$; (c) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f\, dy$; (d) $\int_0^{\pi} dx \int_{-\sin x}^{\sin x} f\, dy$;

(3) Obliczyć całki i skomentować otrzymane wyniki: (a) $\int_1^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{y-x}{(x+y)^3}$, (b) $\int_0^1 dy \int_1^{\infty} dx \frac{y-x}{(x+y)^3}$.

(4) Udowodnić tożsamość: $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int_0^1 dz (\int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y,z)dx)$.

(5) Odwracając kolejność całkowania wykazać, że $\int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1 = \int_a^b f(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$.

(6) Wyliczyć środek ciężkości jednorodnego obszaru płaskiego $K := \{(x,y) : x>0, xy \geq 1, \frac{x}{a}+\frac{y}{b} \leq 2\}$ (przy $a,b>0$, $ab>1$ danych); sprawdzić, że leży on na prostej o równaniu $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

(7) Niech I oznacza całkę potrójną $I=\int_K f(x,y,z)dxdydz$; sprawdzić, że:
(a) $K=\{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$, $f(x,y,z)=(1+x+y+z)^{-3} \Rightarrow I=\frac{1}{2}(\log 2-\frac{5}{8})$; (b) $K=\{x^2+y^2+z^2\leq 2, x^2+y^2\leq z\}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow I=\frac{\pi}{60}(96\sqrt{2}-8)$; (c) $K=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\}$, $f(x,y,z)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}abc$; (d) $K=\{x^2+y^2\leq z\leq 2(x^2+y^2), x^2\leq y\leq x\}$, $f(x,y,z)=1 \Rightarrow I=\frac{3}{35}$; (e) $K=\{x^2+y^2+z^2\leq x\}$, $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow I=\frac{\pi}{10}$.

(8) Obliczyć średnią wartość $M(f,K)=\int_K f(x)dx \,/\, \int_K dx$ funkcji f na zbiorze K:
(a) $K=\{x\in R^2 : 0\leq x_1\leq 1, 0\leq x_2\leq 1\}$, $f(x)=x_1^2 x_2$; (b) $K=\{x\in R^2 : (x_1-a)^2+x_2^2\leq r^2\}$, $f(x)=x_1^2+x_2^2$; (c) $K=\{x\in R^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq x_1+x_2+x_3\}$, $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$; (d) $K=\{x\in R^3 : 1\leq x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 4,\, x_3\geq 0\}$, $f(x)=x_1^2+x_2^2$.

(9) Znaleźć środek ciężkości jednorodnej półkuli $\Omega := \{x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1, z\leq 1\}$

(10) Obliczyć objętość brył:
(a) $B_1 := \{x^2+y^2+z^2\leq 4z, x^2+y^2\leq 3z\}$; (b) $B_2 := \{x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq \sqrt{x^2+y^2}\}$; (c) $B_3 := \{x^2+y^2+z^2\leq 4, x^2+y^2\leq 3z\}$; (d) $B_4 := K_1\cup K_2$ (e) $B_5 := K_1\cap K_2$, gdzie $K_1 := \{x^2+y^2+z^2\leq 2z\}$, $K_2 := \{x^2+y^2+z^2\leq 2\}$.

(11) Znaleźć środek ciężkości jednorodnej bryły $\Omega := \{x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq \sqrt{x^2+y^2}\}$.

(12) Znaleźć moment bezwładności względem osi $0z$ stożka $C := \{x^2+y^2\leq z^2, 0\leq z\leq 1\}$ o gęstości $\rho(x,y,z)=z^2$;

(13) Oznaczmy $\Omega := \{(x,y) : x>0, y>0, x^2+y^2<1\}$ oraz $I_p := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi\, d\varphi$ dla $p>-1$. Licząc całkę $\int_K \frac{y^p\, dx\, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ dwoma sposobami: jako całkę iterowaną i przez parametryzację $x=\sin\theta\cos\varphi$, $y=\sin\theta\sin\varphi$, wykazać tożsamość $I_p I_{p+1}=\frac{\pi}{2(p+1)}$. Korzystając z tej tożsamości wyprowadzić następujące oszacowanie: $\sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} < I_p < \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$.

(14) Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{x^2+y^2+z^2\leq 1, z\leq 0\}$ o gęstści $\rho=1$, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0,0,1)$;

(15) Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{1\leq z\leq 2, x^2+y^2\leq z^2\}$ o masie M, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$.

(16) Znaleźć siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B=\{x^2+y^2\leq 1\leq z\leq 2\}$ o masie M, a masą punktową m umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$.

(17) Niech

$$I := \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{y+2} dz f(x,y,z).$$

Zapisać I jako całkę iterowaną: $\int dz \int dx \int dy f(x,y,z)$. Wyrazić I we współrzędnych walcowych (r,φ,z).

(18) Znaleźć jawną postać funkcji $F(a)=\int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx, \quad |a|<1$.

(19) Obliczyć objętość bryły w $\mathbb{R}^3$ ograniczonej płaszczyzną $z=0$ i powierzchniami o równaniach $y^2+3x^2=4$, $y+z=4$.

(20) Obliczyć: $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+ax)}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, $a\geq 0$.