I. UZUPEŁNIANY ZBIÓR DEFINICJI POTRZEBNYCH NA ĆWICZENIA MAT II A

Grupa abelowa (przemienna) to zbiór elementów, którymi można operować tak jak liczbami za pomocą dodawania, tzn. istnieje dla nich działanie, które jest łączne, istnieje element neutralny, taki jak 0 w dodawaniu, istnieje element przeciwny, taki jak ze zmienionym znakiem w dodawaniu, i kolejność działania nie wpływa na wynik. Jeśli kolejność działania zmienia wynik, to grupę nazywa się nieabelową (nieprzemienną).

$g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$,

istnieje element 0 taki, że $0 + g = g + 0 = g$ dla każdego g,

i dla każdego elementu g istnieje taki element $(-g)$, że $(-g) + g = g + (-g) = 0$.

W grupie abelowej $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$.

Zamiast znaku działania, które kojarzy się z dodawaniem, można użyć notacji, która kojarzy się z mnożeniem. Wtedy warunki spełniane przez elementy grupy podaje się w następującej postaci:

$g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$,

istnieje element 1 taki, że $1g = g1 = g$ dla każdego g,

i dla każdego elementu g istnieje taki element g^{-1}, że $g^{-1}g = gg^{-1} = 1$.

W grupie abelowej $g_1g_2 = g_2g_1$.

Ciało to zbiór elementów z dwoma działaniami spełniającymi te same zasady co mnożenie i dodawanie liczb, czyli istnieje element typu 0, który nie zmienia wyniku w dodawaniu, i element typu 1, który nie zmienia wyniku w mnożeniu. Dla wszystkich elementów istnieje przeciwny, i dla wszystkich różnych od zera istnieje odwrotny. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Można powiedzieć, że ciało to zbiór, w którym istnieją dwa działania grupowe przemienne, o własnościach takich jakie mają dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb, i działanie ,,mnożenia" jest rozdzielne względem ,,dodawania" tak jak dla liczb.

Przestrzeń liniowa (wektorowa) nad ciałem to zbiór elementów (wektorów), które można do siebie dodawać według reguł spełniających te same założenia co dodawanie liczb i które można mnożyć przez elementy z ciała. Mnożenie wektorów przez elementy z ciała jest rozdzielne i względem dodawania wektorów i względem dodawania elementów w ciele. Ponadto mnożenie wektorów przez elementy z ciała jest łączne, i mnożenie wektorów przez 1 z ciała nie zmienia wektorów.

Można powiedzieć, że para grupa V i ciało K tworzą przestrzeń liniową (wektorową) gdy mnożenie elementów z V przez elementy z ciała K jest rodzielne względem obu ,,dodawań" (jedno dodawanie jest w ciele K a drugie w grupie V) i łączne, oraz mnożenie elementów w V przez element neutralny ,,mnożenia" w ciele nie zmienia elementów w V.

Innymi ,,słowy": $(V, +_V)$ = grupa abelowa, $(K, +_K, \cdot_K)$ = ciało, $PW = [(V, +_V), (K, +_K, \cdot_K), \cdot_{PW}]$. Symbol $\cdot_{PW}$ oznacza mnożenie elementów w grupie V przez elementy z ciała K. To mnożenie spełnia warunki rozdzielności względem obu dodawań $+_V$ i $+_K$, łączności, i braku zmiany V przy mnożeniu przez 1 z K.

Liniowa niezależność elementów przestrzeni liniowej (wektorowej) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ jest zdefiniowana przez warunek, że jedyna kombinacja liniowa tych elementów, która jest równa $\vec{0}$, ma wszystkie współczynniki równe zero. Innymi słowy, nie da się zbudować kombinacji liniowej $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$ równej $\vec{0}$ ze współczynnikami α_1, α_2, ..., α_n z ciała K inaczej niż zerując każdy z wyrazów w tej sumie (każdy wyraz w tej sumie należy do grupy V) przez wyzerowanie występującego w nim współczynnika z ciała K (każdy współczynnik musi być przyrównany do zera w ciele K).

Odwzorowanie liniowe L przestrzeni wektorowej W w przestrzeń wektorową V nad tym samym ciałem K to takie odwzorowanie, które każdemu wektorowi-argumentowi w w przestrzeni W przypisuje wektor-obraz v w przestrzeni V, $v = Lw$, i zawsze zgodnie z regułą operacji liniowych na wektorach, tzn. $L(kw_1 + w_2) = kv_1 + v_2$, gdzie $v_1 = Lw_1$ i $v_2 = Lw_2$.

Wyznacznik macierzy o wymiarach $n \times n$ zbudowanej z liczb to (faktycznie jedyna) funkcja liniowa względem wszystkich kolumn, znikająca gdy kolumny się powtarzają, i równa 1 dla macierzy jednostkowej.

Przestrzeń unitarna to przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)$, tzn. z funkcją, która przypisuje parom wektorów elementy z ciała przestrzeni wektorowej i spełnia reguły $(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{u})^*$,

$(\vec{u}|k\vec{v}+l\vec{w}) = k(\vec{u}|\vec{v}) + l(\vec{u}|\vec{w})$, $(\vec{u}|k\vec{v}) = k(\vec{u}|\vec{v})$, i $(\vec{u}|\vec{u}) > 0$ dla $\vec{u} \neq \vec{0}$. Gwiazdka oznacza sprzężenie liczb zespolonych (zamiana $i = \sqrt{-1}$ na $-i$).

Odwzorowania unitarne to takie odwzorowanie liniowe przestrzeni unitarnej w przestrzeń unitarną (nie koniecznie tę samą), przy którym iloczyn skalarny nie zmienia wartości. Innymi słowy, w odwzorowaniu unitarnym iloczyn skalarny wektorów-argumentów w przestrzeni wektorów-argumentów jest równy iloczynowi skalarnemu wektorów-obrazów w przestrzeni wektorów obrazów.

Macierz unitarna to macierz, której kolumny są ortonormalne. Macierze unitarne spełniają warunek, że ich sprzężenie hermitowskie daje macierz odwrotną. Odwzorowania unitarne mają unitarne macierze odwzorowania w bazie ortonormalnej.

Sprzężenie hermitowskie macierzy to transponowanie i sprzężenie zepolone jej elementów.

Macierz ortogonalna to rzeczywista macierz unitarna.