ĆWICZENIA DOMOWE PRZYGOTOWUJĄCE DO ZAJĘĆ 21/10/2011

Zad. 1. Rozważmy $I \subset \mathbb{R}$ (dowolny przedział) oraz funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ spełniającą warunek:

$$\forall_{a,b \in I} \; : \; f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \, .$$

Korzystajcac z zasady indukcji, udowodnij następujące stwierdzenia:

(i)

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^*} \; : \; \forall_{x_1, x_2, \ldots, x_n \in I} \; : \; f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \, .$$

(ii) Uogólniona nierówność Bernoulliego:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^*} \; : \; \forall_{a>0, \; a+b \geq 0} \; : \; (a+b)^n \geq a^n + n a^{n-1} b \, .$$

(iii) $\forall_{n \in \mathbb{N}^*} \; : \; \forall_{x_1, x_2, \ldots, x_n > 0} \; : \; \left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \geq n\right)$.

(iv) Niechaj

$$A(z_1, z_2, \ldots, z_n) := \frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n} \, , \qquad G(z_1, z_2, \ldots, z_n) := (z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n)^{\frac{1}{n}}$$

(odpowiednio: średnia arytmetyczna i średnia geometryczna liczb $z_1, z_2, \ldots, z_n$). Zachodzi nierówność Cauchy'ego:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^*} \; : \; A(z_1, z_2, \ldots, z_n) \geq G(z_1, z_2, \ldots, z_n) \, .$$

Wskazówka: Można wykorzystać uogólnioną nierówność Bernoulliego.

(v) $\forall_{n \in \mathbb{N}^*} \; : \; \forall_{a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n} \; : \; \forall_{b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n} \; : \; (a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leq n \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$.

Uwaga W poniższym zadaniu przydatną będzie tzw. mocna zasada indukcji: Niechaj $T \subset \mathbb{N}^*$, a wtedy

$$\left(\forall_{n \in \mathbb{N}^*} \; : \; \overline{1, n-1} \subset T \quad \Longrightarrow \quad n \in T\right) \qquad \Longrightarrow \qquad T = \mathbb{N}^* \, .$$

Jej równoważność z poprzednio podaną zasadą indukcji wykażemy na ćwiczeniach.

Zad. 2. Udowodnij poniższe stwierdzenia:

(i)
$$\left.\begin{array}{c} x_1 = 1 \\ \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \;:\; x_{n+1} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \end{array}\right\} \implies \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \;:\; x_n = 2^{n-1}.$$

(ii)
$$\left.\begin{array}{c} x_1 = 1 \\ \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \;:\; x_{n+1} = A(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n + 1) \end{array}\right\} \implies \forall_{n\in\mathbb{N}^*} \;:\; x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Stwierdzenie pomocnicze (które należy udowodnić):

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^*} \;:\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{n!}\,.$$

Warszawa, 20. października 2011 r.