

**ĆWICZENIA DOMOWE PRZYGOTOWUJĄCE DO ZAJĘĆ**  
**25/10/2011**

Zad. 1. Rozważmy relację równoważności

$$\mathcal{R} := \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 - 3x = y^3 - 3y \},$$

określoną przez funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x$  w tym sensie, że  $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ . Podaj interpretację geometryczną (i narysuj) zbiór  $\mathcal{R}$  i opisz klasy równoważności.

Zad. 2. Udowodnij, że zbiór

$$\mathcal{R} := \{ (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \exists_{k \in \mathbb{N}^*} : m \cdot n = k^2 \}$$

jest relacją równoważności, po czym opisz jej klasy abstrakcji.

Zad. 3 Dla danej bijekcji  $\sigma : X \rightarrow X$  zbioru skończonego  $X$  na siebie określmy zbiór

$$\mathcal{R} := \{ (x, y) \in X \times X \mid \exists_{k \in \mathbb{N}} : y = \sigma^k(x) \},$$

przy czym  $\sigma^k := \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{k \text{ razy}}$ . Sprawdź, że  $\mathcal{R}$  jest relacją równoważności i opisz/skonstruuj jej klasy abstrakcji.

Zad. 4 Niechaj  $f : X \rightarrow X$  będzie dowolnym odwzorowaniem określonym na zbiorze  $X$ . Pokaż, że relacja

$$\mathcal{R} := \{ (x, y) \in X \times X \mid y = x \vee y = f(x) \},$$

jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy  $f \circ f = \text{id}_X$ , tj.  $f$  jest *inwolucją*. Sprawdź to w przypadku  $X := \mathbb{R}$  i  $f(x) := x + E(2x) - 2E(x) - \frac{1}{2}$ , narysuj odnośny zbiór  $\mathcal{R}$  i wykaż, że

$$\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) = \varphi(y) \}, \quad \varphi(x) := 2x - E(x).$$

Warszawa, 22. października 2011 r.