ĆWICZENIA DOMOWE PRZYGOTOWUJĄCE DO ZAJĘĆ 15/11/2011

Zad. 1. Rozważmy tzw. L^p-metrykę na $\mathbb{R}^n \ni x, y$ daną wzorem

$$d_p(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in [1, \infty[\,,$$

oraz tzw. L^∞-metrykę, tj. przypadek graniczny

$$d_\infty(x,y) := \max_{i \in \overline{1,n}} \{|x_i - y_i|\}\,.$$

Sprawdź, że $d_p,\ p \in \{1, 2, \infty\}$ są metrykami, i wykaż ich równoważność.
Podpowiedź: Wykorzystaj nierówność Buniakowskiego–Cauchy'ego–Schwarza.

Zad. 2. Sprawdź, że suma i maksimum dwóch metryk jest metryką. Wskaż przykład dowodzący, iż minimum dwóch metryk w ogólności nie jest metryką.

Zad. 3 Oblicz granicę ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (wzgl. dowiedź, że ciąg nie jest zbieżny) o wyrazie ogólnym

(i) $x_n := n^2 \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$;

(ii) $x_n := \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{2^n}}$;

(iii) $x_n := \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2n + 3}$;

(iv) $x_n := \frac{n^n}{(n!)^2}$;

(v) $x_n := \sqrt[n]{(1+x)^n + (1-x)^n},\ x \in \mathbb{R}$ (dane);

(vi) $x_n := \cos \frac{n^2 \pi}{n+2}$.

Zad. 4 Dla danych $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ udowodnij, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazie ogólnym

$$x_n := \sin(n\varphi + \vartheta)$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varphi, \vartheta \in \pi\mathbb{Z} \qquad \vee \qquad \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Warszawa, 8. listopada 2011 r.