Zadania domowe z Analizy IR. Seria 1. 20.10.2011

1. Wykazać, że $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności: $2n+1 < 2^n$; $3n^3+1 < 2^n$; $n! < 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $(2n-1)!! \leq 2^{n-2}n!$?

3. Uprościć warunek:
(a) $A \cup B \subset A \cup (B \cap C)$; (b) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$; (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;
(d) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$; (e) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$; (f) $A \setminus B = B \setminus A$; (g) $A \cap B = (A \cup C) \cap (B \setminus C)$.

4. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:
(a) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$; (b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;
(c) $A \setminus (B \cup C \cup D) = ((A \setminus B) \setminus C) \setminus D$; (d) $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup (A \cap C \setminus D)$.

5. Wyliczyć:
$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right]$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}\right[$; $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - r)^2 + (x_2 + 2r)^2 \leq r^2 + 1\}$;
$\bigcap_{n=1}^{\infty} \big([0, n] \cup [n^2, \infty[, \big)$; (e) $\bigcup_{t \in [2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in [2,3]} A_t$, gdzie $A_t := [t, 2t] \times [-t, t]$;
(f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{(n+1)^2}, \frac{1}{n+1}\right[$; (g) $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{n(-1)^n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

6. Niech $A_n \subset X$, $A'_n := X \setminus A_n$. Wykazać, że $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k<n} A_k \cup \bigcup_{k \geq n} A'_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$.

7. Obliczyć $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{1}{n} + Q(\frac{n}{3}), \frac{3n+1}{2n-1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $Q(x) := x - E(x)$.

8. Dla $s \geq 0$ oznaczmy $K_s := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - s)^2 \leq s\}$. Wykazać, że mają miejsce następujące zawierania: $\{(x, y) : y \geq x^2\} \subset \bigcup_{s \in \mathbb{N}} K_s \subset \bigcup_{s \in]0, \infty[} K_s = \{(x, y) : y \geq x^2 - \frac{1}{4}\}$.

9. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $f : X \longrightarrow]0, \infty[$ — dowolną funkcją. Wykazać, że istnieje $n \in N$ oraz parami różne elementy $x_1, \ldots, x_n \in X$, takie że $f(x_1) + \ldots + f(x_n) > 100$.

10. Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w R. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $S \subset R \times R$.
$x \sim y \iff (x - y)(1 - xy) = 0$; $x \sim y \iff (x = y$ lub $x = -y \in [-1, 1]$ lub $|x| + |y| = 1)$;
(c) $x \sim y \iff (x = y$ lub $\exists n \in \mathbb{Z} : x, y \in [2n - 1, 2n])$; (d) $x \sim y \iff (x - y \in \mathbb{Z}$ lub $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$.

11. Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$? *Wskazówka: nierówność Bernoulliego.*

12. Wykazać, że dla $m, n \in \mathbb{N}$: (a) jeśli $m < n$, to $\sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[m]{n}$; (b) jeśli $m \geq n(n-1)$, to $\sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[m]{n}$.
Wskazówka: nierówność Bernoulliego.

13. Wykazać, że: $|x| < 1, |y| < 1 \Rightarrow |\frac{x-y}{1-xy}| < 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$, $n \in \mathbb{N}$; $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

14. Wykazać, że $R = \mathbb{Q}_+$ jest jedynym podzbiorem R zbioru $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, spełniającym następujące warunki: (1) $R \cup (-R) = \mathbb{Q}^*$; (2) $R \cap (-R) = \emptyset$; (3) $R \cdot R \subset R$; (4) $R + R \subset R$.

15. Wykazać, że jeżeli zbiór $S \subset \mathbb{R}$ jest przeliczalny lub skończony, to $\exists a, b \in \mathbb{R}, a > 0 : \forall n \in \mathbb{Z} : an + b \notin S$

16. Wykazać, że jeżeli zbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ jest przeliczalny lub skończony, to istnieje trójkąt równoboczny na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, o bokach długości 1, którego środkiem ciężkości jest punkt $(0, 0)$ i którego brzeg nie zawiera żadnego punktu z S.

17. Zbadać, czy poniższe podzbiory $\mathbb{R}$ są ograniczone i jeśli tak, to znaleźć ich kresy: $A = \{\frac{x+1}{|x|+2}, \quad x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{\frac{2}{n} - \frac{3}{m}, \quad n, m \in \mathbb{N}_+\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, ||x - 1| - |x - 2|| < 2\}$.

18. Niech Z – dowolny zbiór niepusty, $P := \{A \in 2^Z : A : \text{skończony}\}$. Wykazać, że wzór $d(A, B) := |A \div B| := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ określa metrykę w zbiorze P. Opisać kule i odcinki względem tej metryki.

19. Sprawdzić, że wzór $d(x, y) := min\{|x - y|, 3 - |x| - |y|\}$ zadaje metrykę na zbiorze $X := [-1, 1]$. Dla wartości $r = \frac{4}{5}$ i $r = \frac{5}{4}$ wyznaczyć kulę $K(1; r)$ (względem metryki d). Wykazać, że (średnica (X, d)) $:= \sup_{x,y \in X} d(x, y) = \frac{3}{2}$.

20. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := |(|x| - |y|)| + |\mathrm{sgn} x - \mathrm{sgn} y|$ określa metrykę na $\mathbb{R}$. Wyznaczyć kule (względem d) o środku $x_0 = 4$ i promieniach $r = 3, 4, 5, 6$. Pokazać, że $K(4; r)$ jest przedziałem $\iff$ $0 < r \leq 2$ lub $r \geq 6$.

21. Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ funkcja $d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{gdy } x-y \in \mathbb{Q} \\ a, & \text{gdy } x-y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ jest metryką na $[-1,1]$.

22. Czy wzór $d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$ określa metrykę na $\mathbb{R}$?