Zadania domowe z Analizy IR. Seria 2. 16.11.2011

1. Wykazać, że: (a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n)=\frac{1}{100}$; (b) $\lim_{n\to\infty}\left(n+4\sqrt{n^2+n}-2\sqrt{n^2-n}-3\sqrt{n^2+2n}\right)=\frac{5}{4}$; (c) $\lim_{n\to\infty}n(2\sqrt{n^2-n+2}-3\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2n})=-\frac{1}{4}$; (d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^3+\sqrt{n^5}}}-\sqrt{n^2+\sqrt{n^3}}\right)=\frac{1}{4}$; (e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)}-\sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}\right)=\frac{7}{3}$; (f) $\lim_{\to\infty}n^2\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^q-\left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right]=\frac{1}{2}pq(q-p)$ dla $p,q\in N$; (g) $\lim_{\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=1$; (h) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3}=\max\{1,a^2\}$ dla $a\in R$; (i) $\lim_{\to\infty}(n^7+7)^{-7}\sqrt{(n+2)^{100}-n^{100}-200n^{99}}=30\sqrt{22}$; (j) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{(3+x)^n+(1-x)^n}=2+|1+x|$ dla $x\in\mathbb{R}$; (k) $\lim_{\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+\ldots+p_ra_r^{n+1}}{p_1a_1^n+\ldots+p_ra_r^n}=\max\{a_1,\ldots,a_r\}$ oraz $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{p_1a_1^n+\ldots+p_ra_r^n}=\max\{a_1,\ldots,a_r\}$, jeśli $r\in\mathbb{N}$ i liczby p_i,a_i są dodatnie; (l) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}-\frac{2}{\sqrt[n]{4}-1}\right)=\frac{1}{2}$;
(m) $\lim_{\to\infty}2^{-n}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})=0$; (n) $\lim_{\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})=+\infty$; (o) $\lim_{\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n+2}\cdots\frac{n}{3n}=0$; (p) $\lim_{\to\infty}n[(n+1)^{\frac{1}{100}}-n^{\frac{1}{100}}]=+\infty$; (q) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=2$; (r) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}\right)=1$; (s) $\lim_{\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$; (t) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{1^4+2^4+\ldots+n^4}=1$; (u) $\lim_{\to\infty}\frac{n+2}{n^2-3}\sum_{k=1}^n\sqrt[n]{k^2-2}=1$.

2. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty}\frac{na_1+(n-1)a_2+\ldots+a_n}{n+(n-1)+\ldots+1}=\lim_{n\to\infty}a_n$.

3. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony, to ciąg (x_n) o wyrazach $x_n=:\frac{2^{n-1}a_1+\ldots+2a_{n-1}+a_n}{2^{n-1}+\ldots+2+1}$ jest zbieżny. Wyliczyć $\lim x_n$, jeśli $a_n=\alpha^n$, $|\alpha|<2$. *Wskazówka:* $\tilde{x}_n:=(1-2^{-n})x_n$ *spełnia warunek Cauchy'ego.*

4. Dowieść, że jeśli ciąg $(a_1+\ldots+a_n)$ jest ograniczony oraz $a_n\searrow 0$ przy $n\to\infty$, to $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

5. Dla danych liczb dodatnich a i b określmy rekurencyjnie dwa ciągi (a_n) i (b_n), przyjmując: $a_0:=a$, $b_0:=b$, $a_{n+1}:=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}:=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. Wykazać, że ciągi $(a_n),(b_n)$ są zbieżne oraz $\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{ab}=\lim_{n\to\infty}b_n$.

6. Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie :
(a) $x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}x_n^2-\frac{1}{3}x_n^3$, $x_0=1$; (b) $x_{n+1}=\frac{\pi}{2}\sin x_n$ $x_0=1$; (c) $x_{n+1}=x_n-\sin x_n$, $x_0=1$.

7. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru:
(a) $\{\sqrt[n]{n+100}:n\in\mathbb{N}\}$; (b) $\{\frac{x}{x^2+1}:x\in\mathbb{R}\}$; (c) $\{2^x+2^{1-x}:x\in\mathbb{R}\}$; (d) $\{\frac{n^2}{2^n}:n\in\mathbb{N}\}$; (e) $\{\frac{1000^n}{n!}:n\in\mathbb{N}\}$; (f) $\{\sqrt{n}-E(\sqrt{n-1}):n\in\mathbb{N}\}$; (g) $\{\frac{m}{n(m+n)}:m,n\in\mathbb{N}\}$; (h) $\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{m}}:\ m,n\in\mathbb{N}\}$.