

**Zadania domowe z Analizy IR. Seria 3. 15.12.2011**

1. Wyliczyć granice:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right)$ ;  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x^4 \log(1 + x^{-2}))$ ; (e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right)$ ; (f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1}{\log^2 x} - \frac{1}{x-1} \right)$ ;  
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ ; (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-5} \left( x - \sqrt{1 + \frac{x^2}{3} \sin x} \right)$ ; (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{ax} - ax}{e^{bx} - bx} \right) x^{-2}$ ;  
 (j)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ ; (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$ ; (l)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$ ;  
 (m)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + \sin x)^{x^{-3}}$ ; (n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \left( x + \frac{1}{x} \right) - \cos \left( x - \frac{1}{x} \right) \right)$ ; (o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ ;  
 (p)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\cos x) - \sin x}{\cos^4 x}$ ; (q)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{1/x^2}$ ; (r)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 + \cos x}$ ;  
 (s)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$ ; (t)  $\lim_{x \rightarrow 1} -(\tan \frac{\pi x}{2})^{1-x}$ ; (u)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\log x}}$ .

2. Znaleźć punkty nieciągłości funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (w zależności od wartości parametrów)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} & x \neq 1, 2 \\ a & x = 2 \\ 1 & x = 1 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3 + x^2}{\sin x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}; \quad m, n \in \mathbb{N};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x - 1}{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & |x| > 1 \\ ax^2 + bx + c & |x| \leq 1 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}.$$

3. Dowieść, że liczba rzeczywistych pierwiastków  $W_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  jest równa 0 lub 1, zależnie od parzystości  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Dla  $x \in [-1, 1]$  udowodnić tożsamość:  $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

5. Dla  $x \in [0, \infty]$  wykazać nierówność:  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ .

6. Dowieść, że:

- (a)  $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$  dla  $x > 0$ ; (b)  $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  dla  $x > -1$ ; (c)  $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$  dla  $0 < x < 1$ ;  
 (d)  $(4 - \cos x) \frac{\sin x}{x} < 3$  dla  $x \neq 0$ ; (e)  $|\frac{1+x}{x} \arctan x| < \frac{\pi}{2}$  dla  $x < 1$ ; (f)  $1 + x \log(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$ .

7. Dowieść, że funkcja  $f(x) := (1+x)^{1/x}$ ,  $-1 < x \neq 0$ , da się przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na  $] -1, \infty[$ . Wyliczyć  $f(0)$  i  $f'(0)$  oraz wykazać, że funkcja  $x \mapsto f(x)$  jest malejąca, a  $x \mapsto (1+x)f(x)$  — rosnąca na  $] -1, \infty[$ .

8. Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{gdy } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$ . Dowieść, że:

- (a)  $f$  jest klasy  $C^1$  na  $\mathbb{R}$  (wyliczyć  $f'(0)$ );  
 (b)  $f$  jest malejąca;  
 (c)  $f$  jest jednostajnie ciągła na  $\mathbb{R}$ .  
 (d) funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$  jest nieparzysta.

9. Dowieść, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ , ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.

10. Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:

$$f(x) := \frac{x^2 + 3x + 11}{\sqrt{x^2 + 2}}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) := \left(x - \frac{3}{x}\right)e^{-\frac{2}{x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) := \arcsin \frac{3x - x^3}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) := (x+1) \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Wykazać, że dla dowolnych rozłącznych przedziałów domkniętych  $[a,b]$  i  $[c,d]$  w  $\mathbb{R}$  istnieje funkcja na  $\mathbb{R}$  klasy  $C^\infty$  taka, że  $f \equiv 0$  na  $[a,b]$  i  $f \equiv 1$  na  $[c,d]$ . Wsk. Można wykorzystać funkcję  $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$
12. Niech  $X := K(0,1) = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$  oraz  $d(x,y) := \min\{|x-y|, 2-|x|-|y|\}$ . Sprawdzić, że  $(X,d)$  jest przestrzenią metryczną niezupełną (tzn istnieją ciągi Cauchy'ego nie mające w  $X$  granicy). Narysować  $K(p,R)$  (kula o środku  $p$  i promieniu  $R$ ) dla  $(p;R)$  równych odpowiednio:  $((0,0); \frac{1}{2})$ ;  $((0, \frac{3}{4}); \frac{1}{2})$ .
13. Wykazać, że  $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 1\}$  ma cztery spójne składowe.
14. Zbadać zwartość, spójność, domkniętość i ograniczoność zbioru:  $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x+y)^2 = 1\}$ .
15. Zbadać domkniętość, otwartość, zwartość i spójność poniższych podzbiorów przestrzeni  $X \subset \mathbb{R}$ 
  - a)  $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $A := \{1\}$ ,  $B := \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ ,  $C :=$  dowolny podzbiór  $X$ ;
  - b)  $X := \mathbb{R}$ ,  $A := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$ ;
  - c)  $X := ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $A := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$ ;
  - d)  $X := \mathbb{R}$ ,  $A := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ -ustalone ;
  - e)  $X := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $A := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ -ustalone;
16. Niech  $X := ]0, \infty[$ . Podać przykład funkcji ciągłej  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dla której  $f(X)$  jest zbiorem : a) domkniętym i nieograniczonym, b) domkniętym i ograniczonym (czyli zwartym).
17. (C) Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru  $\mathbb{N}$  w topologii zadanej metryką  $d(m,n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ . Czy metryka  $d_o(m,n) := |m-n|$  określa tę samą co  $d$  topologię w zbiorze  $\mathbb{N}$  ?
18. (C) Zbadać domkniętość, zwartość, spójność i otwartość zbiorów: a) Zbiór funkcji wielomianowych na odcinku  $[0,1]$ . (jako podzbiór  $C[0,1]$  z metryką  $d(f,g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$ ) b) Jak wyżej lecz ograniczamy się do wielomianów stopnia nie większego niż 17.
19. Niech  $(X,d)$  będzie przestrzenią metryczną; dla  $A \subset X$  i  $\epsilon \geq 0$  oznaczmy  $A_\epsilon := \{x \in X : \exists a \in A : d(x,a) \leq \epsilon\}$ . Rozważmy następujące implikacje: (D)  $A$  domknięty  $\Rightarrow A_\epsilon$  domknięty; (O)  $A$  otwarty  $\Rightarrow A_\epsilon$  otwarty; (Z)  $A$  zwarty  $\Rightarrow A_\epsilon$  zwarty; (S)  $A$  spójny  $\Rightarrow A_\epsilon$  spójny. Dowieść, że: (a)  $A$  zwarty  $\Rightarrow A_\epsilon$  domknięty; (b) w przestrzeni  $X := \mathbb{R}^n$  z metryką  $d(x,y) := |x-y|$  implikacje (D), (O), (Z) i (S) są również prawdziwe; (c) dla  $X := ]-\infty, -1[ \cup \{0\} \cup ]1, +\infty[$ ; z metryką  $d(x,y) := |x-y|$  implikacje (D), (O), (Z) i (S) są fałszywe.
20. (C) Wykazać, że przestrzeń metryczna, w której każdy podzbiór ograniczony i domknięty jest zwarty, jest zupełna.
21. Odwzorowanie  $f$  nazywa się *domknięte (otwarte)*, jeżeli  $f$ -obrazy zbiorów domkniętych (otwartych) są domknięte (otwarte). Zbadać, czy dane ciągle (w zwykłej topologii  $\mathbb{R}$ ) odwzorowanie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest domknięte lub otwarte:  
 $f(x) := \sqrt{1+x^2}$ ;  $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ; (c)  $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$ ;  $f(x) := \sin x$ .
22. (C) Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja odcinka domkniętego na zbiór  $W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ .
23. Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . (zatem  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}$  nie są homeomorficzne). Uogólnić wynik na  $\mathbb{R}^m, m \geq 2$  i  $\mathbb{R}$ .
24. Czy istnieje ciągła bijekcja okręgu na prostą ?
25. (C) Niech  $C(r)$  oznacza okrąg na płaszczyźnie o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $r$ . Niech  $X := \bigcup_{n=2}^{\infty} C(1 - \frac{1}{n})$ ,  $Y := \bigcup_{n=3}^{\infty} C(\frac{1}{n})$  będą podzbiórami w  $\mathbb{R}^2$  ze standardową metryką. a) Wykazać, że  $X$  i  $Y$  są niezupełnymi przestrzeniami metrycznymi. b) Skonstruować homeomorfizm (tzn. ciągłą bijekcję taką, że odwrotna jest ciągła)  $X \rightarrow Y$ . c) Znaleźć uzupełnienia  $X$  i  $Y$  i wykazać, że nie są homeomorficzne. (Czyli homeomorficzne przestrzenie metryczne mogą mieć niehomeomorficzne uzupełnienia.)