

Zadania domowe z Analizy IR. Seria 4. 12.01.2012

1. Obliczyć całki nieoznaczone:

- (a) $\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx$; (b) $\int \sin^3 x dx$; (c) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; (d) $\int \sqrt{x}(\log x)^2 dx$; (e) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; (f) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; (g) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$; (l) $\int \frac{x dx}{x^3+1}$; (m) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$; (n) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; (o) $\int \tan^2 x dx$; (p) $\int \frac{1}{x^2} \arcsin x dx$; (s) $\int \frac{\log |1-x|}{x^{n+1}} dx$; (t) $\int (\frac{x}{\arctan x} - 1)^{-2} dx$; (u) $\int \sin(\log x) dx$; (w) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$; (x) $\int \frac{\tan 2x dx}{2-3 \cos^2 x}$; (y) $\int \frac{\sin x \cos^3 x dx}{2+\sin^2 x}$; (z) $\int \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4} dx$; (aa) $\int e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx$;

2. Obliczyć całki oznaczone:

- (b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$; (c) $\int_2^3 \frac{dx}{x \log x}$; (j) $\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$; (k) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\tan^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$; (l) $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, $n \in \mathbb{N}$; (m) $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx$; (n) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2 \cos x}$; (o) $\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; (p) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+2 \sin x(\sin x+\cos x)}$; (r) $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$, $m, n \in \mathbb{N}$, $a < b$; (s) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$;

3. Obliczyć pochodne funkcji:

- (a) $f(x) := \int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2) dt$; (b) $g(x) := \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

4. Zbadac funkcję $f(x) := \int_0^x \frac{t^2+t}{\sqrt{t^2-2t+2}} dt$

5. Dowiesc, ze jesli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciagla oraz spełnia warunek $\forall x \in \mathbb{R} : \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$, to jest okresowa.

6. Wyrazic $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$, jesli:

- (a) $F_n(x) := \int (\frac{x^2}{x^2+1})^n dx$ (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x(x^2+1)^n}$ (wyliczyc $F_4(x)$) (c) $F_n(x) := \int \frac{x^p dx}{\log^n x}$, $p \in \mathbb{R}$ (d) $F_n(x) := \int x^{p-n} e^x dx$, $p \in [0, 1[$ (e) $\int \frac{dx}{x^n(1+x)}$ (wyprowadzic wzor na $F_n(x)$)

7. Znalezc wzor rekurencyjny, wyrazajacy $F_{n+2}(x)$ przez $F_n(x)$, jesli:

- (a) $F_n(x) := \int \cos^n x dx$ (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{\sin^n x}$ (c) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x^n(x^2+1)}$ (znalezic wzory na $F_{2k}(x)$ i $F_{2k+1}(x)$)
(d) $F_n(x) := \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (e) $F_n(x) := \int x^n \cos x dx$

8. Rozwazajac sumy Riemanna odpowiednio dobranej calki wyliczyc granice:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}) = \log k$ dla $2 \leq k \in \mathbb{N}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{\log 2}$.