

Zadania z Algebry I R

Seria 1.

31.10.12

1. Niech $X := \{e, a, b, c\}$. Podać wszystkie możliwe struktury grupy (tzn. możliwe tabele mnożenia) na zbiorze X , takie że e jest elementem jednostkowym.
2. a) Na zbiorze liczb całkowitych określamy relację $m \simeq n \iff m - n$ dzieli się przez 8. Na zbiorze klas tej relacji określamy działanie $[x] * [y] := [xy]$. Sprawdzić, że ta definicja jest poprawna i zadaje działanie łączne. Czy zbiór klas wraz z tym działaniem tworzy grupę? Czy jeżeli ze zbioru klas usuniemy $[0]$, to dostaniemy strukturę grupy?
b) Odpowiedzieć na te same pytanie jeżeli relacja zadana jest przez: $m \simeq n \iff m - n$ dzieli się przez 7.
3. Wykazać, że jeżeli $a, b, c \in \mathbb{N}$ i $a^2 + b^2 = c^2$, to c dzieli się przez 5.
4. Niech $X := \{1, 2, \dots, 7\}$. Permutację $\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ a) rozłożyć na cykle; b) zapisać jako złożenie transpozycji; c) zapisać jako złożenie transpozycji sąsiednich elementów.
5. Niech $X := \{1, 2, \dots, 5\}$. Niech $\sigma_1 := (2, 3)$ (cykl o długości 2) oraz $\sigma_2 := (4, 5)$. Znaleźć permutację π , taką że $\sigma_1 = \pi \sigma_2 \pi^{-1}$. To samo dla $\sigma_1 := (2, 3, 4)(1, 5)$ i $\sigma_2 := (1, 5, 3)(2, 4)$.
6. Niech $F := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$. Sprawdzić, że: a) elementy z F są bijekcjami $\mathbb{R}$; b) F jest grupą (względem składania); c) $A := \{f \in F : b = 0\}$ oraz $B := \{f \in F : a = 1\}$ są podgrupami w F ; d) B jest podgrupą normalną a A nie.
7. Sprawdzić, że zbiór G wraz z danym działaniem tworzy grupę, wskazać jej element neutralny oraz znaleźć jawny wzór na odwrotność elementu grupy:
 - (a) $G := \mathbb{Z}$ z działaniem $m \odot n := m + (-1)^m n$,
 - (b) $G :=$ wszystkie funkcje postaci $f(x) := ax + b, a > 0, b \in \mathbb{R}$, ze składaniem odwzorowań,
 - (c) $G := [0, a[$, $a \in \mathbb{R}^+$ z działaniem $x +_a y := \begin{cases} x + y & \text{gdy } x + y < a; \\ x + y - a & \text{gdy } x + y \geq a. \end{cases}$
8. Rozwiązać równania kwadratowe w ciele C :
 $(3+i)z^2 + (3-2i)z + (3-i) = 0$; $z^2 + (2+i)z + 2-2i = 0$; $z^2 - 5z + 7+i = 0$; $(1+i)z^2 + (2+3i)z + 4-i = 0$;
9. Sprawdzić, że $z = 1$ jest rozwiązaniem równania $z^3 - 9z + 8 = 0$ i wykorzystać to do znalezienia pozostałych rozwiązań tego równania.
10. Rozwiązać w dziedzinie liczb zespolonych równania:
 $x^3 + 6ix + 4 + 4i = 0$, $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$, $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 2 = 0$,
 $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$, $(z+i)^5 = \bar{z}^5$.
11. Sprowadzić do postaci trygonometrycznej wyrażenia:
 $1 + \cos a + i \sin a$; $1 - a^2 + 2ia$, gdzie $a = \operatorname{tg} a$.
12. Niech $w = e^{i3\pi/5}$. Sprawdzić, że $z = w + \frac{1}{w}$ spełnia równanie $z^2 + z = 1$. Jakie równanie spełnia w ?
13. Niech j, j^2 oznaczają różne od 1 pierwiastki równania $z^3 = 1$ i niech w ma znaczenie z poprzedniego zadania. Wykazać, że:
 $(1+j^2)^4 = j$; $(1-j+j^2)(1+w-w^2) = 4$; $(1-j)(1-j^2)(1-j^4)(1-j^5) = 9$.
14. Niech $w = e^{i2\pi/n}$ i niech k będzie liczbą naturalną niepodzielną przez n . Wykazać, że:
 $1 + w^k + w^{2k} + \dots + w^{(n-1)k} = 0$;
 $1 - w^k + w^{2k} - \dots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)k} = \begin{cases} 0 & n = 2p \\ \frac{2}{1+w^k} & n = 2p+1 \end{cases}$

15. Dowieść, że:

- (a) $\frac{1+it}{1-it} = e^{2i \arctan t}$ dla $t \in \mathbb{R}$; (b) $\frac{z-1}{z+1} = i \tan \frac{\varphi}{2}$ dla $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in]-\pi, \pi[$;
 (c) $\frac{z-i}{z+i} = i \tan \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ dla $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$;
 (d) Jeżeli $\tan \varphi = i \frac{1-z}{1+z}$, to $\tan n\varphi = i \frac{1-z^n}{1+z^n}$, dla $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -1 \neq z^n$, $\varphi \in \mathbb{R}$
 (e) $\left(\frac{1+i \tan x}{1-i \tan x} \right)^n = \frac{1+i \tan nx}{1-i \tan nx}$

16. Znaleźć liczby zespolone z spełniające równanie $z^6 + z^3 \bar{z} + \bar{z}^2 = 0$

17. Podać interpretację geometryczną i naszkicować zbiór: $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\frac{z-i}{z-5}) = 0\}$.

18. Wyznaczyć i naszkicować:

- (a) obraz półpłaszczyzny $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 1\}$ w odwzorowaniu $f(z) := \frac{2z-1}{2z+3}$;
 (b) przeciwbraz $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \pi/4\}$ w odwzorowaniu $f(z) := \frac{z+i}{z-i}$;
 (c) obraz półpłaszczyzny $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ w odwzorowaniu $f(z) := \frac{z-3}{z+4}$

19. Sprawdzić, że $\prod_{k=-n}^n (u^k - zu^{-k}) = \prod_{k=-n}^n (u^{2k} - z) = 1 - z^{2n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $u := e^{\frac{\pi i}{2n+1}}$ oraz $z \in \mathbb{C}$. Zastosować tożsamość do wyprowadzenia wzoru: $\prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

20. Dowieść, że jeśli $u = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, to $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - u^k) = n$. Korzystając z tego wyprowadzić (dla $m, n \in \mathbb{N}$) następujące wzory: $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$; $\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$; $\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$.

21. Dowieść, że:

$$\prod_{p=1}^n (z - \lambda \epsilon^p) = z^n - \lambda^n,$$

gdzie ϵ jest n -tym pierwiastkiem z jedności, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

22. Rozwiązać równania:

$$(1+i)z^2 + (2+3i)z + 4-i = 0, \quad z^4 + 6z^2 + 25 = 0, \quad z^2 - 12\bar{z} + 61 = 0, \\ z^2 - 15|z| + 54 = 0, \quad z^4 + 2i\bar{z}^2 = 0, \quad z^3 + 6z + 2 = 0, \quad z^3 + 3z^2 - 3z - 1 = 0, \quad z^3 - 9z - 9 = 0.$$

23. Wykazać, że:

$$\sin \frac{\pi}{22} - \sin \frac{3\pi}{22} + \sin \frac{5\pi}{22} - \sin \frac{7\pi}{22} + \sin \frac{9\pi}{22} = \frac{1}{2} \quad (\text{wsk: suma pierwiastków 11-tego stopnia z 1 jest równa 0}); \\ \sum_{k=-n}^n \cos k\varphi = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\varphi/2)} \quad (\text{dla } \sin \frac{\varphi}{2} \neq 0); \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k+1)\varphi = 2^n \cos^n \varphi \cos(n+1)\varphi.$$

24. Dla liczby naturalnej n i $\varphi \in \mathbb{R}$ obliczyć $\sum_{k=1}^n 2^k \cos(k\varphi)$.

25. Dla ustalonej liczby naturalnej n , znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania równania: $1+x+x^2+\dots+x^n=0$.

26. Wykazać, że jeśli $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$, to $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi$.

27. Obliczyć $\cos \frac{\pi}{5}$.