

2. seria zadań, Algebra IR

Zadanie 1. Zbadać, czy odwzorowanie $u \mapsto \sigma(u) = u^{99}$ jest permutacją zbioru (a) $U = \sqrt[1995]{1}$, (b) $U = \sqrt[1996]{1}$. Jeśli tak, podać jawny wzór na σ^{-1} .

Zadanie 2. Sprawdzić, że wzór $\sigma(k) = |43/2 - |4k - 1|| - 21/2$ określa permutację zbioru $X = \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$. Rozłożyć σ na cykle rozłączne, znaleźć rząd oraz znak σ .

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie permutacje $\rho \in S_6$ takie, że $\rho^2 = (1, 2)(3, 4)$.

Zadanie 4. Wykazać, że $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_4) = \mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_2$.

Zadanie 5. Niech p i q będzie parą liczb naturalnych względnie pierwszych. Wykazać, że $\mathbb{Z}_{pq}$ można utożsamić z $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Zadanie 6. Przypomnijmy, że komutatorem grupy G jest podgrupa generowana przez elementy postaci $ghg^{-1}h^{-1}$. Wykazać, że komutatorem grupy permutacji S_n jest podgrupa alternująca $A_n \subset S_n$. W tym celu skorzystać z tego, że grupa alternująca jest generowana przez cykle długości 3 oraz każdy cykl długości 3 jest komutatorem transpozycji (co należy udowodnić!).

Zadanie 7. Wykazać, że $\{\text{id}, (12)(34)\}$ jest podgrupą normalną w grupie $\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ oraz $\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ jest podgrupą normalną w grupie alternującej A_4 , natomiast $\{\text{id}, (12)(34)\}$ nie jest podgrupą normalną A_4 .

Zadanie 8. Dowieść, że dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ istnieje permutacja $\rho \in S_n$ taka, że $\sigma^{-1} = \rho\sigma\rho^{-1}$. Wskazówka: dla permutacji $\sigma_1 \sigma_2$ istnieje ρ takie, że $\sigma_1 = \rho\sigma\rho^{-1}$, wtedy i tylko wtedy gdy σ_1 i σ_2 mają równoważny rozkład na cykle rozłączne - patrz zadanie 231 z zielonego zbioru zadań Jezierski et al.

Zadanie 9. Przyjmując oznaczenia z poprzedniego zadania, znaleźć $\rho \in S_5$ dla $\sigma = (12)(345)$.

Zadanie 10. Znaleźć $\mathbf{NWD}(f, g)$ gdzie $f, g \in \mathbb{R}[X]$: $f(x) = X^3 + X^2 - 3X - 3$ a $g = X^2 + 3X + 2$. Czy istnieją wielomiany u i v takie, że $uf + vg = 1$?

Zadanie 11. Znaleźć $\mathbf{NWD}(f, g)$, gdzie

- $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f(X) = X^4 + 5X^3 + 2X + 6$, $g(X) = X^3 + 4X^2 + 4X + 5$
- $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f(X) = X^4 + 4X^3 + X^2 + 3$, $g(X) = X^3 + 4X + 3$
- $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f(X) = X^4 + 5X^3 + 2X + 6$, $g(X) = X^3 + 4X^2 + 4X + 5$
- $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f(X) = X^4 + 4X^3 + X^2 + 3$, $g(X) = X^3 + 4X + 3$

Przypomnienie: $\mathbb{Z}_n[X]$ jest pierścieniem wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_n$.

Zadanie 12. Proszę przerobić zadania 246, 227, 220 z zielonego zbioru Jezierski et al.