

Zadania domowe z Algebry IR

Seria 3.

Zadanie 1. Dowieść, że jeśli suma mnogościowa $V_1 \cup V_2$ dwóch podprzestrzeni $V_1, V_2 \subset V$ także jest podprzestrzenią V , to $V_1 \subset V_2$ lub $V_2 \subset V_1$.

Zadanie 2. które z kolumn $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

należą do przestrzeni $V := \ker \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$? Czy z tych kolumn można wybrać bazę V ?

Zadanie 3. Niech $V := \mathbb{R}^T$ będzie przestrzenią wektorową funkcji $v : T \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $T := \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Określmy wektory (czyli funkcje) $v_0, \dots, v_5 \in V$ wzorami $v_k(t) := t^k$, $t \in T, k \in \overline{0, 5}$, w szczególności $v_0 = \text{const} = 1$. Dowieść, że:

- (1) układ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 jest liniowo niezależny;
- (2) $v_5 \in \langle v_1, \dots, v_4 \rangle$.

Zadanie 4. Dowieść, że $\mathbb{R}^4$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_0 = \ker \mathbf{A}$

i $V_1 = \text{im } \mathbf{A}$ dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; rozłożyć na składowe wektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5. Niech $\mathbf{S} := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 12 \end{bmatrix}$. Sprawdzić, że $V = \mathbb{R}^4$ jest sumą prostą pod-

przestrzeni $V_0 = \ker \mathbf{S}$ i $V_1 = \text{im } \mathbf{S}$ oraz znaleźć macierz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}_4^4$ taką, że $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{P}\mathbf{x}$ jest rzutem $\mathbf{x}$ na V_1 wzdłuż V_0 .

Zadanie 6. Określmy podprzestrzenie $\mathbb{R}^4$ wzorami $V_1 = \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 \rangle$, $V_2 = \langle \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4 \rangle$, gdzie

$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_4$ są kolumnami macierzy $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$. Znaleźć: (1) takie bazy V_1

i V_2 , że ich wspólne wektory tworzą bazę $V_1 \cap V_2$;

(2) równania opisujące podprzestrzeń $V_1 + V_2$.

Zadanie 7. Niech $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \mathbf{A}$, $V_1 := \text{im } \mathbf{A}$, $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$.

(a) Znaleźć takie bazy V_0 i V_1 , żeby ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$. (b) Zbadać, czy $\mathbf{u} \in V_0 + V_1$.

Zadanie 8. Niech $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -3 & 7 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \mathbf{A}$, $V_1 := \operatorname{im} \mathbf{A} \subset \mathbb{R}^4$.

(a) Zbadać, czy $V_0 + V_1$ zawiera jakiś wektor o wszystkich współrzędnych > 0 . (b) Znaleźć takie bazy V_0 i V_1 , żeby ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$.

Zadanie 9. Niech $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 & 8 \\ -3 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \mathbf{A}$, $V_1 := \operatorname{im} \mathbf{A}$. Znaleźć: (a) takie

bazy podprzestrzeni V_0 i V_1 , by ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$; (b) układ równań opisujący podprzestrzeń $V_0 + V_1$ oraz bazę $V_0 + V_1$.

Zadanie 10. Podprzestrzenie $U, V \in \mathbb{R}^4$ zadajmy wzorami $U := \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

$V := \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Znaleźć: (a) takie bazy U i V , że ich wspólne wektory tworzą bazę $U \cap V$; (b) równania opisujące $U + V$.

Zadanie 11. Dane są dwie podprzestrzenie $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$: $V_1 = \{X : \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} X = 0\}$ i $V_2 = \{X : X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\}$. Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$, bazę $V_1 + V_2$ i równania opisujące $V_1 + V_2$.

Zadanie 12. Niech V_0 będzie przestrzenią rozwiązań układu równań danego przez macierz A , zaś V_1 przestrzenią rozpiętą przez kolumny tej macierzy, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -10 & -7 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, czy $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_1 + V_0$. znaleźć takie bazy V_1 i V_0 aby ich część wspólna stanowiła bazę $V_1 \cap V_0$.

Zadanie 13. Pokazać, że jeżeli V, W, Z - przestrzenie wektorowe, to $(V \oplus W) \oplus Z = V \oplus W \oplus Z$

Zadanie 14. Sprawdzić, że podzbiór

$$V =: \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{ciąg } y_k := x_{k+1} - x_k \text{ jest ciągiem arytmetycznym}\}$$

jest podprzestrzenią wektorową skończonego wymiaru w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ciągów o wyrazach rzeczywistych. Obliczyć $\dim V$.

Zadanie 15. Rozważmy następujące warunki na podprzestrzenie V_1, V_2, V_3 przestrzeni V :

- (1) $V = V_1 + V_2 + V_3$, (2) $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$,
 (3) $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_3 \cap V_2 = \{0\}$,
 (4) każdy wektor $v \in V$ ma dokładnie jeden rozkład $v = v_1 + v_2 + v_3$ na składowe $v_i \in V_i$.
 Zbadać, podając dowód lub kontrprzykład, prawdziwość każdej implikacji:
 (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ (4), (2) $\wedge$ (3) $\Rightarrow$ (4), (1) $\wedge$ (3) $\Rightarrow$ (4).

Zadanie 16. Które z kolumn macierzy $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ należą do przestrzeni V opisanej równaniami $\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 + x^5 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4 - 3x^5 = 0 \end{cases}$? Znaleźć bazę V .

Zadanie 17. Sprawdzić, że $\mathbb{R}^4$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$, $V_1 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.
 znaleźć rozkład wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ na składowe w tych podprzestrzeniach.

Zadanie 18. Sprawdzić, że dla $n \geq 3$ przestrzeń $\mathbb{R}_n[\cdot]$ jest sumą prostą swoich dwóch podprzestrzeni: $U = \mathbb{R}_2[\cdot]$ oraz $V = \{w : w(-1) = w(0) = w(2) = 0\}$. znaleźć rozkład $w(t) = t^3$ na składowe w U i V .

Zadanie 19. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni:

$$V := \left\{ v \in \mathbb{K}_3[\cdot] : v(1) = \dot{v}(0) = -\frac{1}{2}v(0) \right\} \subset \mathbb{K}_3[\cdot]$$

Zadanie 20. Niech $F \in L(V, W)$, $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ oraz niech $u_1, u_2, \dots, u_s \in V$ będzie bazą $\ker F$. Dowieść, że $\begin{pmatrix} F(v_1), \dots, F(v_r) \\ \text{są liniowo niezależne} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s \\ \text{są liniowo niezależne} \end{pmatrix}$.

Zadanie 21. Rozwiązać w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ układy równań:

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{bmatrix} p & 1-p & 1+p \\ 2 & -p & 0 \\ 1 & 0 & 1+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-2 \\ 4p \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b) \quad \begin{bmatrix} -1 & 1+p & 1+p \\ -p & 3+p & 2 \\ 1 & 2 & 3+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ c) \quad & \begin{bmatrix} p & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & p & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d) \quad \begin{bmatrix} p & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -p & t \\ 7 & p & -5 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 22. Wybrać bazę spośród wektorów:

a) $((1, 2, 3, 4), (2, 3, 6, 7), (1, 3, 3, 5), (1, 1, 2, 4), (1, 0, 2, 3))$

b) $(x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 7, x^2 - x - 9)$

Zadanie 23. Zdefiniuj naturalną strukturę modułu nad pierścieniem $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ na grupie przemiennej $(G, +, -(\cdot), \bullet \mapsto 0)$, której dowolny element $g \in G$ spełnia tożsamość $\underbrace{g + g + \dots + g}_n = 0$.

Zadanie 24. Niechaj będzie dany ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow V^{(0)} \xrightarrow{\chi^{(0)}} V^{(1)} \xrightarrow{\chi^{(1)}} V^{(2)} \xrightarrow{\chi^{(2)}} \dots \xrightarrow{\chi^{(n-1)}} V^{(n)} \longrightarrow 0$$

skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych $V^{(k)}$, $k \in \overline{0, n}$ nad ciałem $\mathbb{K}$ (przy czym $\chi^{(k)}$ są tutaj odwzorowaniami $\mathbb{K}$ -liniowymi). Wykaż tożsamość

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim_{\mathbb{K}} V^{(k)} = 0.$$

Zadanie 25. Niechaj będzie dany ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow G^{(1)} \xrightarrow{\chi^{(1)}} G^{(2)} \oplus G^{(3)} \xrightarrow{\chi^{(2)}} G^{(4)} \oplus G^{(5)} \xrightarrow{\chi^{(3)}} G^{(5)} \longrightarrow 0$$

modułów nad pierścieniem R , w którym $\chi^{(k)}$, $k \in \{1, 2, 3\}$ są odwzorowaniami R -liniowymi, przy czym $\chi^{(2)}$ ma rozkład

$$\chi^{(2)} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

dla pewnych odwzorowań R -liniowych

$$\alpha \in \operatorname{Hom}_R(G^{(2)}, G^{(4)}), \quad \beta \in \operatorname{Hom}_R(G^{(3)}, G^{(4)}), \quad \gamma \in \operatorname{Hom}_R(G^{(2)}, G^{(5)})$$

oraz pewnego izomorfizmu R -modułów

$$\delta : G^{(3)} \xrightarrow{\cong} G^{(5)}.$$

Udowodnij dokładność ciągu

$$0 \longrightarrow G^{(1)} \xrightarrow{\operatorname{pr}_{G^{(2)}} \circ \chi^{(1)}} G^{(2)} \xrightarrow{\alpha - \beta \circ \delta^{-1} \circ \gamma} G^{(4)} \xrightarrow{\chi^{(3)} \circ j_{G^{(4)}}} G^{(5)} \longrightarrow 0,$$

w którego zapisie użyto standardowych oznaczeń z wykładu.

Zadanie 26. Niechaj $G^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwoma modułami nad pierścieniem R i niech $\chi : G^{(1)} \longrightarrow G^{(2)}$ będzie odwzorowaniem R -liniowym. Wykaż, że odwzorowanie

$$G^{(1)} \times G^{(2)} \ni (g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_2 - \chi(g_1))$$

jest automorfizmem R -modułu $G^{(1)} \times G^{(2)}$, a następnie udowodnij na tej podstawie, że ilekroć jest dane odwzorowanie R -liniowe $\psi : G^{(2)} \longrightarrow G^{(1)}$ oraz element $g_1 \in G^{(1)}$ spełniające warunek

$$\psi \circ \chi(g_1) = g_1,$$

wówczas istnieje automorfizm

$$\theta : G^{(1)} \times G^{(2)} \rightarrow$$

o własności

$$\theta(g_1, 0) = (0, \chi(g_1)).$$

Zadanie 27. Niechaj G będzie modulem nad pierścieniem R i niech $(G^{(\alpha)}, \chi^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema parami złożonymi z modułu nad pierścieniem R i odnośnego odwzorowania R -liniowego $\chi^{(\alpha)} : G^{(\alpha)} \longrightarrow G$. Definiujemy **iloczyn włóknisty modułów** $\{G^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \{1, 2\}}$ **względem** $(\chi^{(1)}, \chi^{(2)})$ (lub też **nad modulem** G) jako podmoduł produktu tych modułów, którego nośnikiem jest podzbiór

$$G^{(1)} \times_{\chi^{(1)} \times \chi^{(2)}} G^{(2)} := \{ (g^{(1)}, g^{(2)}) \in G^{(1)} \times G^{(2)} \mid \chi^{(1)}(g^{(1)}) = \chi^{(2)}(g^{(2)}) \}.$$

Udowodnij następujące stwierdzenia:

- (i) Dla każdej pary $(H, \{\eta^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \{1, 2\}})$ złożonej z R -modułu H oraz dwuelementowej rodziny odwzorowań R -liniowych, $\eta^{(\alpha)} : H \longrightarrow G^{(\alpha)}$, spełniających warunek

$$\chi^{(1)} \circ \eta^{(1)} = \chi^{(2)} \circ \eta^{(2)}$$

istnieje dokładnie jedno odwzorowanie R -liniowe

$$\eta : H \longrightarrow G^{(1)} \times_{\chi^{(1)} \times \chi^{(2)}} G^{(2)}$$

o własności

$$\text{pr}_{\alpha} \circ \eta = \eta^{(\alpha)}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

- (ii) Niechaj $(G_A, (G_A^{(\alpha)}, \chi_A^{(\alpha)}))$, $\alpha \in \{1, 2\}$, $A \in \{1, 2\}$ będą dwoma zestawami modułów i odwzorowań R -liniowych jak w powyższej definicji i niech $G_A^{(1)} \times_{\chi_A^{(1)} \times \chi_A^{(2)}} G_A^{(2)}$ będą odnośnymi iloczynami włóknistymi. Dla dowolnej trójki odwzorowań R -liniowych $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$, $\psi^{(\alpha)} : G_1^{(\alpha)} \longrightarrow G_2^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ spełniających równania

$$\chi_2^{(\alpha)} \circ \psi^{(\alpha)} = \psi \circ \chi_1^{(\alpha)}$$

oznaczymy przez

$$\theta : G_1^{(1)} \times_{\chi_1^{(1)} \times \chi_1^{(2)}} G_1^{(2)} \longrightarrow G_2^{(1)} \times_{\chi_2^{(1)} \times \chi_2^{(2)}} G_2^{(2)}$$

jedyne odwzorowanie R -liniowe indukowane przez parę $\{\psi^{(\alpha)} \circ \text{pr}_{G_1^{(\alpha)}}\}_{\alpha \in \{1, 2\}}$, o którego istnieniu przesądza stwierdzenie z punktu (i). Jeśli $\psi^{(1)}$ i $\psi^{(2)}$ są monomorfizmami, to θ także jest monomorfizmem. Jeśli ψ jest monomorfizmem, a $\psi^{(1)}$ i $\psi^{(2)}$ są epimorfizmami, to θ jest epimorfizmem.