

METODY ALGEBRY WYŻSZEJ W FIZYCE I W CZASACH ZARAŻY

2. WYKŁAD ZDALNY

1. PRZYDATNE ELEMENTY JĘZYKA TEORII KATEGORII

Przedmiotem naszych rozważań będą fizykalnie istotne struktury i konstrukcje formalne z pogranicza algebry i geometrii wyższej. Ich złożoność i mnogość wymaga wprowadzenia języka porządkującego i ułatwiającego nasze z nimi obcowanie. Język ten daje nam do dyspozycji teoria kategorii, nazwana pieszczotliwie „abstrakcyjnym nonsensem” przez jej pionierów: Samuela Eilenberga (wychowanek Warszawskiej Szkoły Matematycznej) i Saundersa Mac Lane’a. Pozwala on na naturalną i zwięzłą formalizację pojęcia „wyjątkowości”, która nie tylko współokreśla relacyjny/hierarchiczny status rozpatrywanych przez nas konstruktów, lecz także – i przede wszystkim – dostarcza nader wygodnych i wydajnych narzędzi ich badania.

Pojęcie elementarne wprowadza

Definicja 1. Kategorię $\mathcal{C}$ tworzą następujące klasy¹:

- **klasa obiektów** $\text{Ob } \mathcal{C}$,
- **klasa morfizmów** $\text{Mor } \mathcal{C}$, której elementy zwiemy **morfizmami**, przy czym dla dowolnych $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ klasę morfizmów z A do B oznaczamy symbolem $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$,

na których określone są następujące odwzorowania:

- **początek morfizmu** $s : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ob } \mathcal{C}$ i **koniec morfizmu** $t : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ob } \mathcal{C}$, przy czym

$$\forall_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}} \quad \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)} : (s, t)(f) = (A, B),$$

- **identyczność** $\text{id} : \text{Ob } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C} : A \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$,
- **złożenie morfizmów**

$$\circ_{\mathcal{C}} : \text{Mor } \mathcal{C}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{C} \equiv \{ (f, g) \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2} \mid s(f) = t(g) \} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}$$

$$: (f, g) \longmapsto f \circ_{\mathcal{C}} g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(s(g), t(f))$$

spełniające warunki:

$$\forall_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}} \quad \forall_{(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)} : (f \circ_{\mathcal{C}} \text{id}_A = f \quad \wedge \quad \text{id}_A \circ_{\mathcal{C}} g = g),$$

$$\forall_{(f, g, h) \in \text{Mor } \mathcal{C}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{C}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{C}} : (f \circ_{\mathcal{C}} g) \circ_{\mathcal{C}} h = f \circ_{\mathcal{C}} (g \circ_{\mathcal{C}} h).$$

Ileokroć klasa $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ jest zbiorem dla każdej pary $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **lokalnie małą**. Jeśli natomiast zarówno $\text{Ob } \mathcal{C}$, jak i $\text{Mor } \mathcal{C}$ są zbiorami, $\mathcal{C}$ określamy mianem **małej kategorii**. Mała kategoria, w której każdy morfizm jest odwracalny, nosi przydomek **grupoidu**. Kategorię, która nie jest mała, nazywamy **wielką**.

Podkategoria $\mathcal{S}$ kategorii $\mathcal{C}$ jest utworzona przez

- podklasę $\text{Ob } \mathcal{S}$ klasy obiektów $\text{Ob } \mathcal{C}$;
- podklasę $\text{Mor } \mathcal{S}$ klasy morfizmów $\text{Mor } \mathcal{C}$, przy czym dla dowolnych obiektów $A, B \in \text{Ob } \mathcal{S}$ klasę morfizmów z A do B w $\text{Mor } \mathcal{S}$ oznaczamy symbolem $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B)$,

które spełniają następujące warunki:

- $\forall_{A \in \text{Ob } \mathcal{S}} : \text{id}_A \in \text{Mor } \mathcal{S}$;

¹**Klasa** to wszystkie obiekty (np. zbiory) uwspólniające ustaloną cechę definiującą (np. ”bycie zbiorem”). Pojęcie to stanowi takie uogólnienie pojęcia zbioru, które pozwala mówić o mnogości obiektów określonego typu bez popadania w antynomię, jak to ma miejsce choćby w przypadku próby opisanie mnogości wszystkich zbiorów przy użyciu pojęcia zbioru (więc także obiektu definiowanej tym sposobem mnogości).

- $\forall_{f \in \text{Mor } \mathcal{S}} : s(f), t(f) \in \text{Ob } \mathcal{S}$;
- $\forall_{(f,g) \in \text{Mor } \mathcal{S} \times_t \text{Mor } \mathcal{S}} : f \circ_C g \in \text{Mor } \mathcal{S}$.

Tym samym $\mathcal{S}$ jest kategorią. Podkategorię $\mathcal{S}$ kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **pełną**, ilekroć dla dowolnych obiektów $A, B \in \text{Ob } \mathcal{S}$ zachodzi równość

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

W szczególności **podgrupoid** grupoidu $\mathcal{G}$ to dowolna jego podkategoria sama będąca grupoidem.

Przykłady 1. (Kategorie)

- (1) Zbiory wraz z odwzorowaniami między nimi (dla których złożeniem jest superpozycja odwzorowań) tworzą wielką kategorię **Set**.
- (2) Struktury algebraiczne określonego typu tworzą kategorie wraz z odpowiednimi homomorfizmami jako morfizmami. Mamy więc kategorie **Grp** (grupy), **AbGrp** (grup przemiennych), **Ring** (pierścieni), **AbRing** (pierścieni przemiennych), **Field** (ciał), **Mod_R** (lewych modułów nad pierścieniem R), **Mod_{R^{opp}}** (prawych modułów nad pierścieniem R), **Mod_(R₁, R₂^{opp})** ((R_1, R_2^{opp}) -bimodułów nad parą pierścieni (R_1, R_2)), **Vect_ℝ** (przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{K}$), **Vect_ℝ^(<∞)** (skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{K}$), **□Vect_ℝ** (przestrzeni kwadratowych nad ciałem $\mathbb{K}$), **Alg_R** (algebr nad pierścieniem przemiennym R), **uAlg_R** (unitalnych algebr nad pierścieniem przemiennym R), **AssAlg_R** (algebr przemiennych nad pierścieniem przemiennym R) *etc.*
- (3) Graf skierowany kanonicznie określa małą kategorię, której obiektami są wierzchołki grafu, morfizmami zaś – ścieżki w grafie (ich konkatenacja jest złożeniem morfizmów).
- (4) Grupa kanonicznie określa małą kategorię o jednoelementowym zbiorze obiektów (dowolny singleton) i zbiorze morfizmów tożsamym z grupą (w szczególności wszystkie morfizmy są odwracalne).
- (5) Dowolny zbiór S określa następujące trzy (małe) kategorie:
 - kategorię $\hat{S}$ (oznaczaną z oczywistych powodów tym samym symbolem co zbiór) o zbiorze obiektów $\text{Ob } \hat{S} := S \cup \{\bullet\}$ (jedynych niepustych) $\text{Hom}_{\hat{S}}(x, x) = \{x \rightarrow x\}$, $x \in S$ – kategorię tę nazwiemy **kategorią zbioru** S ;
 - kategorię $\hat{\tilde{S}}$ o zbiorze obiektów $\text{Ob } \hat{\tilde{S}} := S \cup \{\bullet\}$, w którym singleton $\{\bullet\}$ jest jedynym obiektem inicjalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\text{Hom}_{\hat{\tilde{S}}}(\bullet, s) = \{\bullet \rightarrow s\}$, $s \in S$ i $\text{Hom}_{\hat{\tilde{S}}}(x, x) = \{x \rightarrow x\}$, $x \in S \cup \{\bullet\}$ – kategorię tę nazwiemy **rozpięciem** S ;
 - kategorię $\check{\tilde{S}}$ o zbiorze obiektów $\text{Ob } \check{\tilde{S}} := S \cup \{\bullet\}$, w którym singleton $\{\bullet\}$ jest jedynym obiektem terminalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\text{Hom}_{\check{\tilde{S}}}(s, \bullet) = \{s \rightarrow \bullet\}$, $s \in S$ i $\text{Hom}_{\check{\tilde{S}}}(x, x) = \{x \rightarrow x\}$, $x \in S \cup \{\bullet\}$ – kategorię tę nazwiemy **korozpięciem** S .

Powyżej morfizmy są dowolnymi singletonami, które dla przejrzystości oznaczyliśmy symbolami ich początku i końca. Obie kategorie występują jako modele diagramów używanych w konstrukcjach uniwersalnych.

Podobnie jak w przypadku innych struktur algebraicznych, możliwa jest realizacja jednych kategorii w drugich. Stosowne pojęcie daje nam do ręki

Definicja 2. **Funktor kowariantny** z kategorii $\mathcal{C}_1$ w kategorię $\mathcal{C}_2$ to odwzorowanie o składowych, zwyczajowo oznaczanych tym samym symbolem,

- obiektowej $F : \text{Ob } \mathcal{C}_1 \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}_2$,
- morfizmowej $F : \text{Mor } \mathcal{C}_1 \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2$,

które spełniają następujące warunki:

- $s \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ s$ oraz $t \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ t$, czyli

$$\forall_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)} : F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B)),$$
- $\text{id} \circ F \upharpoonright_{\text{Ob } \mathcal{C}_1} = F \circ \text{id}$, czyli

$$\forall_{A \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} : F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)},$$

- $\circ_{\mathcal{C}} \circ (F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} \times F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}}$, czyli

$$\forall_{(f,g) \in \text{Mor } \mathcal{C}_1 \times_t \text{Mor } \mathcal{C}_1} : F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(f) \circ_{\mathcal{C}_2} F(g).$$

W kontekście konstrukcji uniwersalnych funktorów $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ określamy często mianem **diagramu w kategorii $\mathcal{C}_2$ modelowanego na kategorii $\mathcal{C}_1$** . W szczególności **morfizm grupoidów** pomiędzy dwoma grupoidami $\mathcal{G}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to funktor kowariantny między odpowiednimi kategoriami.

Funktor kontrawariantny z kategorii $\mathcal{C}_1$ w kategorię $\mathcal{C}_2$ to odwzorowanie o składowych, oznaczanych jak wyżej,

- obiektowej $F : \text{Ob } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Ob } \mathcal{C}_2$,
- morfizmowej $F : \text{Mor } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2$,

które spełniają następujące warunki:

- $s \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ t$ oraz $t \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ s$, czyli

$$\forall_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)} : F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(B), F(A)),$$

- $\text{id} \circ F \upharpoonright_{\text{Ob } \mathcal{C}_1} = F \circ \text{id}$, czyli

$$\forall_{A \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} : F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)},$$

- $\circ_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ (F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} \times F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}}$, gdzie τ jest transpozycją, czyli

$$\forall_{(f,g) \in \text{Mor } \mathcal{C}_1 \times_t \text{Mor } \mathcal{C}_1} : F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(g) \circ_{\mathcal{C}_2} F(f).$$

Funktor $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ nazywamy

- **istotnie surjektywnym** (lub **gęstym**) jeśli każdy obiekt kategorii $\mathcal{C}_2$ jest izomorficzny z pewnym obiektem w obrazie funktora F , tj. jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}_2} \exists_{A \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \exists_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(X, F(A))} : (f(X) = F(A)$$

$$\wedge \exists_{f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), X)} : (f^{-1} \circ_{\mathcal{C}_2} f = \text{id}_X \wedge f \circ_{\mathcal{C}_2} f^{-1} = \text{id}_{F(A)}));$$

- **pełnym**, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B))} \exists_{g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)} : f = F(g)$$

(w przypadku funktora kowariantnego) albo warunek

$$\forall_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B))} \exists_{g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(B, A)} : f = F(g)$$

(w przypadku funktora kontrawariantnego);

- **wiernym**, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}_1} \forall_{f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)} : (F(f) = F(g) \iff f = g);$$

- **w pełni wiernym**, jeśli jest pełny i wierny.

Superpozycja funktorów to zwykła superpozycja ich składowych: obiektowej i morfizmowej, którą oznaczamy standardowym symbolem $\circ$, tj. dla pary funktorów $F_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \mathcal{C}_{\alpha+1}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ między kategoriami $\mathcal{C}_\beta$, $\beta \in \{1, 2, 3\}$ zapisujemy

$$F_2 \circ F_1 : \mathcal{C}_1 \xrightarrow{F_1} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{F_2} \mathcal{C}_3.$$

Przykłady 2. (Funktory)

- (1) **Funktor identycznościowy** $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \curvearrowright$ o składowej obiektowej $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Ob } \mathcal{C} \curvearrowright : A \mapsto A$ i morfizmowej $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Mor } \mathcal{C} \curvearrowright : f \mapsto f$.
- (2) **Funktor stały** $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, zwany też **stałą**, określony przez obiekt $X \in \text{Ob } \mathcal{D}$, o składowej obiektowej $X : \text{Ob } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ob } \mathcal{D} : A \mapsto X$ i morfizmowej $X : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{D} : f \mapsto \text{id}_X$.
- (3) Reprezentacja $R : G \longrightarrow \text{GL}(V; \mathbb{K})$ grupy $G \in \text{Ob } \mathbf{Grp}$ na przestrzeni wektorowej $V \in \text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ nad ciałem $\mathbb{K}$ określa funktor kowariantny w rozumieniu Przykł. 1 (3), patrz: App. ??.

- (4) Dualność modułów nad pierścieniem przemennym R określa (endo)funktory kontrawariantny $*$: $\mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ o składowej obiektowej $*$: $\text{Ob } \mathbf{Mod}_R \rightarrow \text{Ob } \mathbf{Mod}_R : G \mapsto G^*$ i morfizmowej $*$: $\text{Mor } \mathbf{Mod}_R \rightarrow \text{Mor } \mathbf{Mod}_R : \chi \mapsto \chi^*$, gdzie dla dowolnego $\chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2)$ jest $\chi^* : G_2^* \rightarrow G_1^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \chi$.
- (5) Konstrukcja zbioru potęgowego określa (endo)funktory kowariantny $2^{\cdot}$: $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ o składowej obiektowej $2^{\cdot}$: $\text{Ob } \mathbf{Set} \rightarrow \text{Ob } \mathbf{Set} : X \mapsto 2^X$ i morfizmowej $2^{\cdot}$: $\text{Mor } \mathbf{Set} \rightarrow \text{Mor } \mathbf{Set} : (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (2^X \ni O \mapsto f(O) \in 2^Y)$.

Naturalne narzędzie porównania realizacji wprowadzamy w

Definicja 3. Transformacja naturalna między funktorami kowariantnymi $F_1, F_2 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ to rodzina morfizmów $\eta : \text{Ob } \mathcal{C}_1 \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2 : A \mapsto \eta_A$ o własności wyrażonej przez diagramy przemienne

$$(1) \quad \forall_{\substack{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}_1 \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)}} : \quad \begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ F_2(A) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(B) \end{array} .$$

Transformację naturalną będziemy (najczęściej) zapisywać symbolicznie w postaci

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}_2 \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ & F_2 & \end{array}$$

Jeśli wszystkie morfizmy tworzące rodzinę η są izomorfizmami, transformację naturalną określamy mianem **izomorfizmu naturalnego**. Jedyna różnica w definicji transformacji naturalnej w przypadku funktorów kontrawariantnych polega na tym, że rodzina morfizmów w kategorii-przeciwdziedzinie indeksowanych przez morfizmy z kategorii-dziedziny spełnia warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$(2) \quad \forall_{\substack{A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}_1 \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)}} : \quad \begin{array}{ccc} F_1(A) & \xleftarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ F_2(A) & \xleftarrow{F_2(f)} & F_2(B) \end{array} .$$

Przykłady 3. (Transformacje naturalne)

- (1) Rodzina izomorfizmów grup $\text{Inv} : \text{Ob } \mathbf{Grp} \rightarrow \text{Mor } \mathbf{Grp} : G \mapsto \text{Inv}_G$, z których każdy traktujemy jako odwzorowanie z (odnośnej) grupy G w grupę do niej przeciwną, G^{opp} , określa izomorfizm naturalny między funktorem identycznościowym na kategorii $\mathbf{Grp}$ a funktorem „brania przeciwności”, który dowolnej grupie przyporządkowuje grupę do niej przeciwną i każdemu homomorfizmowi grup – *tenże* homomorfizm.
- (2) Rodzina monomorfizmów przestrzeni wektorowych (nad ustalonym ciałem $\mathbb{K}$) $\text{ev}^{\cdot} : \text{Ob } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} : V \mapsto \text{ev}_V^V$, z których każdy przyporządkowuje (odnośnej) przestrzeni wektorowej V odwzorowanie ($\mathbb{K}$ -liniowe) ewaluacji $\text{ev}_V^V : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto \text{ev}_v^V$ określone wzorem $\text{ev}_v^V : V^* \rightarrow \mathbb{K} : \varphi \mapsto \varphi(v)$, określa transformację naturalną między funktorem identycznościowym na kategorii $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ a funktorem bidualizacji, który dowolnej przestrzeni przyporządkowuje bidualną do niej i każdemu odwzorowaniu $\mathbb{K}$ -liniowemu – odwzorowanie bidualne.

Uwaga 1. Funktory kowariantne (wzgl. kontrawariantne) $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ między dwiema ustalonymi (dowolnie) kategoriami tworzą kategorię, której morfizmami są transformacje naturalne. Oznaczamy ją symbolami

$$\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1^{(\text{op})}} \equiv [\mathcal{C}_1^{(\text{op})}, \mathcal{C}_2] \equiv \mathbf{Fun}(\mathcal{C}_1^{(\text{op})}, \mathcal{C}_2)$$

i nazywamy **kategorią funktorów kowariantnych** (wzgl. **kontrawariantnych**) z $\mathcal{C}_1$ do $\mathcal{C}_2$ lub – we wspomnianym wcześniej kontekście – **kategorią diagramów w $\mathcal{C}_2$ modelowanych na $\mathcal{C}_1^{(\text{op})}$** .

W szczególności gdy $\mathcal{C}_2 \equiv \mathbf{Set}$, kategorię

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}_1^{\text{op}}} \equiv [\mathcal{C}_1^{\text{op}}, \mathbf{Set}] \equiv \mathbf{Fun}(\mathcal{C}_1^{\text{op}}, \mathbf{Set})$$

określamy mianem **kategorii presnopów na $\mathcal{C}_1$** i oznaczamy symbolem

$$\mathbf{PreSh}(\mathcal{C}_1) \equiv \mathbf{Fun}(\mathcal{C}_1^{\text{op}}, \mathbf{Set}).$$

Jej obiekty nazywamy **presnopami na $\mathcal{C}_1$** .

W przypadku, gdy $\mathcal{C}_1 = S$ jest kategorią pewnego zbioru $S \in \text{Ob}(\mathbf{Set})$ z Przykł. (1.5), odnośną kategorię $\mathcal{C}^S$ określamy mianem **kategorii ciągów (uogólnionych) w $\mathcal{C}$ indeksowanych przez S** . Kategorię $\mathcal{C}$ zanurzamy w $\mathcal{C}^\Lambda$ przy użyciu funktora kowariantnego (ciągi stałe) $\Delta_{\mathcal{C};\Lambda} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\Lambda$ o składowych: obiektowej

$$\Delta_{\mathcal{C};\Lambda} : \text{Ob } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ob } \mathcal{C}^\Lambda : X \longmapsto (\Lambda \longrightarrow \text{Ob } \mathcal{C} : \lambda \longmapsto X)$$

i morfizmowej

$$\Delta_{\mathcal{C};\Lambda} : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda : \xi \longmapsto (\Lambda \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C} : \lambda \longmapsto \xi).$$

Fundamentalna i zarazem naturalna rola tej kategorii jest eksponowana przez Lemat Yonedy, będący kategoryfikacją Twierdzenia Cayleya, o czym więcej można przeczytać w dodatku pt. „W 8 stron od teorii grup do teorii kategorii” do niniejszego wykładu.

Znaczenie transformacji naturalnych w badaniu relacji między kategoriami, nierzadko służącym pogłębieniu naszego ich zrozumienia, eksponuje

Definicja 4. Równoważność kategorii $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ to para funktorów

$$F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2, \quad G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$$

wraz z parą izomorfizmów naturalnych

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{G \circ F} \\ \cong \downarrow \tilde{\eta} \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}_1}} \end{array} & \mathcal{C}_1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{F \circ G} \\ \cong \downarrow \tilde{\eta} \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}_2}} \end{array} & \mathcal{C}_2 \end{array}.$$

Kategorie, dla których istnieje równoważność, określamy mianem (**wzajem**) **równoważnych**.

Mamy proste a istotne

Stwierdzenie 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równoważności dwóch kategorii jest istnienie pomiędzy nimi funktora istotnie surjektywnego i w pełni wiernego.

Dowód: Oczywiście. □

Do precyzyjnego sformułowania pojęcia uniwersalności będziemy jeszcze potrzebować

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 1. Obiekt T kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **końcowym** (albo **terminalnym**), jeżeli dla każdego $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$. Analogicznie, obiekt I kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **początkowym** (albo **inicialnym**), jeżeli dla każdego $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$. Obiekt kategorii będący zarazem końcowym i początkowym nosi miano **zerowego**.

Przykłady 4. (Obiekty końcowe i początkowe)

- (1) W kategorii **Set** z Przykł. 1 (1) obiektem końcowym jest (dowolny) singleton, początkowym zaś (jedynym) – zbiór pusty. Nie ma w niej obiektów zerowych.
- (2) W kategoriach **Grp**, **AbGrp** i pochodnych **Mod_R**, **Vect_ℝ** z Przykł. 1 (2) obiektem zerowym jest (dowolna) struktura trywialna.
- (3) W kategorii **AbRing** z Przykł. 1 (2) obiektem końcowym jest pierścień trywialny, początkowym zaś – pierścień $\mathbb{Z}$.
- (4) Kategoria **Field** nie zawiera obiektów końcowych ani początkowych.

O wyjątkowości obiektów terminalnych i inicjalnych przesądza

Twierdzenie 1 (O jednoznaczności obiektów terminalnych i inicjalnych). Przyjmijmy notację Def. 5. Niechaj T_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwoma obiektami terminalnymi w kategorii $\mathcal{C}$ i niech I_β , $\beta \in \{1, 2\}$ będą dwoma obiektami inicjalnymi w tejże kategorii. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii $\mathcal{C}$)

$$\tau_{1,2} : T_1 \xrightarrow{\cong} T_2, \quad \iota_{1,2} : I_1 \xrightarrow{\cong} I_2.$$

Dowód: Rozważmy parę T_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ obiektów terminalnych w $\mathcal{C}$. Terminalność T_1 implikuje istnienie dokładnie jednego morfizmu $\tau_{2,1} : T_2 \rightarrow T_1$, a terminalność T_2 – dokładnie jednego morfizmu $\tau_{1,2} : T_1 \rightarrow T_2$. Ich złożenie $\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2}$ jest endomorfizmem T_1 , ale endomorfizmem takim jest też id_{T_1} , co wobec terminalności T_1 oznacza, że koniecznie

$$\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2} = \text{id}_{T_1}.$$

Podobnie dowodzimy równości

$$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,1} = \text{id}_{T_2},$$

która w połączeniu z poprzednią przesądza o izomorficznym charakterze $\tau_{1,2}$. W przypadku obiektów inicjalnych I_β , $\beta \in \{1, 2\}$ rozumowanie przebiega w pełni analogicznie. $\square$

2. UNIWERSALNOŚĆ

Pojęcia wprowadzone w poprzednim rozdziale pozwalają poddać stosownej formalizacji koncepcję „wyjątkowości”, co czynimy w poniższej

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 5. Niechaj $\mathcal{C}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ będą kategoriami i niech $F_\beta : \mathcal{C}_\beta \rightarrow \mathcal{C}_3$, $\beta \in \{1, 2\}$ będą funktorami kowariantnymi, X zaś – (dowolnym) obiektem kategorii $\mathcal{C}_1$. Wreszcie też niech $P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi)$ będzie pewnym zdaniem logicznym określającym własność $\varphi \in \text{Mor } \mathcal{C}_3$ w odwołaniu do struktury $(X; F_1, F_2)$ oraz $Y \in \text{Ob } \mathcal{C}_2$, dla którego jest dobrze określona kategoria $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$ o klasie obiektów

$$\begin{aligned} \text{Ob } \mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}] &:= \{ (Y, \varphi) \in \text{Ob } \mathcal{C}_2 \times \text{Mor } \mathcal{C}_3 \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(F_2(Y), F_1(X)) \\ &\quad \wedge P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi) \} \end{aligned}$$

i zbiorach morfizmów²

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]}((Y_1, \varphi_1), (Y_2, \varphi_2)) := \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Y_1, Y_2) \mid \varphi_2 \circ F_2(\chi) = \varphi_1 \},$$

ze złożeniem dziedziczonym z $\mathcal{C}_2$, lub kategoria $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$ o klasie obiektów

$$\begin{aligned} \text{Ob } \mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}] &:= \{ (Y, \varphi) \in \text{Ob } \mathcal{C}_2 \times \text{Mor } \mathcal{C}_3 \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(F_1(X), F_2(Y)) \\ &\quad \wedge P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi) \} \end{aligned}$$

²Obecność identyczności (na dowolnym obiekcie $\mathcal{C}_2$) w klasie morfizmów, jak również możliwość składania morfizmów są zagwarantowane przez funktorialność F_2 .

i zbiorach morfizmów

$$\text{Hom}_{\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]}((Y_1, \varphi_1), (Y_2, \varphi_2)) := \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Y_1, Y_2) \mid F_2(\chi) \circ \varphi_1 = \varphi_2 \},$$

ze złożeniem dziedziczonym z $\mathcal{C}_2$.

Struktura końcowa (lub **terminalna**) dla $P_{X;F_1,F_2}$ to obiekt końcowy (T, τ) w kategorii $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$. Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością końcową** (lub **terminalną**), opisuje diagram przemienny

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} & & F_2(Y) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (Y, \varphi) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow F_2(\Psi) & & \downarrow \Psi \\ X & \xrightarrow{F_1} & F_1(X) & \xleftarrow{\tau} & F_2(T) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (T, \tau) \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}] \end{array},$$

w którym (Y, φ) jest dowolnym obiektem w kategorii $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$, a przerywana cięciwa strzałki symbolizuje „istnienie i jedyność” odpowiedniego morfizmu.

Struktura początkowa (lub **inicjalna**) dla $P_{X;F_1,F_2}$ to obiekt początkowy (I, ι) w kategorii $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$. Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością początkową** (lub **inicjalną**), opisuje diagram przemienny

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} & & F_2(Y) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (Y, \varphi) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow F_2(\Phi) & & \downarrow \Phi \\ X & \xrightarrow{F_1} & F_1(X) & \xrightarrow{\iota} & F_2(I) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (I, \iota) \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}] \end{array}$$

w którym (Y, φ) jest dowolnym obiektem w kategorii $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$.

Struktury terminalne i inicjalne noszą wspólne miano **struktur uniwersalnych**.

Sens uniwersalności łatwo wysłowić w języku potocznym: oto dowolne odwzorowanie transportujące strukturę rodzaju $\mathcal{C}_3$ z $F_1(X)$ (wzgl. do $F_1(X)$), a przy tym spełniające warunek $P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi)$, jest przeprowadzane, za pośrednictwem F_2 -obrazu jedynego homomorfizmu indukowanego, przez F_2 -obraz (obiektovej składowej) struktury inicjalnej (wzgl. terminalnej). Na pytanie o istnienie struktur uniwersalnych nie ma uniwersalnej odpowiedzi – tej trzeba każdorazowo poszukiwać w interesującym nas kontekście (np. algebraicznym). Można natomiast bardzo konkretnie skwantyfikować swobodę ich wyboru (będącą miarą ich jednoznaczności, więc wyjątkowości właśnie), co czyni poniższe

Twierdzenie 2 (O jednoznaczności struktur uniwersalnych). Przyjmijmy notację Def. 6. Niechaj (T_α, τ_α) , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema strukturami terminalnymi dla $P_{X;F_1,F_2}$ i niech (I_β, ι_β) , $\beta \in \{1, 2\}$ będą dwiema strukturami inicjalnymi dla $P_{X;F_1,F_2}$. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii $\mathcal{C}_2$)

$$\tau_{1,2} : T_1 \xrightarrow{\cong} T_2, \quad \iota_{1,2} : I_1 \xrightarrow{\cong} I_2.$$

Dowód: Natychmiastowa konsekwencja Def. 6 i Tw. 1. □

Praktyczny sens udowodnionego twierdzenia jest oczywisty: każde dwie struktury uniwersalne możemy utożsamić, i to w jednoznaczny sposób, za pośrednictwem stosownego izomorfizmu $\tau_{1,2}$ (wzgl. $\iota_{1,2}$).

Ażeby oswoić Czytelnika z pozornie dość ezoteryczną konstrukcją z Def. 6, rozważymy obecnie kilka konkretnych jej instancjacji, z którymi miał On najpewniej okazję zetknąć się w dotychczasowych swoich matematycznych i fizykalnych peregrinacjach.

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Def. 1 i 6 oraz Przykł. 1 (5) i ustalmy zbiór Λ oraz kategorię $\mathcal{C}$, z którymi stowarzyszymy kategorię $\mathcal{C}^\Lambda$ ciągów uogólnionych w $\mathcal{C}$ indeksowanych przez Λ , zawierającą funktorialny obraz $\mathcal{C}$ w postaci ciągów stałych.

Produkt rodziny $X_\bullet \in \text{Ob } \mathcal{C}^\Lambda$ to struktura terminalna

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla warunku tautologicznego $P_{X_\bullet; \text{id}_{\mathcal{C}^\Lambda}, \Delta_{\mathcal{C}; \Lambda}} \equiv 1$ na $\text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$. Morfizm π_λ określamy przy tym mianem **rzutu kanonicznego na (składową)** X_λ . Kategorię, w której istnieją produkty, określamy mianem **kategorii z produktami**. Przy tym ilekroć $|\Lambda| < \infty$, będziemy wymiennie używać symboli $\prod$ i $\times$.

Koprodukt rodziny $X_\bullet \in \text{Ob } \mathcal{C}^\Lambda$ to struktura inicjalna

$$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \{j_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla tautologicznego warunku $P_{X_\bullet; \text{id}_{\mathcal{C}^\Lambda}, \Delta_{\mathcal{C}; \Lambda}} \equiv 1$ na $\text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$. Morfizm j_λ określamy przy tym mianem **włożenia kanonicznego (składowej)** X_λ . Kategorię, w której istnieją koprodukty, określamy mianem **kategorii z koproduktami**.

Koprodukt w kategoriach $\mathcal{C} \in \{\mathbf{AbGrp}, \mathbf{AbRing}, \mathbf{Mod}_R, \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}\}$ i $\mathbf{Alg}_R$ (dla pierścienia R i ciała $\mathbb{K}$) jest najczęściej określamy mianem **sumy prostej** i oznaczany symbolem $\coprod \equiv \oplus$.

Wprost z definicji wynika naturalne rozszerzenie konstrukcji produktu i koproduktu na klasy morfizmów kategorii $\mathcal{C}$ – obserwację tę precyzujemy poniżej.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^\alpha, \{\pi_\lambda^\alpha\}_{\lambda \in \Lambda} \right), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

będą dwoma produktami odnośnych rodzin $X_\bullet^\alpha$. Dla dowolnej rodziny morfizmów $\chi_\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X_\bullet^1, X_\bullet^2)$ istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1, \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2\right),$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1 & \xrightarrow{\pi_\rho^1} & X_\rho^1 \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \downarrow & & \downarrow \chi_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2 & \xrightarrow{\pi_\rho^2} & X_\rho^2 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **produktu rodziny morfizmów** $\chi_\bullet \in \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$.

Jeśli ponadto dany jest trzeci produkt

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^3, \{\pi_\lambda^3\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

oraz rodzina morfizmów $\tilde{\chi}_\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X_\bullet^2, X_\bullet^3)$, to dla zdefiniowanego przez nią produktu morfizmów $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda$ oraz dla $\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$ zachodzi tożsamość

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda \right) \circ \left(\prod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda).$$

Dowód: Teza jest prostą konsekwencją terminalnej natury produktu $(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^2, \{\pi_\lambda^2\}_{\lambda \in \Lambda})$ i jako taka jest pozostawiona Czytelnikowi jako proste zadanie do samodzielnego wykonania. $\square$

Ostatnie stwierdzenie naturalnie uzupełnia

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj

$$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^\alpha, \{j_\lambda^\alpha\}_{\lambda \in \Lambda} \right), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

będą dwoma koproductami odnośnych rodzin X^α . Dla dowolnej rodziny morfizmów $\chi_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X_\lambda^1, X_\lambda^2)$ istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\coprod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1, \coprod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2\right),$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1 & \xleftarrow{j_\rho^1} & X_\rho^1 \\ \downarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda & & \downarrow \chi_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2 & \xleftarrow{j_\rho^2} & X_\rho^2 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **koproductu rodziny morfizmów** $\chi_\lambda \in \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$.

Jeśli ponadto dany jest trzeci koproduct

$$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^3, \{j_\lambda^3\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

oraz rodzina morfizmów $\tilde{\chi}_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X_\lambda^2, X_\lambda^3)$, to dla zdefiniowanego przez nią koproductu morfizmów $\coprod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda$ oraz dla $\coprod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$ zachodzi tożsamość

$$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda \right) \circ \left(\coprod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \right) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda).$$

Dowód: W pełni analogiczny do poprzedniego. $\square$

Ilustracji wprowadzonych dotychczas pojęć i konstrukcji abstrakcyjnych dostarcza poniższy przykład, którego dokładne zrozumienie w części początkowej dotyczącej produktu stanowi podstawę szczegółowych rozważań poświęconych obiektom uniwersalnym w kategorii modułów nad pierścieniem.

Przykłady 5. Rozważmy strukturę algebraiczną rodzaju trywialnego (tj. „pustego”), której nośnikiem są zbiory bez jakichkolwiek wyróżnionych operacji wieloargumentowych i dla której homomorfizmami są dowolne odwzorowania między zbiorami. W tym szczególnym przypadku produktem zbiorów z rodziny indeksowanej $S \in \text{Ob } \text{Set}^\Lambda$ jest **produkt kartezjański** [KM76, Rozdz. IV § 6]

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \left\{ f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda : f(\lambda) \in S_\lambda \right\}$$

wraz z rodziną $\{\varpi_\lambda := \text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ rzutów kanonicznych na składowe S_λ ,

$$\text{pr}_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \longrightarrow S_\mu : f \longmapsto f(\mu).$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku skończonego zbioru indeksów $\Lambda \equiv \overline{1, n}$ produkt kartezjański sprowadza się do standardowego iloczynu kartezjańskiego³ i zapisuje w postaci

$$\times_{k=1}^n S_k = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall_{k \in \overline{1, n}} : x_k \in S_k \right\},$$

³Por. uwagi pod definicją w traktacie Kuratowskiego i Mostowskiego, jak również Konw. ??.

przy czym

$$\text{pr}_l : \times_{k=1}^n S_k \longrightarrow S_l : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_l.$$

Dla dowolnej rodziny odwzorowań

$$\{f_\lambda : X \longrightarrow S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\Phi : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

o własności (3), a mianowicie

$$x \mapsto \Phi(x), \quad \Phi(x)(\lambda) := f_\lambda(x).$$

Koproduktem jest tutaj natomiast **suma rozłączna**⁴

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \{ (x, \lambda) \mid x \in S_\lambda \wedge \lambda \in \Lambda \}$$

wraz z iniekcjami (włączeniami) kanonicznymi

$$j_\mu : S_\mu \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda : x \mapsto (x, \mu).$$

Z dowolną rodziną odwzorowań

$$\{g_\lambda : S_\lambda \longrightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$$

stowarzyszamy jedyne odwzorowanie

$$\Psi : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \longrightarrow Y$$

o własności (4), a mianowicie

$$(x, \lambda) \mapsto \Psi(x, \lambda) := g_\lambda(x).$$

Zwieńczeniem obecnej dyskusji jest szczegółowe *wyprowadzenie* postaci produktu i koprodktu w kategorii modułów nad pierścieniem przemiennym R .

Definicja 8. Przyjmijmy zapis Def. 7 oraz Przykł. 5. Niechaj $G. \in \text{Ob } \mathbf{Mod}_R^\Lambda$ będzie rodziną modułów nad pierścieniem R . **Produkt modułów z rodziny G .** to para

$$(\mathcal{M}^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\square := \left(\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right), \ell^\square \right),$$

w której $\phi_n^\square$, $n \in \{0, 1, 2\}$ to *kanonicznie indukowane* operacje grupowe, $\ell^\square$ zaś to *kanonicznie indukowane* działanie R na produkcie kartezjańskim $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, które czynią z $(\mathcal{M}^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ produkt rodziny G w rozumieniu Def. 7.

Poświęćmy obecnie trochę czasu na bezpośrednie uzasadnienie i wyjaśnienie powyższej definicji w odwołaniu do wcześniejszej definicji produktu jako morfizmu terminalnego. Oto więc rozważamy zbiór $G^\square := \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ z rzutami kanonicznymi $\text{pr}_\lambda : G^\square \longrightarrow G_\lambda$. Dodawania grupowe⁵

$$+_\lambda := \phi_2^{(\lambda)} : G_\lambda \times G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

zadają – dla dowolnego indeksu $\lambda \in \Lambda$ – odwzorowania

$$\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) : G^\square \times G^\square \longrightarrow G_\lambda,$$

co wobec terminalności pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$, w której $G^\square$ traktowane jest jako struktura trywialna (czyli obiekt **Set**), oznacza istnienie jedynego odwzorowania (*a priori* bez dodatkowych własności względem operacji grupowych i działań określonych dla poszczególnych składowych rodziny)

$$\phi_2^\square : G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

⁴N.B. Ilekroć $x \in S_\lambda \cap S_\mu$, $\lambda \neq \mu$, wówczas $(x, \lambda) \neq (x, \mu)$.

⁵Opisywana konstrukcja produktu po opuszczeniu działań składowych $\ell^{(\lambda)}$ stosuje się także do grup nieprzemiennych.

o własności

$$(5) \quad \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) .$$

Zauważmy, że jeśli tylko $\phi_2^\square$ jest poprawnie określonym dodawaniem na $G^\square$ a rzuty pr_λ są homomorfizmami grup transportującymi owo dodawanie w dodawanie w poszczególnych składowych G_λ , czego mozolnie dowodzimy poniżej, to tożsamość (5) identyfikuje operację $\phi_2^\square$ jako „dodawanie po współrzędnych”. Łatwo przy tym stwierdzamy, że homomorficzność rzutów wynika bezpośrednio z założenia, że $\phi_2^\square =: +_\square$ jest pożądaną operacją grupową, oto bowiem (5) implikuje równość

$$\text{pr}_\lambda(g +_\square h) = \text{pr}_\lambda(g) +_\lambda \text{pr}_\lambda(h) ,$$

słuszną dla dowolnych dwóch elementów $g, h \in G^\square$ a oznaczającą właśnie, że pr_λ są homomorfizmami grup. Wystarczy zatem sprawdzić definiujące własności dodawania grupowego w odniesieniu do odwzorowania $\phi_2^\square$. W pierwszej kolejności zbadamy jego łączność. Biorąc dowolne $g, h, k \in G^\square$, obliczamy – wykorzystując po drodze (przy przejściu z linii 2. do linii 3.) łączność operacji $\phi_2^{(\lambda)}$ –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(\phi_2^\square(g, h), k) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(\phi_2^\square(g, h), k) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, h), \text{pr}_\lambda(k)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, h), \text{pr}_\lambda(k)\right) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(h)), \text{pr}_\lambda(k)\right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}\left(\text{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(h), \text{pr}_\lambda(k))\right) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\text{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(h, k)\right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(h, k)) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, \phi_2^\square(h, k)) \\ &= \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, \phi_2^\square(h, k)) . \end{aligned}$$

Tym sposobem otrzymujemy dwa odwzorowania

$$G^\square \times G^\square \times G^\square \xrightarrow[\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)]{\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda ,$$

których obrazy pokrywają się, dając odwzorowanie $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$. Raz jeszcze przywołując terminalność pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$, wnioskujemy, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie

$$\alpha^\square : G^\square \times G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

przez nie indukowane, które spełnia tożsamość

$$\text{pr}_\lambda \circ \alpha^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) ,$$

a ponieważ zarówno $\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})$, jak i $\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)$ spełniają ten warunek, przeto koniecznie

$$\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \alpha^\square = \phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square) ,$$

co dowodzi łączności $\phi_2^\square$.

Analogicznie wykazujemy przemienność $\phi_2^\square$, korzystając z przemienności $\phi_2^{(\lambda)}$. Oto bowiem, dla dowolnych $g, h \in G^\square$,

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ (\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}(g, h)) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(h, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(h), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(h)) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, h) \end{aligned}$$

$$= \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, h),$$

skąd równość odwzorowań

$$G^\square \times G^\square \xrightarrow[\phi_2^\square]{\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

tożsamy z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$, czyli wobec jednoznaczności określenia indukowanego przezeń odwzorowania

$$\beta^\square : G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \beta^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$$

mamy pożądaną identyczność

$$\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square} = \beta^\square = \phi_2^\square.$$

Następnie rozważamy elementy neutralne w każdej z grup składowych,

$$\phi_0^{(\lambda)} : \{\bullet\} \longrightarrow G_\lambda : \bullet \mapsto e_\lambda,$$

i zapominając jak uprzednio o strukturze algebraicznej na rozważanych zbiorach, stowarzyszymy z nimi jedyne odwzorowanie

$$\phi_0^\square : \{\bullet\} \longrightarrow G^\square : \bullet \mapsto e^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square = \phi_0^{(\lambda)}.$$

W ten sposób wyróżniamy element $e^\square$ zbioru $G^\square$, o sugestywnej postaci uogólnionego ciągu (o indeksach z Λ) elementów neutralnych z grup składowych. Jego własności względem dodawania $\phi_2^\square$ sprawdzamy w bezpośrednim rachunku. Biorąc dowolny element $g \in G^\square$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(e^\square, g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(e^\square, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\phi_0^{(\lambda)}(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(e_\lambda, \text{pr}_\lambda(g)) = \text{pr}_\lambda(g) \\ &\equiv \text{pr}_\lambda \circ \text{pr}_2(e^\square, g), \end{aligned}$$

stąd zaś równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\square \xrightarrow[\text{pr}_2]{\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square})} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

pokrywających się z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda)$. Znowu więc znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\varepsilon^\square : \{\bullet\} \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

spełniające warunek

$$\text{pr}_\lambda \circ \varepsilon^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda),$$

a zatem

$$\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \varepsilon^\square = \text{pr}_2.$$

Podobnie dowodzimy tożsamości

$$\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_0^\square) = \text{pr}_1,$$

co w sumie pokazuje dowodnie, że $e^\square$ jest elementem neutralnym dodawania $\phi_2^\square$.

Bez trudu rekonstruujemy też operację brania przeciwności w $G^\square$, biorąc za punkt wyjścia odnośne operacje w składowych

$$\phi_1^{(\lambda)} : G_\lambda \longrightarrow G_\lambda.$$

Rozumując jak wcześniej, tworzymy rodzinę odwzorowań

$$\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda : G^\square \longrightarrow G_\lambda ,$$

z którymi możemy związać jedyne odwzorowanie

$$\phi_1^\square : G^\square \curvearrowright$$

o w sno ci

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square = \phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda ,$$

kt ra identyfikuje $\phi_1^\square$ jako „branie przeciwno ci po wsp łr dnych”. Trzeba jeszcze tylko upewni  si ,  e odwzorowanie to nadaje monoidowi przemiennemu $(G^\square, \phi_2^\square, \phi_0^\square)$ struktur  grupy przemiennej. Z rachunku

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square (\phi_1^\square(g), g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) (\phi_1^\square(g), g) \equiv \phi_2^{(\lambda)} (\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square(g), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \left(\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(g) \right) = e^{(\lambda)} = \phi_0^{(\lambda)}(\bullet) = \text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet) , \end{aligned}$$

wykonanego dla dowolnego $g \in G^\square$ a wskazuj cego na r wnno  odwzorowa 

$$\{\bullet\} \times G^\square \xrightarrow[\phi_0^\square \circ \text{pr}_1]{\phi_2^\square \circ (\phi_1^\square, \text{id}_{G^\square}) \circ \text{pr}_2} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda ,$$

identycznych z $\phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1$, wywodzimy wniosek o istnieniu jedyne odwzorowania

$$\mu^\square : \{\bullet\} \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o w sno ci

$$\text{pr}_\lambda \circ \mu^\square = \phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1 .$$

Ostatecznie wi c stwierdzamy s uszno  to samo ci

$$\phi_2^\square \circ (\phi_1^\square, \text{id}_{G^\square}) \circ \text{pr}_2 = \mu^\square = \phi_0^\square \circ \text{pr}_1 .$$

Analogiczne wnioskowanie prowadzi do jej symetrycznego odpowiednika

$$\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square}, \phi_1^\square) \circ \text{pr}_2 = \mu^\square = \phi_0^\square \circ \text{pr}_1 ,$$

co potwierdza identyfikacj  $\phi_1^\square$ jako operacji brania przeciwności.

Na koniec wreszcie indukujemy na zrekonstruowanej powyżej grupie przemiennej struktur  moduł nad pierścieniem R ze struktur składowych. W tym celu z każdego z dzia a 

$$\ell^{(\lambda)} : R \times G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

budujemy odwzorowanie

$$\ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) : R \times G^\square \longrightarrow G_\lambda ,$$

co daje nam jedyne odwzorowanie

$$\ell^\square : R \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o w sno ci

$$\text{pr}_\lambda \circ \ell^\square = \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) .$$

Z tej ostatniej odczytujemy definicj  $\ell^\square$ jako „działania po wsp łr dnych”. W żmudnym, lecz poza tym absolutnie trywialnym rachunku przekonujemy się, że tak zdefiniowane odwzorowanie spełnia aksjomaty działania, i tym samym zamykamy kanoniczną konstrukcj  moduł na produkcie kartezjańskim $G^\square$.

O ile konstrukcja produktu modu w postępuje automatycznie po dokonaniu narzucającego się wyboru nośnika $G^\square$, o tyle konstrukcja koproduktu, który będziemy w dalszej cz ci kursu nazywa  sum  prostą modu w, wymaga pewnej dozy inwencji oraz rozlicznych sprawdzeń (jednoznaczno  konstrukcji). Zaznaczamy zawczasu, że poniższa konstrukcja stosuje się wy cznie do grup przemiennych, co będziemy podkre la  pisząc e_λ w notacji addytywnej jako 0_λ .

Definicja 9. Przyjmijmy zapis Def. 7 i 8. **Suma prosta modułów z rodziny** G to para

$$(\mathcal{M}^\sqcup, \{j_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\oplus := \left(\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\sqcup, \phi_1^\sqcup, \phi_0^\sqcup \right), \ell^\sqcup \right),$$

w której $\mathcal{M}^\oplus$ jest podmodulem produktu modułów $\mathcal{M}^\sqcup$ z rodziny G o nośniku

$$(6) \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda := \{ g \in G^\sqcup \mid |\{ \lambda \in \Lambda \mid \text{pr}_\lambda(g) \neq 0_\lambda \}| < \infty \}$$

(czyli $\text{pr}_\lambda(g)$ jest elementem neutralnym dla prawie wszystkich indeksów) i w której $j_\lambda : G_\lambda \rightarrow G^\sqcup$ są injekcjami kanonicznymi spełniającymi warunki

$$(7) \quad \forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} \forall_{g_\mu \in G_\mu} : \text{pr}_\lambda \circ j_\mu(g_\mu) := \begin{cases} g_\mu & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}.$$

Pokażemy najpierw, że odwzorowania j_λ są homomorfizmami oraz że mają cechę uniwersalności. Na początku ustalmy (dowolnie) indeks $\mu \in \Lambda$ i obliczmy – dla dowolnych $g_\mu, h_\mu \in G_\mu$ –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcup \circ (j_\mu \times j_\mu)(g_\mu, h_\mu) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) \circ (j_\mu \times j_\mu)(g_\mu, h_\mu) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \circ ((\text{pr}_\lambda \circ j_\mu) \times (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu))(g_\mu, h_\mu) \\ &= \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \phi_2^{(\lambda)}(\mathbf{0}_\lambda, \mathbf{0}_\lambda) = \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases} \\ &= \text{pr}_\lambda \circ j_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu), \end{aligned}$$

dowodząc tym samym równości dwóch rodzin odwzorowań

$$G_\mu \times G_\mu \xrightarrow[\text{j}_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}]{\phi_2^\sqcup \circ (\text{j}_\mu \times \text{j}_\mu)} G^\sqcup \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda$$

identycznych z $\psi_\lambda : (g_\mu, h_\mu) \mapsto \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. W konsekwencji terminalności pary $(G^\sqcup, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ równość ta implikuje istnienie jedynej rodziny odwzorowań

$$\alpha_\mu : G_\mu \times G_\mu \rightarrow G^\sqcup, \quad \mu \in \Lambda$$

o własności

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \text{pr}_\lambda \circ \alpha_\mu = \psi_\lambda.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o równości

$$\phi_2^\sqcup \circ (j_\mu \times j_\mu) = j_\mu \circ \phi_2^{(\mu)},$$

która wyraża homomorficzny charakter j_μ . Dowód uniwersalności j_λ wymaga, iżbyśmy z dowolną rodziną homomorfizmów grup (przemiennych)

$$\chi_\lambda : G_\lambda \rightarrow Y, \quad \lambda \in \Lambda$$

określonej dla dowolnej grupy przemiennych Y potrafili stowarzyszyć odwzorowanie

$$H : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow Y$$

spełniające relacje

$$(8) \quad \forall_{\lambda \in \Lambda} : H \circ j_\lambda = \chi_\lambda$$

oraz udowodnić, że odwzorowanie o tej własności jest dane jednoznacznie. Postulujemy, dla dowolnego $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$,

$$H(g) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g).$$

Zauważmy, że suma w powyższej definicji jest skończona, por. (6), zatem definicja ma sens. Sprawdzamy też bez trudu relację (8), wybrawszy dowolnie $g_\lambda \in G_\lambda$,

$$\begin{aligned} H \circ j_\lambda(g_\lambda) &= \sum_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \circ \text{pr}_\mu \circ j_\lambda(g_\lambda) \\ &\equiv \chi_\lambda \circ \text{pr}_\lambda \circ j_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi_\mu \circ \text{pr}_\mu \circ j_\lambda(g_\lambda) \\ &= \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi_\mu(\mathbf{0}_\mu) = \chi_\lambda(g_\lambda). \end{aligned}$$

Dowodzimy następnie jedyności H . Niechaj $\tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y$ będzie dowolnym innym takim odwzorowaniem, a wtedy różnica odwzorowań

$$H - \tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y : g \longmapsto H(g) +_Y \text{P}_Y \circ \tilde{H}(g),$$

będąca homomorfizmem grup przemianych (przypomnijmy, że rzuty kanoniczne są homomorfizmami grup przemianych), spełnia tożsamości

$$\begin{aligned} (H - \tilde{H}) \circ j_\lambda(g_\lambda) &= H \circ j_\lambda(g_\lambda) +_Y \text{P}_Y (\tilde{H} \circ j_\lambda(g_\lambda)) = \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y \text{P}_Y (\chi_\lambda(g_\lambda)) \\ &= \mathbf{0}_Y. \end{aligned}$$

Możemy stąd wyciągnąć prosty wniosek:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(G_\lambda) \subset \text{Ker}(H - \tilde{H}).$$

Jednakowoż $\text{Ker}(H - \tilde{H})$ jest podgrupą $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, tj. podzbiorem domkniętym ze względu na operację brania skończonych sum jego elementów, każdy zaś element $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ jest taką właśnie sumą skończoną elementów z różnych $j_\lambda(G_\lambda)$. Ażeby się o tym przekonać, rozważmy odwzorowanie

$$\iota^\oplus : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \ni g \longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g),$$

które jest dobrze określone z tych samych powodów co H i które wobec homomorficzności rzutów kanonicznych spełnia tożsamości

$$\text{pr}_\lambda \circ \iota^\oplus(g) \equiv \text{pr}_\lambda \circ \sum_{\mu \in \Lambda} j_\mu \circ \text{pr}_\mu(g) = \sum_{\mu \in \Lambda} (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu)(\text{pr}_\mu(g)) = \text{pr}_\lambda(g).$$

Te ostatnie – jak w poprzednio dyskutowanych przypadkach (tj. w konsekwencji terminalności produktu kartezjańskiego) – prowadzą do równości

$$(9) \quad \iota^\oplus = \text{id}_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda},$$

zadającej rzeczony rozkład g na skończoną sumę

$$(10) \quad g = \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g).$$

Wracając do zasadniczego wywodu, stwierdzamy, że jedynym podzbiorem $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ zawierającym $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(G_\lambda)$ i domkniętym względem operacji brania sum skończonych jest cały zbiór $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$,

$$\text{Ker}(H - \tilde{H}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda,$$

czyli też ostatecznie

$$H = \tilde{H}.$$

Należy podkreślić, że nigdzie w dotychczasowej dyskusji koproduktu nie braliśmy pod uwagę dodatkowej struktury R -modułu na nośniku grupy przemiennej, możemy przeto podsumować tę jej część stwierdzeniem, że oto czwórka

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right)$$

stanowi spójną definicję sumy prostej grup przemianych. Jako że działanie pierścienia R w jawny sposób zachowuje podgrupę $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \subset G^\square$, dla naszych celów wystarczy jeszcze tylko upewnić

się, że zarówno iniekcje kanoniczne j_λ , jak też jedyny homomorfizm grup H są odwzorowaniami R -liniowymi. W tym drugim przypadku własność ta jest bezpośrednim następstwem R -liniowości rzutów kanonicznych pr_λ oraz odwzorowań $\chi^{(\lambda)}$. W przypadku pierwszym R -liniowości stwierdzamy na gruncie terminalności produktu kartezjańskiego oraz dowiedzionych własności odwzorowań $\ell^\square$ i $\ell^{(\lambda)}$, stosując sprawdzoną strategię rozważań wcześniejszych. Punktem wyjścia jest obserwacja (wysłowiona dla dowolnych $\lambda, \mu \in \Lambda$ oraz $(r, g_\mu) \in R \times G_\mu$)

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \ell^\square \circ (\text{id}_R \times j_\mu)(r, g_\mu) &= \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) \circ (\text{id}_R \times j_\mu)(r, g_\mu) \\ &\equiv \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda \circ j_\mu)(r, g_\mu) = (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu) \circ \ell^{(\mu)}(r, g_\mu), \end{aligned}$$

wskazująca na równość dwóch rodzin odwzorowań

$$R \times G_\mu \xrightarrow[\text{j}_\mu \circ \ell^{(\mu)}]{\ell^\square \circ (\text{id}_R \times \text{j}_\mu)} \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G_\nu \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

identycznych z $r_\lambda : (r, g_\mu) \mapsto \begin{cases} \ell^{(\mu)}(r, g_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. Terminalność pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ przesądza w tej sytuacji o istnieniu jedynej rodziny odwzorowań

$$\rho_\mu : R \times G_\mu \longrightarrow \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G_\nu \subset G^\square$$

o własności

$$\forall \lambda \in \Lambda : \text{pr}_\lambda \circ \rho_\mu = r_\lambda.$$

Stąd ostatecznie wyprowadzamy pożądaną równość

$$j_\lambda \circ \ell^{(\lambda)} = \ell^\square \circ (\text{id}_R \times j_\lambda)$$

wyrażającą R -liniowość iniekcji kanonicznych.

REFERENCES

- [KM76] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Monografie Matematyczne, vol. XXVII, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.