

METODY ALGEBRY WYŻSZEJ W FIZYCE I W CZASACH ZARAŻY 5. WYKŁAD ZDALNY

Uzbrojeni w pojęcia i konstrukcje przedstawione na dotychczasowych wykładach, możemy wreszcie przejść do wprowadzenia obiektu podstawowego dla niniejszego kursu, czyli algebry Clifforda, i dyskusji jego własności.

1. ALGEBRA CLIFFORDA PRZESTRZENI KWADRATOWEJ – FUNKTOR Cliff

Zaczynamy od

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q)$ będzie przestrzenią kwadratową¹ nad ciałem $\mathbb{K}$, $\mathfrak{A}$ zaś $\mathbb{K}$ -algebrą unitalną. Odwzorowanie $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathfrak{A})$ określimy mianem **odwzorowania Clifforda**, jeśli spełnia warunek

$$\forall_{v \in V} : \varphi(v) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v) = Q(v) \triangleright 1_{\mathfrak{A}}.$$

Odwzorowania Clifforda określone na ustalonej przestrzeni kwadratowej tworzą kategorię $C_{(V,Q)}$, której obiektami są pary $(\mathfrak{A}, \varphi)$ złożone z $\mathfrak{A} \in \text{Ob } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ i odwzorowania Clifforda $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathfrak{A})$, morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów $(\mathfrak{A}_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, utworzonych przez $\mathfrak{A}_\alpha \in \text{Ob } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ i odwzorowania Clifforda $\varphi_\alpha : V \longrightarrow \mathfrak{A}_\alpha$ – odwzorowania

$$\text{Hom}_{C_{(V,Q)}}((\mathfrak{A}_1, \varphi_1), (\mathfrak{A}_2, \varphi_2)) = \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \mid \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \}.$$

Ta pozwala nam sformułować fundamentalną

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. **Algebra Clifforda przestrzeni kwadratowej** $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q)$ to struktura inicjalna

$$(\text{Cliff}(V, Q), j_V^C)$$

dla warunku

$$P_{(V,Q);F_1,F_2}((\mathfrak{A}, \varphi)) = „\varphi : V \longrightarrow \mathfrak{A} \text{ jest odwzorowaniem Clifforda}”$$

na $\text{Ob } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}} \times \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, w którego zapisie $F_1 : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ oraz $F_2 : \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ to funktory zapominania. Składowe tej struktury to $\mathbb{K}$ -algebra $\text{Cliff}(V, Q)$ z jednością $e^C \equiv 1_{\text{Cliff}(V,Q)}$ oraz odwzorowanie Clifforda

$$j_V^C : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

które będziemy określać mianem **kanonicznego odwzorowania Clifforda**.

Uwaga 1. W dalszej części wykładu będziemy używać pojęcia „algebra Clifforda” w odniesieniu do unitalnej $\mathbb{K}$ -algebry $\text{Cliff}(V, Q)$, o której mówi powyższa definicja. Ponadto, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, mnożenie i dodawanie w algebrze Clifforda będziemy oznaczać symbolami pozbawionymi indeksów: $\cdot$ i $+$, odpowiednio.

W analogii do konstrukcji iloczynu tensorowego możemy sformułować wygodne

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Poniższe zdania logiczne są równoważne.

¹Zakładamy znajomość tego pojęcia z kursu algebry liniowej, ale na wszelki przypadek przypominamy: Przestrzeń kwadratowa to para złożona z przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ (o $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$) oraz formy kwadratowej $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$, tj. odwzorowania jednorodnego stopnia 2 o tej własności, że odwzorowanie zdefiniowane przez **formułę polaryzacyjną** $\Phi_Q : V^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{K} : (v, w) \mapsto 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot (Q(u +_V v) - Q(u) - Q(v))$ jest (symetryczną) formą *dwuliniową* na V . Przestrzeń kwadratowa wraz z izometriami, czyli odwzorowaniami liniowymi $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ między nośnikami struktury kwadratowej (V_i, Q_i) , $i \in \{1, 2\}$ o własności $Q_2 \circ \chi = Q_1$, tworzą **kategorię przestrzeni kwadratowych**, którą będziemy oznaczać symbolem $\square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$

- (i) $((\text{Cliff}(V, Q), j_V^C), j_V^C)$ jest algebrą Clifforda przestrzeni kwadratowej $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$.
- (ii) $\text{Cliff}(V, Q)$ jest generowana (jako $\mathbb{K}$ -algebra) przez elementy $\text{Image } j_V^C$, tj.

$$\text{Cliff}(V, Q) = \langle \text{Image } j_V^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a ponadto dla każdej pary $(\mathfrak{A}, \varphi) \in \text{Ob } C_{(V, Q)}$ jest określone odwzorowanie $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{C_{(V, Q)}}((C, j_V^C), (\mathfrak{A}, \varphi))$, tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{A} \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \tilde{\varphi} \\ V & \xrightarrow{j_V^C} & \text{Cliff}(V, Q) \end{array}.$$

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 3.1. □

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Algebra Clifforda dowolnej przestrzeni kwadratowej nad dowolnym ciałem $\mathbb{K}$ istnieje i jest określona jednoznacznie z dokładnością do jedynego unitalnego izomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr.

Dowód: W algebrze tensorowej $\otimes_{\mathbb{K}} V$ przestrzeni kwadratowej (V, Q) nad ciałem $\mathbb{K}$ definiujemy ideał obustronny

$$\mathfrak{I}_Q := \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \mid v \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V},$$

co pozwala nam określić – na gruncie Stw. 4.4 – algebrę ilorazową

$$(1) \quad \text{Cliff}(V, Q) := \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q$$

wraz z odwzorowaniem $\mathbb{K}$ -liniowym (opuszczamy indeks $\otimes_{\mathbb{K}}$ gwoli przejrzystości)

$$j_V^C \equiv \pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q} \circ j_1 : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) : v \longmapsto j_1(v) + \mathfrak{I}_Q \equiv v + \mathfrak{I}_Q.$$

Zauważmy, że dla dowolnego wektora $v \in V$ spełniona jest – wobec obustronności $\mathfrak{I}_Q$ – tożsamość

$$\begin{aligned} j_V^C(v)^2 &\equiv (v + \mathfrak{I}_Q) \otimes_{\mathbb{K}} (v + \mathfrak{I}_Q) = v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q \\ &= v \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{I}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + (v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) + \mathfrak{I}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + \mathfrak{I}_Q \\ &\equiv Q(v) \triangleright 1_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q}, \end{aligned}$$

czyli j_V^C jest odwzorowaniem Clifforda, a ponieważ algebra $\otimes_{\mathbb{K}} V$ jest generowana (jako $\mathbb{K}$ -algebra) przez $j_1(V) \subset \otimes_{\mathbb{K}} V$ i rzut kanoniczny $\pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q}$ jest epimorfizmem, przeto $j_V^C(V)$ generuje $\text{Cliff}(V, Q)$ (jako $\mathbb{K}$ -algebrę). Dla zakończenia dowodu musimy jeszcze stowarzyszyć unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr $\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \mathfrak{A}$ z dowolnym odwzorowaniem Clifforda $\varphi : V \longrightarrow \mathfrak{A}$. W tym celu stwierdzamy najpierw, że to ostatnie definiuje – w świetle Tw. 4.1 – (jedyne) unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \otimes_{\mathbb{K}} V \longrightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{v_i \in V, i \in \overline{1, N}, N \in \mathbb{N}} : \tilde{\varphi}(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_N) = \varphi(v_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_N),$$

a ten spełnia – dla dowolnego $v \in V$ – tożsamość

$$\tilde{\varphi}(v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) = \varphi(v)^2 - Q(v) \triangleright \tilde{\varphi}(1_{\mathbb{K}}) = Q(v) \triangleright 1_{\mathfrak{A}} - Q(v) \triangleright 1_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{A}},$$

skąd wniosek, że

$$\mathfrak{I}_Q \subset \ker \tilde{\varphi},$$

zatem $\widehat{\varphi}$ kanonicznie indukuje unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\widehat{\varphi} : \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q \longrightarrow \mathfrak{A} : \tau + \mathfrak{I}_Q \longmapsto \widehat{\varphi}(\tau).$$

Przy tym – dla dowolnego $v \in V$ –

$$\widehat{\varphi} \circ j_V^C(v) = \widehat{\varphi}(j_1(v) + \mathfrak{I}_Q) = \widehat{\varphi} \circ j_1(v) = \varphi(v),$$

możemy przeto położyć

$$\widetilde{\varphi} := \widehat{\varphi}.$$

□

Na marginesie dotychczasowej dyskusji poczynimy następującą przydatną obserwację.

Lemat 1. Przyjmijmy zapis użyty w dowodzie Tw.1 (zakładając przy tym, w szczególności, że $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$), i zdefiniujmy

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} := \langle v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \mid v, w \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

a wówczas zachodzi tożsamość

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} = \mathfrak{I}_Q.$$

Dowód: Z jednej strony – dla dowolnych $v, w \in V$, a wobec definicji formy kwadratowej – zachodzi równość

$$\begin{aligned} v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} &= (v +_V w) \otimes_{\mathbb{K}} (v +_V w) - Q(v +_V w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \\ &\quad - (v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) - (w \otimes_{\mathbb{K}} w - Q(w) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) \in \mathfrak{I}_Q, \end{aligned}$$

więc

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} \subset \mathfrak{I}_Q,$$

z drugiej zaś trywialnie

$$v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) \in \mathfrak{I}_{\Phi_Q},$$

więc

$$\mathfrak{I}_Q \subset \mathfrak{I}_{\Phi_Q}.$$

□

Konstrukcja algebr Clifforda jest osadzona w kategorii przestrzeni wektorowych z dodatkową strukturą, jaką jest forma kwadratowa. Naturalnym więc jest oczekiwać, że homomorfizmy przestrzeni kwadratowych podnoszą się do (unitalnych) homomorfizmów algebr Clifforda (choć nie ma powodów uważać, że są to jedyne (unitalne) homomorfizmy $\mathbb{K}$ -algebr pomiędzy algebrami Clifforda). O tym, że tak jest w istocie, mówi

Twierdzenie 2. Przyporządkowanie algebr Clifforda przestrzeniom kwadratowym nad danym ciałem ma charakter funktorialny, tj. istnieje funktor kowariantny

$$\text{Cliff} : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}.$$

Dowód: Wobec wcześniejszych naszych ustaleń pozostaje wykazać, że dla dowolnych $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, \mathbf{P}_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha}), Q_{\alpha}) \in \text{Ob } \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}, \alpha \in \{1, 2, 3\}$ każda izometria $\chi : V_1 \longrightarrow V_2$ indukuje unitalny

homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr $\text{Cliff}(\chi)$ o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) \\ \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi} & V_2 \end{array} ,$$

w szczególności zaś

$$(3) \quad \text{Cliff}(\text{id}_V) = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)} ,$$

a nadto że dla dowolnych dwóch izometrii $\chi_\alpha : V_\alpha \rightarrow V_{\alpha+1}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ zachodzi tożsamość

$$\text{Cliff}(\chi_2 \circ \chi_1) = \text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1) .$$

W tym celu rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\widehat{\chi} := j_{V_2}^C \circ \chi : V_1 \rightarrow \text{Cliff}(V_2, Q_2) .$$

Łatwo widać, że spełnia ono warunek Clifforda, a to z racji cliffordowskości odwzorowania kanonicznego $j_{V_2}^C$ oraz izometrycznego charakteru χ ,

$$\forall_{v_1 \in V_1} : \widehat{\chi}(v_1)^2 \equiv j_{V_2}^C(\chi(v_1))^2 = Q_2(\chi(v_1)) \triangleright e_2^C = Q_1(v_1) \triangleright e_2^C .$$

Uniwersalność algebry Clifforda przesądza zatem o istnieniu jedynego unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr

$$\text{Cliff}(\chi) : \text{Cliff}(V_1, Q_1) \rightarrow \text{Cliff}(V_2, Q_2)$$

o własności

$$\text{Cliff}(\chi) \circ j_{V_1}^C = \widehat{\chi} \equiv j_{V_2}^C \circ \chi ,$$

ta ostatnia jednak wyraża właśnie przemienność Diag. (2). Zauważmy przy tym, że odwzorowanie $\text{Cliff}(\chi)$ jest określone jednoznacznie, oto bowiem dowolne dwa podniesienia $\text{Cliff}(\chi)_1$ i $\text{Cliff}(\chi)_2$ pokrywają się wprost na mocy założenia na zbiorze $\text{Image } j_{V_1}^C$ generującym ich dziedzinę,

$$\text{Cliff}(\chi)_2 \circ j_{V_1}^C = j_{V_2}^C \circ \chi = \text{Cliff}(\chi)_1 \circ j_{V_1}^C .$$

Dokonując konkatencji diagramów przemiennych odpowiadających podniesieniom $\text{Cliff}(\chi_\alpha)$ izometrii χ_α , $\alpha \in \{1, 2\}$,

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_1)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_2)} & \text{Cliff}(V_3, Q_3) \\ \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi_1} & V_2 & \xrightarrow{\chi_2} & V_3 \end{array} ,$$

otrzymujemy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1)} & \text{Cliff}(V_3, Q_3) \\ \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi_2 \circ \chi_1} & V_3 \end{array} .$$

Zważywszy jednoznaczność podniesienia, stwierdzamy zatem, że superpozycja podniesień $\text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1)$ jest jedynym podniesieniem superpozycji izometrii $\chi_2 \circ \chi_1$, co jest wnioskiem pożądanym. Ten sam argument pozwala zidentyfikować funktorialny obraz izometrii identycznościowej id_V zgodnie z Równ. (3). $\square$

Konstruktywny dowód istnienia algebry Clifforda daje nam do ręki prosty algorytm budowania jej modelu w bezpiecznym środowisku algebry tensorowej. Ażeby przekonać się o jego praktyczności i zarazem wyprowadzić modele algebr Clifforda o fundamentalnym znaczeniu w klasyfikacji wszystkich rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, z którą zmierzmy się już wkrótce, prześledzimy ów algorytm skrupulatnie w odniesieniu do kilku wybranych przestrzeni kwadratowych o szczególnie prostej postaci formy kwadratowej.

Przykłady 1. (Struktury)

- (1) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{1,0}$. Zaczniemy od wypisania algebry tensorowej przestrzeni $\mathbb{R}$, korzystając przy tym ze Stw. 3.6,

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{R}^{\otimes n} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{R}.$$

Wyodrębnione z powyższej sumy prostej pierwsze dwa jej składniki $\mathbb{R}$ to – odpowiednio – ciało bazowe $\mathbb{R}$ oraz sama przestrzeń $\mathbb{R}$ -liniowa $\mathbb{R}$, pozostałe natomiast to kolejne potęgi tensorowe tej ostatniej, które po redukcji z użyciem kanonicznych izomorfizmów także sprowadzają się do $\mathbb{R}$. Ażeby odróżnić od siebie dwa pierwsze kanonicznie składniki, wprowadzimy indeksy:

$$(4) \quad \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{R}^{\otimes n}.$$

Przy zejściu do algebry ilorazowej dokonujemy następujących utożsamień (na bazie):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\otimes 2} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\ \mathbb{R}^{\otimes 3} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \\ &= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} 1_{(1)}) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1_{(1)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(1)} \\ &\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{(1)}, \\ \mathbb{R}^{\otimes 4} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\ &= \kappa_{(0)}^{-1}(1 \triangleright_{(0)} 1_{(0)}) \equiv \kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\ &\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \quad \text{itd.}, \end{aligned}$$

tak że koniec końców dostajemy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^{\otimes 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)},$$

skąd też

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{I}_{\delta_E^{(1,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Pozostaje w tym momencie ustalić postać iloczynu elementów przestrzeni ilorazowej – tu wystarczy uwzględniający dwuliniowość tegoż iloczynu rachunek na reprezentantach klas (*modulo* $\mathcal{I}_{\delta_E^{(1,0)}}$) w algebrze tensorowej, w której mnożenie sprowadza się do tensorowania, a następnie narzucenie wskazanych wyżej utożsamień. Oto więc dla dowolnych par (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \cong \mathbb{R}^{\times 2}$ obliczamy

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}} (x_2, y_2) &\equiv (x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{R}} (x_2, y_2) \\ &= x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\ &\quad + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\ &= (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(0)}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(1)}) \\
& \sim (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(0)}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(1)}) \\
& +(y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(0)}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_E^{(1,0)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}(0)} \\
& = (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}(0)}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}(1)}) \\
& +(y_1 \cdot x_2) \triangleright_{(1)} \kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}(1)} \cdot 1) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}(0)}
\end{aligned}$$

i na tej podstawie wyprowadzamy

$$m_{\mathbb{R}^{\times 2}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

Określmy izomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych

$$C : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto (x + y, x - y).$$

Łatwo sprawdzamy, że obrazem powyższego „egzotycznego” mnożenia względem tego izomorfizmu,

$$m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} := C \circ m_{\mathbb{R}^{\times 2}} \circ (C^{-1} \times C^{-1}) : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

jest standardowe mnożenie w sumie prostej algebr $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= C\left(\frac{1}{2} \triangleright (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} \frac{1}{2} \triangleright (x_2 + y_2, x_2 - y_2)\right) \\
&\equiv \frac{1}{4} \triangleright C((x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2), \\
&\quad (x_1 + y_1) \cdot (x_2 - y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 + y_2)) \\
&= \frac{1}{2} \triangleright C(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2).
\end{aligned}$$

Ostatecznie więc możemy zapisać

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

domyślnie mając na uwadze standardową strukturę sumy prostej $\mathbb{R}$ -algebr na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

- (2) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{0,1}$. Tym razem przejście od rozkładu (4) do struktury ilorazowej wymaga utożsamień

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = -1 \cdot 1_{(0)} \equiv -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} = -1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \\
&= \kappa_{(1)}^{-1}(-1 \triangleright_{(1)} 1_{(1)}) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(-1_{(1)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(1)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{(1)}, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 4} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= \kappa_{(0)}^{-1}(1 \triangleright_{(0)} 1_{(0)}) \equiv \kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

tak samo więc jak w poprzednim przypadku dostajemy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)},$$

a dalej

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{I}_{\delta_E^{(0,1)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Postać iloczynu w otrzymanej tu algebrze odczytujemy z rachunku (którego początek jest identyczny jak poprzednio)

$$\begin{aligned}
 (x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}} (x_2, y_2) &= (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(0)}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(1)}) \\
 &\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(0)}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(1)}) \\
 &\sim (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(0)}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(1)}) \\
 &\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}(0)}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_E^{(0,1)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}(0)} \\
 &= (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}(0)}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}(1)}) \\
 &\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright {}_{(1)}\kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}(1)} \cdot 1) - (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}(0)},
 \end{aligned}$$

który prowadzi do łatwo rozpoznawalnej struktury

$$(x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

Tym sposobem identyfikujemy

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1}) \cong \mathbb{C}.$$

(3) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{2,0}$. W algebrze tensorowej tej przestrzeni

$$(5) \quad \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2,0} = \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} n}$$

utożsamiamy (na bazie):

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) &\sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
 (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
 (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) &\sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
 &= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (1, 0)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
 &\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
 (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
 &= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (0, 1)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
 &\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
 (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) &\sim (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
 &= {}_{(1)}\kappa^{-1}((0, 1) \triangleleft_{(1)} 1) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
 &\xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
 (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
 &= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (0, 1)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
 &\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
 (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) &\sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (1, 0)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (1, 2) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= {}_{(1)}\kappa^{-1}((1, 0) \triangleleft_{(1)} 1) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

a ponieważ także

$$\begin{aligned}
(1, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 1) &= (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) + (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) + (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), \\
&\text{więc dalej utożsamiamy} \\
(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &= (1, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 1) - (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&\sim \delta_E^{(2,0)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&= (2 - 1 - 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) &\sim -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&\sim -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&= -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}((0, 1) \triangleleft_{(1)} 1) \\
&\equiv -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
&\sim -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&= -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}((1, 0) \triangleleft_{(1)} 1) \\
&\equiv -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Biorąc to wszystko pod uwagę, stwierdzamy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{\times 2},$$

gdzie

$$\mathbb{R}^{(1)} = \langle (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \rangle_{\mathbb{R}},$$

a zatem ostatecznie

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{I}_{\delta_E^{(2,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Przy tym z tożsamości

$$\begin{aligned}
&(a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&\cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2}} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&\sim (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0)
\end{aligned}$$

$$+(a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1)$$

$$+(a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1),$$

wyznaczonych w odwołaniu do powyższych relacji, wyprowadzamy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \cong \mathbb{R}(2),$$

który na bazie przybiera postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Istotnie, mamy

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1+a_2 & a_3+a_4 \\ a_3-a_4 & a_1-a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1+b_2 & b_3+b_4 \\ b_3-b_4 & b_1-b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+a_2) \cdot (b_1+b_2) + (a_3+a_4) \cdot (b_3-b_4) & (a_1+a_2) \cdot (b_3+b_4) + (a_3+a_4) \cdot (b_1-b_2) \\ (a_3-a_4) \cdot (b_1+b_2) + (a_1-a_2) \cdot (b_3-b_4) & (a_3-a_4) \cdot (b_3+b_4) + (a_1-a_2) \cdot (b_1-b_2) \end{pmatrix} \\ \equiv & \begin{pmatrix} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) & (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \\ (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) & (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (4) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{0,2}$. W tym przypadku przejście od algebry tensorowej (5) do stosownej algebry ilorazowej realizują utożsamienia (na bazie):

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -({}_{(1)}\kappa)^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_{(1)}\kappa)]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -({}_{(1)}\kappa)^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_{(1)}\kappa)]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},$$

a nadto

$$\begin{aligned} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) & \sim \delta_E^{(0,2)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_E^{(0,2)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_E^{(0,2)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ & = (-2 + 1 + 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \end{aligned}$$

oraz

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim ({}_{(1)}\kappa)^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_{(1)}\kappa)]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim ({}_{(1)}\kappa)^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_{(1)}\kappa)]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}$$

Jak poprzednio, wyłania się rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{I}_{\delta_E^{(0,2)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu wyznaczoną z rachunku

$$(a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1))$$

$$\cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2}} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1))$$

$$\sim (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0)$$

$$+(a_1 \cdot b_3 - a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1)$$

$$+(a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1),$$

w której rozpoznajemy bez trudu obraz iloczynu Hamiltona z Przykł. 4.1(4) względem izomorfizmu

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \cong \mathbb{H},$$

przybierającego na bazie postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto (1, i, j, k).$$

- (5) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{1,1}$. Konstrukcja algebry ilorazowej prowadzi poprzez utożsamienia (na bazie):

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim {}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},$$

a nadto

$$\begin{aligned} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim -\delta_E^{(1,1)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} + \delta_E^{(1,1)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} + \delta_E^{(1,1)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &= (-0 + 1 - 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \end{aligned}$$

oraz

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim {}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}$$

I tym razem uzyskujemy rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{I}_{\delta_E^{(1,1)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu określaną przez utożsamienie

$$\begin{aligned} &(a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ &\cdot \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ &\sim (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0) \\ &\quad + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1) \\ &\quad + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), \end{aligned}$$

z której odczytujemy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathbb{R}(2),$$

przybierający na bazie postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

którą bez trudu potwierdzamy w rachunku analogicznym do tego z punktu (3).

- (6) Algebra Clifforda przestrzeni $(\mathbb{C}, \delta_E)$, gdzie $\delta_E : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ jest euklidesową formą kwadratową. Postępując identycznie jak w punkcie (1), odkrywamy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{C}, \delta_E) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Jakkolwiek argumenty przedstawione w szczegółowej dyskusji poszczególnych przypadków są całkowicie przekonujące, to jednak nie stanowią formalnego dowodu istnienia wskazanych izomorfizmów. Traktując je jako strukturalną wskazówkę, bez trudu dowodzimy poniższego

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Istnieją kanoniczne unitalne izomorfizmy $\mathbb{K}$ -algebr

- (i) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \ (\mathbb{K} = \mathbb{R});$
- (ii) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1}) \cong \mathbb{C} \ (\mathbb{K} = \mathbb{R});$
- (iii) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \cong \mathbb{R}(2) \ (\mathbb{K} = \mathbb{R});$
- (iv) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \cong \mathbb{H} \ (\mathbb{K} = \mathbb{R});$
- (v) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathbb{R}(2) \ (\mathbb{K} = \mathbb{R});$
- (vi) $\text{Cliff}(\mathbb{C}, \delta_E) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \ (\mathbb{K} = \mathbb{C}).$

Dowód: Weryfikację słuszności tezy stwierdzenia opieramy na Stw. 1.

- Ad (i) Przywołując postać zanurzenia wyjściowej przestrzeni wektorowej $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{(1)}$ w module ilorazowym z Przykł. 1 (1), rozważamy odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$j_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} : r \mapsto (r, -r),$$

którego obraz generuje przeciwdziedzinę jako $\mathbb{R}$ -algebrę,

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = (\text{Image } j_{\mathbb{R}})_{\mathbb{R}}.$$

Istotnie,

$$\forall_{r,s \in \mathbb{R}} : (r, s) = \frac{1}{2}(r+s) \triangleright j_{\mathbb{R}}(1)^2 + \frac{1}{2}(r-s) \triangleright j_{\mathbb{R}}(1).$$

Niechaj teraz $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{A}$ będzie odwzorowaniem Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}$ w dowolną unitalną $\mathbb{R}$ -algebrę $\mathfrak{A}$. Jako odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe jest ono jednoznacznie określone przez wartość przyjmowaną na wektorze $1 \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(r) \equiv \varphi(r \triangleright 1) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1),$$

przy czym element

$$a := \varphi(1) \in \mathfrak{A}$$

spełnia warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_E^{(1,0)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.$$

Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{A} : (r, s) \mapsto \frac{1}{2}(r+s) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2}(r-s) \triangleright_{\mathfrak{A}} a,$$

o pożądanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}) \equiv \tilde{\varphi}(1, 1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \tilde{\varphi} \circ j_{\mathbb{R}}(r) = \tilde{\varphi}(r, -r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a \equiv r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \varphi(r).$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 1 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$ -algebr

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} (x_2, y_2)) &= \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\ &= \frac{1}{2} \triangleright \left((x_1 + y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 - y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2} \triangleright \left((x_2 + y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_2 - y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \right) \\ & \equiv \tilde{\varphi}(x_1, y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Ad (ii) Rozumując analogicznie jak w punkcie poprzednim, określamy odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : r \longmapsto (0, r)$$

o własności

$$\mathbb{C} = \langle \text{Image } J_{\mathbb{R}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

wynikającej z prostej obserwacji:

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}} : (x, y) = (-x) \triangleright J_{\mathbb{R}}(1) \cdot_{\mathbb{C}} J_{\mathbb{R}}(1) + y \triangleright J_{\mathbb{R}}(1).$$

Dla dowolnego $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}$ jak poprzednio definiujemy element

$$a := \varphi(1) \in \mathfrak{A},$$

spełniający warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_E^{(0,1)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{A} : (x, y) \longmapsto x \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y \triangleright_{\mathfrak{A}} a,$$

o pożądanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(1, 0) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r) = \tilde{\varphi}(0, r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(r).$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 1 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$ -algebr

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\left((x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{C}} (x_2, y_2)\right) &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\ &= (x_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (x_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(x_1, y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Ad (iii) Tym razem bierzemy pod uwagę odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J_{\mathbb{R} \times 2} : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}(2) : (r, s) \longmapsto \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix}$$

o własności

$$\mathbb{R}(2) = \langle \text{Image } J_{\mathbb{R} \times 2} \rangle_{\mathbb{R}},$$

udokumentowanej, jak następuje:

$$\begin{aligned} \forall_{a, b, c, d \in \mathbb{R}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{a+d}{2} \triangleright J_{\mathbb{R} \times 2}(1, 0)^2 + \frac{a-d}{2} \triangleright J_{\mathbb{R} \times 2}(1, 0) + \frac{b+c}{2} \triangleright J_{\mathbb{R} \times 2}(0, 1) \\ &+ \frac{b-c}{2} \triangleright J_{\mathbb{R} \times 2}(1, 0) \odot J_{\mathbb{R} \times 2}(0, 1). \end{aligned}$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1, 0)^2 = \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \quad B^2 \equiv \varphi(0, 1)^2 = \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$B \cdot_{\mathfrak{A}} A = (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B)$$

$$= \delta_E^{(2,0)}(1, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B.$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &: \mathbb{R}(2) \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \frac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \frac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi} \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix} = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

W mozołnym, lecz poza tym całkowicie trywialnym rachunku bezpośrednim przekonujemy się, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$ -algebr.

Ad (iv) Określamy odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{H} : (r, s) \longmapsto ri + sj$$

o własności

$$\mathbb{H} = \langle \text{Image } \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

widocznej w stwierdzeniu

$$\forall_{a,b,c,d \in \mathbb{R}} : a + bi + cj + dk = -a \triangleright_{\mathbb{R}^{\times 2}} (1, 0)^2 + \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times 2}}(b, c) + d \triangleright_{\mathbb{R}^{\times 2}} (1, 0) \odot \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0, 1).$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1, 0)^2 = \delta_E^{(0,2)}(1, 0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \quad B^2 \equiv \varphi(0, 1)^2 = \delta_E^{(0,2)}(0, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$B \cdot_{\mathfrak{A}} A = (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B)$$

$$= \delta_E^{(0,2)}(1, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B.$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &: \mathbb{H} \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &: a + bi + cj + dk \longmapsto a \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} b \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} c \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} d \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi}(ri + sj) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

Łatwo widać, że jest to w istocie homomorfizm $\mathbb{R}$ -algebr.

Ad (v) Punktem wyjścia jest odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}(2) : (r, s) \longmapsto \begin{pmatrix} r & s \\ -s & -r \end{pmatrix}$$

o własności

$$\mathbb{R}(2) = \langle \text{Image } \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

udokumentowanej, jak następuje:

$$\begin{aligned} \forall_{a,b,c,d \in \mathbb{R}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{a+d}{2} \triangleright_{\mathbb{R}^{\times 2}} (1, 0)^2 + \frac{a-d}{2} \triangleright_{\mathbb{R}^{\times 2}} (1, 0) + \frac{b+c}{2} \triangleright_{\mathbb{R}^{\times 2}} (0, 1) \\ &+ \frac{b-c}{2} \triangleright_{\mathbb{R}^{\times 2}} (1, 0) \odot \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0, 1). \end{aligned}$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1, 0)^2 = \delta_E^{(1,1)}(1, 0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \quad B^2 \equiv \varphi(0, 1)^2 = \delta_E^{(1,1)}(0, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\begin{aligned} B \cdot_{\mathfrak{A}} A &= (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) \\ &= \delta_E^{(1,1)}(1, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B. \end{aligned}$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &: \mathbb{R}(2) \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \frac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \frac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi}\left(\begin{smallmatrix} r & s \\ -s & -r \end{smallmatrix}\right) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

Także i to odwzorowanie okazuje się być homomorfizmem $\mathbb{R}$ -algebr.

Ad (vi) Dowód przebiega identycznie jak w punkcie (i). □

2. ALGEBRA ZEWNĘTRZNA JAKO ALGEBRA CLIFFORDA

Model algebry Clifforda stowarzyszonej z daną przestrzenią kwadratową (V, Q) wypracowany w dowodzie Tw. 1 pozwala nam postrzegać ową algebrę jako wysoce nietrywialne uogólnienie, parametryzowane przez nierównoważne struktury kwadratowe Q na V , pewnej kanonicznej konstrukcji ilorazowej związanej z samą przestrzenią $\mathbb{K}$ -liniową V , którą obecnie opisujemy, a która odgrywa istotną rolę osobną w modelowaniu zjawisk fizycznych. Rzeczona konstrukcja stanowi specjalizację konstrukcji ilorazowej (1) do przypadku zwyrodniałej przestrzeni kwadratowej $(V, Q = 0)$ i daje nam

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności – dowodu Tw. 1. **Algebra zewnętrzna przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej V** to przestrzeń ilorazowa

$$\bigwedge^{\bullet} V := \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_0 = \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} \wedge \equiv m_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_0} &: \bigwedge^{\bullet} V \times \bigwedge^{\bullet} V \longrightarrow \bigwedge^{\bullet} V \\ &: (\alpha + \mathfrak{I}_0, \beta + \mathfrak{I}_0) \longmapsto \alpha \otimes_{\mathbb{K}} \beta + \mathfrak{I}_0 \equiv (\alpha + \mathfrak{I}_0) \wedge (\beta + \mathfrak{I}_0), \end{aligned}$$

zwanym **iloczynem zewnętrznym**. Zapiszemy więc

$$\text{Cliff}(V, 0) \equiv \bigwedge^{\bullet} V.$$

Zachodzi oczywiście

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ będzie dowolną bazą przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej V . Algebra zewnętrzna tej ostatniej jest algebrą z $\mathbb{Z}$ -gradacją

$$\bigwedge^{\bullet} V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigwedge^n V$$

o składowych jednorodnych

$$\bigwedge^n V := \bigoplus_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N} \langle v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \dots \wedge v_{k_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

rozpiętych na klasach tensorów

$$v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \cdots \wedge v_{k_n} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{1,n}} \text{sign}(\sigma) v_{k_{\sigma(1)}} \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(2)}} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(n)}} + \mathfrak{I}_0.$$

W szczególności więc

$$\forall_{n > N} : \bigwedge^n V = \mathfrak{I}_0,$$

czyli w istocie

$$\bigwedge^\bullet V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^N \bigwedge^n V,$$

przy czym

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^n V = \binom{N}{n}.$$

Dowód: Prosty wniosek z procedury rzutowania na moduł ilorazowy. $\square$

W następnej kolejności zajmujemy się szczegółowym opisem struktury algebry endomorfizmów algebry zewnętrznej, z którego przyjdzie nam skorzystać niebawem.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Algebra endomorfizmów $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V)$ jest generowana przez endomorfizmy

$$\mu_v : \bigwedge^\bullet V \curvearrowright \omega \mapsto v \wedge \omega, \quad v \in V$$

oraz (jedyne) $\mathbb{K}$ -liniowe rozszerzenia

$$\iota_\varphi \equiv \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \iota_\varphi^{(n)} : \bigwedge^\bullet V \curvearrowright, \quad \varphi \in V^*,$$

$$\iota_\varphi^{(0)} \equiv 0 : \bigwedge^0 V \longrightarrow \{0_{\mathbb{K}}\}, \quad \iota_\varphi^{(n)} : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^{n-1} V$$

przyporządkowań określonych na elementach prostych wzorami

$$\iota_\varphi(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_k} \wedge v_n.$$

Dowód: Wobec skończoności wymiaru V istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych

$$(\bigwedge^\bullet V)^* \cong \bigwedge^\bullet V^*,$$

stanowiący stosownie rozszerzoną zantysymetryzowaną wersję udowodnionego wcześniej izomorfizmu (14). W świetle Równ. (11) istnieje zatem kanoniczny izomorfizm

$$T_V : \bigwedge^\bullet V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} (\bigwedge^\bullet V)^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V),$$

który przybiera konkretną postać (na tensorach prostych, tj. dla dowolnych $\omega \in \bigwedge^\bullet V^*$ oraz $v \in \bigwedge^\bullet V$)

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) : \bigwedge^\bullet V \curvearrowright w \mapsto \langle \omega, w \rangle \triangleright v,$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigwedge^\bullet V^* \times \bigwedge^\bullet V \longrightarrow \mathbb{K}$ jest dwoistością stanowiącą dwuliniowe rozszerzenie przyporządkowania określonego na elementach jednorodnych w postaci

$$\langle k, l \rangle := k \cdot_{\mathbb{K}} l, \quad k, l \in \mathbb{K},$$

$$\langle k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := 0_{\mathbb{K}},$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, l \rangle := 0_{\mathbb{K}},$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := \delta_{m,n}^{\mathbb{K}} \det_{(n)}(\varphi_i(v_j))_{i,j \in \overline{1,n}},$$

zapisanej dla dowolnych $k, l \in \mathbb{K}$, $v_j \in V$, $j \in \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $\varphi_i \in V^*$, $i \in \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zauważmy, że izomorfizmy te ograniczają się do składowych jednorodnych według schematu

$$T_V \upharpoonright_{\bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V} : \bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^p V, \bigwedge^\bullet V),$$

przy czym wyrażają się formułami

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) \equiv \tilde{\mu}_v \circ \tilde{\iota}_\omega, \quad (\omega, v) \in \bigwedge^p V^* \times \bigwedge^\bullet V,$$

w których $\tilde{\iota}$ jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do $\text{Cliff}(V^*, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V^*$ odwzorowania Clifforda

$$\iota : V^* \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V) : \varphi \longmapsto \iota_\varphi$$

opisanego w treści dowodzonego twierdzenia, $\tilde{\mu}$ zaś jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do $\text{Cliff}(V, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V$ odwzorowania Clifforda

$$\mu : V \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V) : v \longmapsto \mu_v$$

zdefiniowanego tamże. O cliffordowskości obu odwzorowań przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – oto więc

$$\begin{aligned} \iota_\varphi^2(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \iota_\varphi\left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l < k}}^n (-1)^{l-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ l > k}}^n (-1)^{l-2}\right) \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \\ &\equiv \left(\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l < k}}^n - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l > k}}^n\right) (-1)^{k+l} \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V}, \end{aligned}$$

a nadto

$$\mu_v^2(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) = v \wedge v \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \equiv \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V}.$$

Przy tym w konsekwencji homomorficzności obu rozszerzeń spełnione są – dla dowolnych φ_i i v_j jak wyżej – tożsamości

$$\tilde{\iota}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m} = \iota_{\varphi_1} \circ \iota_{\varphi_2} \circ \cdots \circ \iota_{\varphi_m},$$

$$\tilde{\mu}_{v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n} = \mu_{v_1} \circ \mu_{v_2} \circ \cdots \circ \mu_{v_n}.$$

Skoro jednak – na mocy Cor. 1 oraz Równ. (10), a w konwencji $\bigwedge^0 V \equiv \mathbb{K}$ – istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V) &\equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V, \bigwedge^\bullet V) \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{n=0}^N \bigwedge^n V, \bigwedge^\bullet V\right) \\ &\cong \bigoplus_{n=0}^N \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^n V, \bigwedge^\bullet V), \end{aligned}$$

a każdy ze składników prostych ostatniej sumy jest – jak pokazaliśmy wcześniej – generowany (jako $\mathbb{K}$ -algebra) przez endomorfizmy wymienione w tezie dowodzonego stwierdzenia, to także każdy element $\mathbb{K}$ -algebry $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V)$ jest skończoną kombinacją $\mathbb{K}$ -liniową skończonych kombinacji $\mathbb{K}$ -liniowych skończonych iloczynów takowych generatorów, co dowodzi słuszności tezy. $\square$

3. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI STRUKTURALNE ALGEBRY CLIFFORDA

Oswoiwszy się nieco z konstrukcją modelu algebry Clifforda, możemy obecnie przystąpić do omówienia elementarnych jej własności będących konsekwencją definicji. Zacniemy od

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 2. Kanoniczne odwzorowanie Clifforda

$$j_V^C : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

jest monomorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych.

Dowód: Zaczniemy od prostej obserwacji ogólnej: jeśli j_V^C ma pożądaną własność w *konkretnym* modelu $\text{Cliff}(V, Q)$ (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda j_V^C) algebry Clifforda przestrzeni kwadratowej (V, Q) , to ma ją w dowolnym innym modelu $\widetilde{\text{Cliff}}(V, Q)$ (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda $\tilde{j}_V^C$), a to wobec przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\text{Cliff}}(V, Q) & \\ \tilde{j}_V^C \nearrow & & \uparrow \iota \\ V & \xrightarrow{j_V^C} & \text{Cliff}(V, Q) \end{array},$$

na którym ι jest jedynym izomorfizmem modeli opisanym w Def. 2. Istotnie, diagram ten pozwala stwierdzić, że $\tilde{j}_V^C$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest nim j_V^C . Ta konstatacja pozwoli nam sprowadzić nasze rozważania do prostego modelu wyprowadzonego w konstruktywnym dowodzie Tw. 1.

Zaczniemy od rozważenia sytuacji zwyrodniałej, w której $\text{rk } Q = 0$, czyli jest $Q = 0$. W tym przypadku mamy model omówiony w Def. 3, tj.

$$\text{Cliff}(V, 0) = \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V}$$

wraz z odwzorowaniem kanonicznym

$$j_V^C : V \xrightarrow{j_V \otimes_{\mathbb{K}} 1} \bigotimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\pi_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathcal{I}_0}} \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V}.$$

Niech teraz – dla pewnych $v_1, v_2 \in V$ –

$$j_V^C(v_2) = j_V^C(v_1),$$

a wówczas

$$v_2 - v_1 \in \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

to jednak oznacza, że tensor stopnia $\deg(v_2 - v_1) = 1$ jest kombinacją $\mathbb{K}$ -liniową tensorów stopnia co najmniej 2, co wobec jednoznaczności rozkładu na składowe jednorodnie w $\bigotimes_{\mathbb{K}} V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} n}$ oznacza², że

$$v_2 - v_1 = 0_V,$$

skąd wniosek:

$$(6) \quad \ker j_V^C = \{0_V\}.$$

Niechaj teraz $\text{rk } Q = \dim_{\mathbb{K}} V$, a wtedy $v \in \ker j_V^C$ implikuje

$$Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} = j_V^C(v)^2 = 0,$$

czyli $v = 0_V$, zatem i tym razem zachodzi równość (6).

Pozostaje rozpatrzyć przypadek pośredni: $0 < \text{rk } Q < \dim_{\mathbb{K}} V$, w którym możemy dokonać rozkładu Q -ortogonalnego

$$V = V_0 \oplus_Q V_{\neq 0}$$

na podprzestrzenie: zerową V_0 o własności $Q|_{V_0} = 0$ oraz niezwyrodniałą $V_{\neq 0}$, przy czym z rozkładem tym jest stowarzyszona zupełna para komplementarnych rzutów (Q -ortogonalnych)

²W przypadku $Q \neq 0$ powyższe proste rozumowanie przestaje być w równie oczywisty sposób słuszne, gdyż obecność członu $Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}$ prowadzi do mieszania stopni.

$\pi_0, \pi_{\neq 0}$ o własności $V_{(\neq)0} = \text{Image } \pi_{(\neq)0}$. W świetle wcześniejszych naszych rozważań odwzorowanie kanoniczne

$$j_{V_{\neq 0}}^C : V_{\neq 0} \longrightarrow \text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0}), \quad Q_{\neq 0} \equiv Q \upharpoonright_{V_{\neq 0}}$$

jest monomorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych. Możemy go użyć do skonstruowania odwzorowania $\mathbb{K}$ -liniowego

$$\varphi_{\neq 0} := j_{V_{\neq 0}}^C \circ \pi_{\neq 0} : V \longrightarrow \text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0}) \equiv C_{\neq 0},$$

które spełnia warunek Clifforda (zapisany poniżej dla dowolnego $v = v_0 + v_{\neq 0} \in V_0 \oplus_Q V_{\neq 0} \equiv V$ oraz $e_{\neq 0}^C \equiv \mathbf{1}_{\text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0})}$)

$$\begin{aligned} \varphi_{\neq 0}(v)^2 &= j_{V_{\neq 0}}^C(v_{\neq 0})^2 = Q(v_{\neq 0}) \triangleright e_{\neq 0}^C \equiv \Phi_Q(v_{\neq 0}, v_{\neq 0}) \triangleright e_{\neq 0}^C = \Phi_Q(v - v_0, v - v_0) \triangleright e_{\neq 0}^C \\ &= \Phi_Q(v, v) \triangleright e_{\neq 0}^C \equiv Q(v) \triangleright e_{\neq 0}^C \end{aligned}$$

i z tej racji określa (jedyne) unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi}_{\neq 0} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow C_{\neq 0}$$

o własności

$$\tilde{\varphi}_{\neq 0} \circ j_{V_{\neq 0}}^C = \varphi_{\neq 0}.$$

Ten ostatni wykorzystujemy w definicji odwzorowania $\mathbb{K}$ -liniowego

$$\varphi : V \longrightarrow \bigwedge^\bullet V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0} : v \longmapsto \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v).$$

Bez trudu sprawdzamy, że także ono spełnia warunek Clifforda (uzwględniając w rachunku stopnie jednorodnych czynników tensorowych),

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &\equiv (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v))^2 \\ &= (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) \frown (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) \frown (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)) \\ &\quad + (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)) \frown (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) + (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)) \frown (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)) \\ &= (-1)^{0 \cdot 1} \pi_0(v) \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \cdot_{C_{\neq 0}} e_{\neq 0}^C + (-1)^{0 \cdot 0} \pi_0(v) \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &\quad + (-1)^{1 \cdot 1} 1_{\mathbb{K}} \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} e_{\neq 0}^C + (-1)^{1 \cdot 0} 1_{\mathbb{K}} \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &= 0 \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) - \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_{\neq 0}^C \\ &= Q(v) \triangleright (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) \equiv Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\bigwedge^\bullet V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0}}. \end{aligned}$$

Istnieje zatem unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \bigwedge^\bullet V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0}$$

o własności

$$(7) \quad \tilde{\varphi} \circ j_V^C = \varphi,$$

a ponieważ φ jest injektywny, co dokumentuje poniższe wnioskowanie:

$$\begin{aligned} v \in \ker \varphi &\iff \left\{ \begin{array}{l} \pi_0(v) = 0_V \\ \varphi_{\neq 0}(v) = 0_{C_{\neq 0}} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} v = v_{\neq 0} \\ 0_{C_{\neq 0}} = \varphi_{\neq 0}(v) \equiv \varphi_{\neq 0}(v_{\neq 0}) = j_{V_{\neq 0}}^C(v_{\neq 0}) \end{array} \right\} \\ &\iff v = v_{\neq 0} = 0_V, \end{aligned}$$

przeto także j_V^C jest injekcją, oto bowiem zachodzi – na mocy Równ. (7) –

$$\ker j_V^C \subset \ker \varphi = \{0_V\}.$$

□

Uwaga 2. Injektywność kanonicznego odwzorowania Clifforda pozwala dokonać utożsamienia

$$\mathcal{J}_V^C(V) \cong V,$$

co też będziemy czynić w dalszej części wykładu, pisząc – konsekwentnie – relacje definiujące algebrę Clifforda w powszechnie spotykanej postaci

$$\forall_{v,w \in V} : \{v, w\} = 2\Phi_Q(v, w) \triangleright e^C.$$

W dalszej części dyskusji algebr Clifforda, w szczególności zaś w ich klasyfikacji oraz w konstrukcji ich reprezentacji centralną rolę odegrają pewne ich (anty-)automorfizmy, których omówienie wymaga od nas powrotu do analizy algebry tensorowej stanowiącej podstawę przedstawionego wcześniej modelu algebry Clifforda. Wprowadzamy zatem

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj

$$\bigotimes_{\mathbb{K}} V = V_{\otimes}^0 \oplus V_{\otimes}^1, \quad V_{\otimes}^l := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} 2k+l}, \quad l \in \{0, 1\}$$

będzie naturalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją $\mathbb{K}$ -algebry $\bigotimes_{\mathbb{K}} V$, indukującą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradację algebry Clifforda

$$(8) \quad \text{Cliff}(V, Q) = \text{Cliff}(V, Q)^0 \oplus \text{Cliff}(V, Q)^1.$$

Ponadto niech – dla ustalonego (dowolnie) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ –

$$\tilde{\tau}_n : V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} \hookrightarrow$$

będzie (jedynym) odwzorowaniem $\mathbb{K}$ -liniowym indukowanym przez odwzorowanie (wielo-)śródo- $\mathbb{K}$ -liniowe (w rozumieniu Def. 3.4)

$$\tau_n : V^{\times n} \longrightarrow V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} : (v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto v_n \otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_1.$$

Inwolucja główna (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ to automorfizm $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowany

$$J_V := \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)^0} \oplus (-\text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)^1}),$$

o (oczywistej) własności

$$J_V^2 = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

Antyinwolucja główna (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ to antymultiplikatywny automorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej $\text{Cliff}(V, Q)$

$$T_V : \text{Cliff}(V, Q) \hookrightarrow$$

indukowany przez także odwzorowanie

$$\tilde{\tau}_V := \text{id}_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \tilde{\tau}_n : \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} \cong \bigotimes_{\mathbb{K}} V \hookrightarrow,$$

o (oczywistej) własności

$$\tilde{\tau}_V^2 = \text{id}_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

który możemy traktować jako (multiplikatywny) izomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr $\bigotimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\cong} (\bigotimes_{\mathbb{K}} V)^{\text{opp}}$.

Uwaga 3. Podkreślmy, że składowe powyższej definicji mają sens, oto bowiem

- ideał $\mathcal{I}_Q$, będąc generowanym przez elementy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -jednorodnie podalgebry $V_{\otimes}^0$ (tj. stopnia $[0]_2$), jest ideałem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowanym,

$$\mathcal{I}_Q = (\mathcal{I}_Q \cap V_{\otimes}^0) \oplus (\mathcal{I}_Q \cap V_{\otimes}^1) \equiv \mathcal{I}_Q^0 \oplus \mathcal{I}_Q^1,$$

skąd też rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathcal{I}_Q = (V_{\otimes}^0 \oplus V_{\otimes}^1) / (\mathcal{I}_Q^0 \oplus \mathcal{I}_Q^1) = V_{\otimes}^0 / \mathcal{I}_Q^0 \oplus V_{\otimes}^1 / \mathcal{I}_Q^1$$

który jest właśnie indukowaną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją $\text{Cliff}(V, Q)$ wykorzystaną w pierwszej części definicji;

- istnienie homomorfizmów $\tilde{\tau}_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, przyjmujących na tensorach prostych postać

$$\tilde{\tau}_n(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_n) = v_n \otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_1,$$

jest zagwarantowane przez uniwersalność (wielokrotnego) iloczynu tensorowego, bez trudu sprawdzamy też tożsamość

$$\begin{aligned} \forall_{\tau_1, \tau_2 \in \otimes_{\mathbb{K}} V} : \tilde{\tau}_V(\tau_1 \cdot \otimes_{\mathbb{K}} V \tau_2) &\equiv \tilde{\tau}_V(\tau_1 \otimes_{\mathbb{K}} \tau_2) = \tilde{\tau}_V(\tau_2) \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\tau}_V(\tau_1) \\ &\equiv \tilde{\tau}_V(\tau_2) \cdot \otimes_{\mathbb{K}} V \tilde{\tau}_V(\tau_1), \end{aligned}$$

która dowodzi antymultiplikatywnego charakteru jawnie $\mathbb{K}$ -liniowego i bijektywnego odwzorowania $\tilde{\tau}_V$, a ponieważ ponadto

$$\tilde{\tau}_V(\mathcal{I}_Q) = \mathcal{I}_Q,$$

co jest następstwem zachowywania generatorów ideału przez $\tilde{\tau}_V$, przeto ten ostatni kanonicznie indukuje antyautomorfizm algebry ilorazowej $\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathcal{I}_Q$ wedle schematu

$$[\tilde{\tau}_V] : \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathcal{I}_Q \hookrightarrow \tau + \mathcal{I}_Q \longmapsto \tilde{\tau}_V(\tau) + \mathcal{I}_Q.$$

Tytułem oswojenia nowowprowadzonych obiektów wysłowimy najpierw oczywiste

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 4. Podprzestrzenie $\mathbb{K}$ -liniowe $\text{Cliff}(V, Q)^k \subset \text{Cliff}(V, Q)$, $k \in \{0, 1\}$ możemy przedstawić w postaci

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 = \mathbb{K} \oplus \langle v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k} \mid v_i \in \mathcal{I}_V^C(V), i \in \overline{1, 2k} \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 = \langle v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k+1} \mid v_j \in \mathcal{I}_V^C(V), j \in \overline{1, 2k+1} \ k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Spełnione są przy tym relacje

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q)^0,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^1 \subset \text{Cliff}(V, Q)^1,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q)^1,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^1 \subset \text{Cliff}(V, Q)^0,$$

w szczególności więc $\text{Cliff}(V, Q)^0$ jest podalgebrą. Inwolucja główna jest funktorialnym obrazem izometrii $P_V : V \hookrightarrow : v \mapsto -v$,

$$J_V = \text{Cliff}(P_V),$$

i spełnia relacje

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 = \ker P^+, \quad \text{Cliff}(V, Q)^1 = \ker P^-,$$

$$P^\pm := 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)} \mp J_V).$$

Dowód: Trywialny. □

Przyjdzie nam z czasem odwołać się także do

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 4. Dowolna podprzestrzeń $\mathbb{K}$ -liniowa $U \subset \text{Cliff}(V, Q)$ zachowywana przez J_V jest podprzestrzenią $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną w rozumieniu Def. 4.5.

Dowód: Oznaczmy

$$U^k := U \cap \text{Cliff}(V, Q)^k, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Dowolny element $u \in U$ możemy rozłożyć, jak następuje:

$$u \equiv P^+(u) + P^-(u),$$

przy czym na mocy założenia $J_V(U) \subset U$ jest $P^\pm(u) \in U$, ale też $P^+(u) \in \text{Cliff}(V, Q)^0$ i $P^-(u) \in \text{Cliff}(V, Q)^1$, zatem wypisany rozkład jest w istocie rozkładem prostym na składowe u z U^k . $\square$

Pierwszym istotnym wynikiem strukturalnym, określającym względną relację między funktorem Cliff i strukturą inicjalną, jaką jest suma prosta przestrzeni kwadratowych, jest kluczowe dla przyszłych naszych rozważań klasyfikacyjnych

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto 0_\alpha), \ell_\alpha), Q_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Istnieje kanoniczny izomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr unitalnych z $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją

$$\text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2) \cong \text{Cliff}(V_1, Q_1) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V_2, Q_2).$$

Dowód: Wprowadźmy oznaczenia

$$C_\alpha := \text{Cliff}(V_\alpha, Q_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad C_\oplus := \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2).$$

Zauważmy, że wobec funktorialności Cliff izometryczne monomorfizmy

$$J_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow V_1 \oplus V_2, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

indukują unitalne homomorfizmy $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\mathcal{J}}_\alpha \equiv \text{Cliff}(J_{V_\alpha}) : C_\alpha \longrightarrow C_\oplus,$$

co pozwala nam zdefiniować odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$(9) \quad \chi := m_{C_\oplus} \circ (\tilde{\mathcal{J}}_1 \otimes \tilde{\mathcal{J}}_2) : C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 \longrightarrow C_\oplus.$$

Sprawdzamy, że χ jest unitalnym homomorfizmem $\mathbb{K}$ -algebr. W tym celu ustalmy (dowolnie) liczby $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \overline{\mathbb{N}}$ i rozważmy elementy jednorodnie $\tau_\alpha^{(1)} := v_1^\alpha \cdot v_2^\alpha \cdots v_{p_\alpha}^\alpha \in C_1$, $v_k^\alpha \in J_{V_1}^C(V_1)$, $k \in \overline{1, p_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz $\tau_\beta^{(2)} := w_1^\beta \cdot w_2^\beta \cdots w_{q_\beta}^\beta \in C_2$, $w_l^\beta \in J_{V_2}^C(V_2)$, $l \in \overline{1, q_\beta}$, $\beta \in \{1, 2\}$, z których tworzymy tensory proste

$$\tau_1^{12} := \tau_1^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_1^{(2)}, \quad \tau_2^{12} := \tau_2^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_2^{(2)}.$$

Możemy następnie zapisać równość (stosując ten sam symbol $\cdot$ dla oznaczenia mnożenia w każdej z trzech występujących tu algebr Clifforda oraz utożsamiając $J_{V_1 \oplus V_2}^C(V_1 \oplus V_2)$ z $V_1 \oplus V_2$)

$$\begin{aligned} \chi(\tau_1^{12} \cdot \tau_2^{12}) &= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \chi(\tau_1^{(1)} \cdot \tau_2^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_1^{(2)} \cdot \tau_2^{(2)}) \\ &= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)} \cdot \tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)} \cdot \tau_2^{(2)}) \\ &= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_2^{(2)}) \\ &= (-1)^{q_1 \cdot p_2} J_{V_1}(v_1^1) \cdot J_{V_1}(v_2^1) \cdots J_{V_1}(v_{p_1}^1) \cdot J_{V_1}(v_1^2) \cdot J_{V_1}(v_2^2) \cdots J_{V_1}(v_{p_2}^2) \\ &\quad \cdot J_{V_2}(w_1^1) \cdot J_{V_2}(w_2^1) \cdots J_{V_2}(w_{q_1}^1) \cdot J_{V_2}(w_1^2) \cdot J_{V_2}(w_2^2) \cdots J_{V_2}(w_{q_2}^2), \end{aligned}$$

która wobec tożsamości

$$\begin{aligned} J_{V_1}(v_k^2) \cdot J_{V_2}(w_l^1) + J_{V_2}(w_l^1) \cdot J_{V_1}(v_k^2) &= (v_k^2 \oplus 0_2) \cdot (0_1 \oplus w_l^1) + (0_1 \oplus w_l^1) \cdot (v_k^2 \oplus 0_2) \\ &= 2\Phi_{Q_1 \oplus Q_2}(v_k^2 \oplus 0_2, 0_1 \oplus w_l^1) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} \equiv 2(\Phi_{Q_1}(v_k^2, 0_1) + \Phi_{Q_2}(0_2, w_l^1)) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} = 0_{C_\oplus} \end{aligned}$$

przepisuje się w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned} \chi(\tau_1^{12} \cdot \tau_2^{12}) &= (-1)^{2q_1 \cdot p_2} J_{V_1}(v_1^1) \cdot J_{V_1}(v_2^1) \cdots J_{V_1}(v_{p_1}^1) \cdot J_{V_2}(w_1^1) \cdot J_{V_2}(w_2^1) \cdots J_{V_2}(w_{q_1}^1) \\ &\quad \cdot J_{V_1}(v_1^2) \cdot J_{V_1}(v_2^2) \cdots J_{V_1}(v_{p_2}^2) \cdot J_{V_2}(w_1^2) \cdot J_{V_2}(w_2^2) \cdots J_{V_2}(w_{q_2}^2) \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_2^{(2)}) \equiv \chi(\tau_1^{12}) \cdot \chi(\tau_2^{12}). \end{aligned}$$

W świetle (wielo-) $\mathbb{K}$ -liniowości wszystkich napotkanych powyżej odwzorowań i operacji nasze rozumowanie uogólnia się na przypadek (super)iloczynu dowolnych elementów skośnego iloczynu tensorowego algebr C_1 i C_2 . Mamy też równość

$$\chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes \mathbf{1}_{C_2}) = m_{C_\oplus}(\mathbf{1}_{C_\oplus} \otimes \mathbf{1}_{C_\oplus}) = \mathbf{1}_{C_\oplus},$$

pozostaje zatem pokazać, że χ jest izomorfizmem, co uczynimy konstruując homomorfizm doń odwrotny. Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\eta : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes} C_2 : (v, w) \longmapsto v \otimes \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes w.$$

Spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} \eta(v, w)^2 &= (v \otimes \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes w)(v \otimes \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes w) = (-1)^{0 \cdot 1} v^2 \otimes \mathbf{1}_{C_2}^2 \\ &\quad + (-1)^{0 \cdot 0} v \cdot \mathbf{1}_{C_2} \otimes \mathbf{1}_{C_2} \cdot w + (-1)^{1 \cdot 1} \mathbf{1}_{C_1} \cdot v \otimes \mathbf{1}_{C_2} \cdot w + (-1)^{1 \cdot 0} \mathbf{1}_{C_1}^2 \otimes w^2 \\ &= Q_1(v) \triangleright \mathbf{1}_{C_1} \otimes \mathbf{1}_{C_2} + v \otimes \mathbf{1}_{C_2} w - v \otimes \mathbf{1}_{C_2} w + \mathbf{1}_{C_1} \otimes Q_2(w) \triangleright \mathbf{1}_{C_2} \\ &= (Q_1(v) + Q_2(w)) \triangleright (\mathbf{1}_{C_1} \otimes \mathbf{1}_{C_2}) \equiv (Q_1 \oplus Q_2)(v, w) \triangleright \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes} C_2}, \end{aligned}$$

a zatem rozszerza się do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\eta} : C_\oplus \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes} C_2,$$

przy czym – dla dowolnego $v \in V_1$ –

$$\tilde{\eta} \circ \chi(v \otimes \mathbf{1}_{C_2}) = \tilde{\eta}(\tilde{j}_1(v) \cdot \tilde{j}_2(\mathbf{1}_{C_2})) = \tilde{\eta}(j_1(v) \cdot \mathbf{1}_{C_\oplus}) = \tilde{\eta}(v, 0_2) = v \otimes \mathbf{1}_{C_2}$$

i – dla dowolnego $w \in V_2$ –

$$\tilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes w) = \tilde{\eta}(\tilde{j}_1(\mathbf{1}_{C_1}) \cdot \tilde{j}_2(w)) = \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus} \cdot j_2(w)) = \tilde{\eta}(0_1, w) = \mathbf{1}_{C_1} \otimes w,$$

a nadto

$$\tilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes \mathbf{1}_{C_2}) = \tilde{\eta}(\tilde{j}_1(\mathbf{1}_{C_1}) \cdot \tilde{j}_2(\mathbf{1}_{C_2})) = \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus}^2) = \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes} C_2} \equiv \mathbf{1}_{C_1} \otimes \mathbf{1}_{C_2},$$

co w połączeniu z obserwacją (rozumianą jako stwierdzenie dotyczące $\mathbb{K}$ -algebr)

$$C_1 \widehat{\otimes} C_2 = \langle v \otimes \mathbf{1}_{C_2}, \mathbf{1}_{C_1} \otimes w, \mathbf{1}_{C_1} \otimes \mathbf{1}_{C_2} \mid (v, w) \in V_1 \times V_2 \rangle_{\mathbb{K}},$$

a wobec homomorficznego charakteru χ i $\tilde{\eta}$, daje nam pożądaną wniosek:

$$\tilde{\eta} \circ \chi = \text{id}_{C_1 \widehat{\otimes} C_2}.$$

Z drugiej strony otrzymujemy

$$\begin{aligned} \chi \circ \tilde{\eta}(v, w) &= \chi(v \otimes \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes w) = \chi(v \otimes \mathbf{1}_{C_2}) + \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes w) \\ &= j_1(v) \cdot \mathbf{1}_{C_\oplus} + \mathbf{1}_{C_\oplus} \cdot j_2(w) = j_1(v) + j_2(w) = (v, 0_2) + (0_1, w) = (v, w) \end{aligned}$$

oraz

$$\chi \circ \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus}) = \chi(\mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes} C_2}) = \mathbf{1}_{C_\oplus},$$

co wobec tożsamości (rozumianej jako równość $\mathbb{K}$ -algebr)

$$C_\oplus = \langle (v, w), \mathbf{1}_{C_\oplus} \mid (v, w) \in V_1 \times V_2 \rangle_{\mathbb{K}}$$

daje nam relację komplementarną wobec poprzedniej,

$$\chi \circ \tilde{\eta} = \text{id}_{C_\oplus}.$$

□

Jako proste, a przydatne corollarium powyższego znajdujemy

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Tw.2. Obrazem względem funktora Cliff iniektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych o niezwyrodniałej dziedzinie jest (unitalny) monomorfizm ich algebr Clifforda. Takimż obrazem surjektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych jest (unitalny) epimorfizm ich algebr Clifforda. Wreszcie też obrazem bijektywnej izometrii jest (unitalny) izomorfizm ich algebr Clifforda.

Dowód: Ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia, dotycząca obrazu izomorfizmu przestrzeni kwadratowych, jest bezpośrednią konsekwencją funktorialnej natury Cliff , która implikuje, że funktorialny obraz odwrotności tegoż izomorfizmu jest odwrotnością obrazu samego izomorfizmu. Zajmiemy się więc dwiema pierwszymi składowymi tej tezy. Niechaj $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto 0_\alpha), \ell_\alpha)$, Q_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ będzie izometrycznym monomorfizmem. Ten określa kanonicznie (na gruncie Pierwszego twierdzenia o izomorfizmie modułów nad pierścieniem) izometryczny izomorfizm

$$\lambda_\varphi : V_1 \xrightarrow{\cong} \text{Image } \varphi,$$

jeśli zatem napiszemy – przy założeniu niezwyrodnienia Q_2 –

$$V_2 = \text{Image } \varphi \oplus_{Q_2} \text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}},$$

to na podstawie Tw.3 dostaniemy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\varphi)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) \equiv \text{Cliff}(\text{Image } \varphi \oplus_{Q_2} \text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2) \\ \text{Cliff}(\lambda_\varphi) \downarrow & & \uparrow \chi \\ \text{Cliff}(\text{Image } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi}) & \xrightarrow{\iota_1} & \text{Cliff}(\text{Image } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}}) \end{array},$$

w którym $\text{Cliff}(\lambda_\varphi)$ jest izomorfizmem na podstawie obronionej wcześniej ostatniej składowej tezy stwierdzenia, ι_1 zaś jest monomorfizmem

$$\begin{aligned} \iota_1 : \quad & \text{Cliff}(\text{Image } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi}) \rightarrow \text{Cliff}(\text{Image } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}}) \\ : \quad & \gamma \mapsto \gamma \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\text{Cliff}(\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}})}. \end{aligned}$$

Przemienność diagramu sprawdzamy na generatorach $\text{Cliff}(V_1, Q_1)$:

$$\begin{aligned} \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}) &= \mathbf{1}_{C_2} = \text{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}), \\ \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)(v) &= \chi \circ \iota_1 \circ \varphi(v) = \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\text{Cliff}(\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Image } \varphi^{\perp_{Q_2}}})}) \\ &= \tilde{\chi} \circ \varphi(v) \cdot \mathbf{1}_{C_2} \equiv \text{Cliff}(\varphi)(v), \end{aligned}$$

przy czym pierwsza tożsamość wynika stąd, że wszystkie występujące w niej odwzorowania są unitalnymi homomorfizmami $\mathbb{K}$ -algebr. Ostatecznie otrzymujemy zatem przedstawienie

$$\text{Cliff}(\varphi) = \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)$$

rozpatrywanego homomorfizmu $\text{Cliff}(\varphi)$ w postaci złożenia monomorfizmów.

Na koniec zajmijmy się przypadkiem izometrii surjektywnej, którą będziemy oznaczać dotychczasowym symbolem φ . Zauważmy, że obraz względem $\text{Cliff}(\varphi)$ układu generującego $\text{Cliff}(V_1, Q_1)$ (jako $\mathbb{K}$ -algebrę) to

$$\{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup \mathcal{J}_{V_2}^C(\text{Image } \varphi) \equiv \{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup \mathcal{J}_{V_2}^C(V_2)$$

(wszak φ jest surjekcją), czyli układ generujący $\text{Cliff}(V_2, Q_2)$, skoro jednak $\text{Cliff}(\varphi)$ jest unitalnym homomorfizmem $\mathbb{K}$ -algebr, to zachodzi

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(\varphi)(C_1) &\equiv \text{Cliff}(\varphi)(\langle \mathbf{1}_{C_1}, v \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}}) = \langle \text{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}), \text{Cliff}(\varphi)(v) \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\equiv \langle \mathbf{1}_{C_2}, \varphi(v) \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \mathbf{1}_{C_2}, w \mid w \in V_2 \rangle_{\mathbb{K}} \equiv C_2. \end{aligned}$$

□

Na następnym wykładzie będziemy kontynuować nasze badania anatomii algebr Clifforda...

APPENDIX A. DODATKOWE WŁASNOŚCI SUMY PROSTEJ

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj G będzie dowolnym R -modułem lewostronnym. Homomorfizmy

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(J, G) &: \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, G\right) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G_\lambda, G) : \chi \longmapsto \chi \circ J, \\ \chi \circ J &: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G_\lambda, G) : \lambda \longmapsto \chi \circ J_\lambda \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G, \text{pr}) &: \text{Hom}_R\left(G, \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda\right) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G, G_\lambda) : \chi \longmapsto \text{pr} \circ \chi, \\ \text{pr} \circ \chi &: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G, G_\lambda) : \lambda \longmapsto \text{pr}_\lambda \circ \chi, \end{aligned}$$

indukowane – odpowiednio – przez rzuty kanoniczne na moduły składowe i ich włożenia kanoniczne, są izomorfizmami grup przemiennych. Określamy je mianem **izomorfizmów kanonicznych**.

Dowód: O istnieniu homomorfizmów odwrotnych do wypisanych przesądzają definicje odnośnych struktur uniwersalnych. I tak, np., rodzinie $\{\chi^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ odwzorowań R -liniowych $\chi^{(\lambda)} : G_\lambda \longrightarrow G$ przypisane jest jedyne odwzorowanie R -liniowe $\chi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow G$ o własności $\chi \circ J_\lambda = \chi^{(\lambda)}$, któremu homomorfizm $\text{Hom}_R(J, G)$ przyporządkowuje na powrót wyjściową rodzinę odwzorowań. □

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis Stw. 9 i niechaj $\{G_{A \lambda_A}\}_{\lambda_A \in \Lambda_A}$, $A \in \{1, 2\}$ będą dwiema rodzinami R -modułów o sumach prostych, odpowiednio, $G_{A \oplus} := \bigoplus_{\lambda_A \in \Lambda_A} G_{A \lambda_A}$. Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &: \text{Hom}_R(G_{1 \oplus}, G_{2 \oplus}) \longrightarrow \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \text{Hom}_R(G_{1 \lambda_1}, G_{2 \lambda_2}) \\ &: \chi \longmapsto \text{pr} \circ \chi \circ J, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pr} \circ \chi \circ J &: \Lambda_2 \times \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \text{Hom}_R(G_{1 \lambda_1}, G_{2 \lambda_2}) \\ &: (\lambda_2, \lambda_1) \longmapsto \text{pr}_{\lambda_2} \circ \chi \circ J_{\lambda_1} \end{aligned}$$

jest monomorfizmem grup przemiennych. Ilekroć zbiór indeksów Λ_2 jest skończony, $\mathcal{M}$ jest izomorfizmem.

Dowód: Wprost z konstrukcji sumy prostej modułów wynika, że $G_{2 \oplus} \subset \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2 \lambda_2}$, a zatem każde odwzorowanie R -liniowe $\chi : G \longrightarrow G_{2 \oplus}$ jest zarazem elementem $\text{Hom}_R(G, \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2 \lambda_2})$. Przy tym zawieranie przechodzi w równość dla skończonego zbioru indeksów. Teza jest więc następstwem Stw. 9. □

APPENDIX B. DODATKOWE WŁASNOŚCI ILOCZYNU TENSOROWEGO

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $G_1 \in \text{Ob } \mathbf{Mod}_{R_1}$, $G_2 \in \text{Ob } \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})}$, $G_3 \in \text{Ob } \mathbf{Mod}_{R_2}$. Istnieje kanoniczny homomorfizm grup przemiennej

$$\varepsilon : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 \longrightarrow \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3),$$

który na tensorach prostych przyjmuje postać

$$\forall_{(\chi, g_3, g_1) \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \times G_3 \times G_1} : \varepsilon(\chi \otimes_{R_2} g_3)(g_1) = \chi(g_1) \otimes_{R_2} g_3.$$

Jeśli moduł G_3 jest wolny, to homomorfizm ten jest monomorfizmem. Jeżeli zaś moduł G_1 lub moduł G_3 jest wolny i skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem, co implikuje – w szczególności – istnienie, w tym przypadku i dla $R_1 = R_2 =: R$, kanonicznego izomorfizmu

$$(10) \quad G_1^* \otimes_R G_3 \cong \text{Hom}_R(G_1, G_3),$$

w tym także – dla $G_1 = G_3 =: G$ –

$$(11) \quad \theta_G \equiv \varepsilon : G^* \otimes_R G \xrightarrow{\cong} \text{End}_R(G, G).$$

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że teza dowodzonego twierdzenia ma sens formalny w świetle Stw. 3.5. Z kolei istnienie homomorfizmu ε jest konsekwencją oczywistej śród- R_2 -liniowości odwzorowania

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \times G_3 &\longrightarrow \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \\ &: (\chi, g_3) \longmapsto \chi(\cdot) \otimes_{R_2} g_3. \end{aligned}$$

Dowód zaczniemy od rozważenia przypadku, kiedy G_3 ma bazę $\{g_\lambda^{(3)}\}_{\lambda \in \Lambda}$. W świetle Stw. 3.9 dowolny tensor z dziedziny ε możemy wówczas przedstawić w postaci (danej jednoznacznie)

$$\tau = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}, \quad \chi^\lambda \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2).$$

Niech $\varepsilon(\tau) = 0$, albo równoważnie

$$\forall_{g_1 \in G_1} : 0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3} = \varepsilon(\tau)(g_1) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda(g_1) \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}.$$

Przywoławszy tezę Stw. 3.9 raz jeszcze, konstatujemy, iż $0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3}$ ma jednoznaczny rozkład wypisanej postaci, więc koniecznie

$$\forall_{g_1 \in G_1} \quad \forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^\lambda(g_1) = 0_{(2)},$$

a stąd

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^\lambda = 0.$$

Stwierdzamy zatem na koniec, że $\tau = 0$, co dowodzi iniektywności ε w rozpatrywanym przypadku.

Niech teraz dodatkowo $N := |\Lambda| < \infty$. Na mocy Tw. 3.5 oraz Stw. 3.6 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 3.4) wnioskujemy o istnieniu (niekanonicznych) izomorfizmów grup przemiennej:

$$\begin{aligned} \iota_1 : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2 \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N (\text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} R_2) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \end{aligned}$$

oraz

$$\iota_2 : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2)$$

$$\begin{aligned}
&\cong \operatorname{Hom}_{R_1}\left(G_1, \bigoplus_{n=1}^N (G_2 \otimes_{R_2} R_2)\right) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{R_1}\left(G_1, \bigoplus_{n=1}^N G_2\right) \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^N \operatorname{Hom}_{R_1}(G_1, G_2),
\end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu wykorzystaliśmy Cor. 1. Obłożywszy injektywny homomorfizm ε z obu stron stosownymi izomorfizmami, otrzymujemy nowy monomorfizm: $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$, którego strukturę możemy bez trudu zanalizować wobec tożsamości jego dziedziny i przeciwdziedziny. Tym sposobem bez trudu przekonujemy się, że w obrazie rzeczonego złożenia monomorfizm ε jawi się odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$ przeprowadza na siebie wektor odwzorowań R_1 -liniowych $(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^N)$, gdzie przyjęliśmy dla ustalenia uwagi, że $\Lambda \equiv \overline{1, N}$), przeto i sam ε jest nieodzownie izomorfizmem.

Zajmiemy się wreszcie przypadkiem, kiedy to G_1 jest modulem o skończonej bazie $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, N}}$. Dowolny element $\chi \in \operatorname{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3)$ jest teraz jednoznacznie określony przez wynik ewaluacji na owej bazie – niech to będzie (w notacji Równ. (3.7))

$$(12) \quad \chi(g_k^{(1)}) = \sum_{(g, h) \in G_2 \times G_3} \nu_k(g, h) \triangleright (g \otimes_{R_2} h), \quad k \in \overline{1, N}.$$

Zdefiniujmy odwzorowania $\chi_{(k, g)} \in \operatorname{Hom}_{R_1}(G_1, G_2)$ indeksowane elementami zbioru $\overline{1, N} \times G_2 \ni (k, g)$ i będące jedynymi R_1 -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l \in \overline{1, N}} : \chi_{(k, g)}(g_l^{(1)}) := \delta_{l, k}^{\mathbb{Z}} \triangleright g.$$

Oznaczmy ponadto, dla dowolnego *ustalonego* rozkładu tensora $\chi(g_k^{(1)})$ (pamiętajmy, że tensory proste w ogólności nie stanowią układu bazowego, a jedynie układ generujący)

$$\forall_{(k, g, h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} : \nu(\chi_{(k, g)}, h) := \nu_k(g, h).$$

Bez trudu przekonujemy się, że obrazem tensora

$$(13) \quad \gamma(\chi) := \sum_{(k, g, h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi_{(k, g)}, h) \triangleright (\chi_{(k, g)} \otimes_{R_2} h)$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności N oraz nośnika ν_k) względem homomorfizmu ε jest homomorfizm χ określony w Równ. (12), oto bowiem

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\gamma(\chi))(g_k^{(1)}) &:= \sum_{(l, g, h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi_{(l, g)}, h) \triangleright (\chi_{(l, g)}(g_k^{(1)}) \otimes_{R_2} h) \\
&= \sum_{(l, g, h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi_{(l, g)}, h) \triangleright (\delta_{l, k}^{\mathbb{Z}} \triangleright g \otimes_{R_2} h) \\
&= \sum_{(g, h) \in G_2 \times G_3} \nu(\chi_{(k, g)}, h) \triangleright (g \otimes_{R_2} h) \equiv \chi(g_k^{(1)}).
\end{aligned}$$

Jest przeto ε epimorfizmem, a ponieważ istnieją (niekanoniczne) izomorfizmy:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 &\cong \operatorname{Hom}_{R_1}\left(\bigoplus_{n=1}^N R_1, G_2\right) \otimes_{R_2} G_3 \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^N \operatorname{Hom}_{R_1}(R_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 \\
&\cong \bigoplus_{n=1}^N G_2 \otimes_{R_2} G_3
\end{aligned}$$

oraz

$$\operatorname{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \cong \operatorname{Hom}_{R_1}\left(\bigoplus_{n=1}^N R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\right)$$

$$\begin{aligned} &\cong \bigoplus_{n=1}^N \operatorname{Hom}_{R_1}(R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N G_2 \otimes_{R_2} G_3, \end{aligned}$$

więc też nieodzownie ε ma trywialne jądro, czyli jest izomorfizmem. $\square$

Uwaga 4. W szczególnym przypadku $R_1 = R_2 =: R$, a dla $G_2 = R$ i G_1 wolnego odwrotność kanonicznego izomorfizmu R -modułów z tezy powyższego twierdzenia daje się wypisać wprost w zwartej postaci

$$\varepsilon^{-1} : \operatorname{Hom}_R(G_1, G_3) \xrightarrow{\cong} G_1^* \otimes_R G_3 : \chi \mapsto \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(1)} \otimes_R \chi(g_k^{(1)})$$

przy użyciu bazy $\{\gamma_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, N}}$ modułu G_1^* dwójstej wzgl. $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, N}}$, por.: Równ. (13). Jeśli ponadto $G_1 = G_3 \equiv G$, to izomorfizm θ_G dostarcza nam powszechnie spotykanej reprezentacji endomorfizmu identycznościowego (w konwencji $\gamma_k^{(1)} \equiv e_k^*$, $g_k^{(1)} \equiv e_k$)

$$\theta_G^{-1}(\operatorname{id}_G) = \sum_{k=1}^N e_k^* \otimes_R e_k.$$

Powyższe rozważania prowadzą wprost do jakże użytecznej

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Tw. 4, zakładając w szczególności, że pierścień R jest przemienny, R -moduł G zaś – wolny i skończenie generowany. Wówczas kanoniczny homomorfizm R -modułów

$$\tau : G^* \otimes_R G \longrightarrow R$$

o własności

$$\forall_{(\varphi, g) \in G^* \times G} : \tau(\varphi \otimes_R g) = \varphi(g)$$

określa **kanoniczną formę R -liniową**

$$\operatorname{tr}_G := \tau \circ \theta_G^{-1} : \operatorname{End}_R(G) \longrightarrow R$$

zwaną **ślądem endomorfizmu po module G** .

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i załóżmy, że R jest pierścieniem przemienym. Istnieje kanoniczny homomorfizm R -modułów

$$\imath : \operatorname{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \operatorname{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$$

o własności

$$\imath(\chi_1 \otimes_R \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2.$$

Ileokroć moduły w którejś z par $(G_1, H_1), (G_2, H_2)$ lub (G_1, G_2) są wolne i skończenie generowane, homomorfizm ten jest izomorfizmem. W szczególności więc dla $H_1 = R = H_2$ stwierdzamy, że jeżeli jeden z modułów G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ jest wolny i skończenie generowany, istnieje kanoniczny izomorfizm R -modułów

$$(14) \quad (G_1 \otimes_R G_2)^* \cong G_1^* \otimes_R G_2^*.$$

Dowód: Dowód pierwszej części stwierdzenia stanowi prostą wariację na temat (dowodu) Stw. 3.3. Przejdziemy więc od razu do dowodu części drugiej, przy czym wobec symetrii (jakościowej niezmienniczości) zagadnienia względem transpozycji indeksów $(1, 2) \mapsto (2, 1)$ wystarczy rozpatrzyć niezależnie przypadek, w którym moduły pary (G_1, H_1) są wolne i skończenie generowane, oraz ten, w którym moduły pary (G_1, G_2) mają tę cechę. Zaczniemy od tego pierwszego. Niechaj

$\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, M_1}}$ będzie bazą R -modułu G_1 , a $\{h_l^{(1)}\}_{l \in \overline{1, N_1}}$ bazą R -modułu H_1 . Wówczas bazą R -modułu $\text{Hom}_R(G_1, H_1)$ jest – w świetle Tw. 4 (patrz: Równ. (10)) – rodzina odwzorowań R -liniowych

$$\tau_{k,l}^{(1)} := \varepsilon(g_k^{(1)*} \otimes_R h_l^{(1)}), \quad (k, l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}.$$

Na mocy Stw. 3.9 dowolny tensor $\tau \in \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2)$ można zatem przedstawić (jednoznacznie) w postaci

$$\tau = \sum_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \tau_{k,l}^{(1)} \otimes_R \chi^{k,l}, \quad \chi^{k,l} \in \text{Hom}_R(G_2, H_2),$$

warunek $\iota(\tau) = 0$ jest więc równoważny układowi tożsamości

$$\begin{aligned} \forall_{m \in \overline{1, M_1}} \forall_{g \in G_2} : 0_{H_1 \otimes_R H_2} &= \sum_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \tau_{k,l}^{(1)}(g_m^{(1)}) \otimes_R \chi^{k,l}(g) \\ &= \sum_{l \in \overline{1, N_1}} h_l^{(1)} \otimes_R \chi^{m,l}(g), \end{aligned}$$

z których na podstawie tegoż Stw. 3.9 odczytujemy warunki

$$\forall_{(m,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \forall_{g \in G_2} : \chi^{m,l}(g) = 0_{H_2}.$$

Z nich wyciągamy wniosek

$$\forall_{(m,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} : \chi^{m,l} = 0,$$

a dalej

$$\tau = 0,$$

co dowodzi iniektywności ι w rozważanym przypadku. Na obecnym etapie wystarczy upewnić się o istnieniu stosownego (niekanonicznego) izomorfizmu między dziedziną i przeciwdziedziną ι , aby móc zanalizować bezpośrednio ten monomorfizm, podobnie jak w dowodzie Tw. 4. Czynimy to w rachunku wykorzystującym Tw. 3.5 oraz Stw. 3.6 (i wcześniejsze nasze rozważania, w tym Stw. 3.4) – oto więc z jednej strony

$$\begin{aligned} \iota_1 : \quad & \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ \cong & \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} R, \bigoplus_{l=1}^{N_1} R\right) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ \cong & \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \text{Hom}_R(R, R) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ \cong & \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} R \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ \cong & \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} (R \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2)) \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \text{Hom}_R(G_2, H_2), \end{aligned}$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2) &\cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} R \otimes_R G_2, \bigoplus_{l=1}^{N_1} R \otimes_R H_2\right) \\ &\cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} (R \otimes_R G_2), \bigoplus_{l=1}^{N_1} (R \otimes_R H_2)\right) \\ &\cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} G_2, \bigoplus_{l=1}^{N_1} H_2\right) \\ &\cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \text{Hom}_R(G_2, H_2). \end{aligned}$$

Jak łatwo widać, monomorfizm $\iota_2 \circ \iota \circ \iota_1^{-1}$ jest odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji przeprowadza na siebie macierz odwzorowań R -liniowych $(\chi^{k,l})_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}}$), więc też i

ι jest izomorfizmem. Zauważmy, że dowiedziona część tezy twierdzenia uzasadnia (w połączeniu z Tw. 3.3) Równ. (14).

Na koniec zajmijmy się przypadkiem, kiedy to moduły G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ są wolne i skończenie generowane. Wybierzmy w G_1 bazę jak w poprzedniej części dowodu, a w G_2 bazę $\{g_l^{(2)}\}_{l \in \overline{1, N_2}}$. Pokażemy najpierw, że homomorfizm ι jest surjektywny. W tym celu rozważmy odwzorowanie R -liniowe $\chi \in \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$, które na bazie $\{g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}\}_{(k,l) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2}}$ dziedziny przyjmuje postać

$$(15) \quad \chi(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}) = \sum_{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2} r_{kl}(h_1, h_2) \triangleright_\otimes (h_1 \otimes_R h_2)$$

dla pewnych $r_{kl}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{R}_0(R; H_1 \times H_2)$. Postępując analogicznie jak w dowodzie Tw. 4, zdefiniujmy odwzorowania $\chi_{(k, h_\alpha)} \in \text{Hom}_R(G_\alpha, H_\alpha)$ indeksowane elementami zbioru $\overline{1, N_\alpha} \times H_\alpha \ni (k, h_\alpha)$ i będące jedynymi R -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l \in \overline{1, N_\alpha}} : \chi_{(k, h_\alpha)}(g_l^{(A)}) := \delta_{l, k}^{\mathbb{Z}} \triangleright h_\alpha.$$

Ustaliwszy dowolnie rozkład tensora $\chi(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)})$, wprowadźmy oznaczenia

$$\forall_{(k, l, h_1, h_2) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2} \times H_1 \times H_2} : r(\chi_{(k, h_1)}, \chi_{(l, h_2)}) := r_{kl}(h_1, h_2).$$

Łatwo widać, że obrazem tensora

$$\gamma(\chi) := \sum_{(k, l, h_1, h_2) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2} \times H_1 \times H_2} r(\chi_{(k, h_1)}, \chi_{(l, h_2)}) \triangleright_\otimes (\chi_{(k, h_1)} \otimes_R \chi_{(l, h_2)})$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności N_A oraz nośnika $r_{kl}(\cdot, \cdot)$) względem homomorfizmu ι jest homomorfizm χ określony w Równ. (15). Konstatujemy więc, że ι jest epimorfizmem, a ponieważ na mocy Równ. (14) i Tw. 3.4 oraz innych przywoływanych wcześniej (s)twierdzeń (w tym Tw. 3.3) istnieje (kanoniczny) izomorfizm

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) &\cong (G_1^* \otimes_R H_1) \otimes_R (G_2^* \otimes_R H_2) \\ &\cong (G_1^* \otimes_R G_2^*) \otimes_R (H_1 \otimes_R H_2) \\ &\cong (G_1 \otimes_R G_2)^* \otimes_R (H_1 \otimes_R H_2) \\ &\cong \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2), \end{aligned}$$

przeto z całą pewnością ι jest izomorfizmem. □