

**METODY ALGEBRY WYŻSZEJ W FIZYCE I
W CZASACH ZARAŻY
6. WYKŁAD ZDALNY**

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowały nas do przeprowadzenia szczegółowej analizy struktury algebr Clifforda skończenie wymiarowych przestrzeni kwadratowych, której zwieńczeniem będzie klasyfikacja tychże algebr w fizycznie istotnych przypadkach: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Rzeczoną analizę zaczniemy od zbadania wymiaru i wskazania naturalnej bazy algebry Clifforda.

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$, $N = \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ będzie bazą przestrzeni kwadratowej V o niezerowej formie kwadratowej. Zbiór wektorów

$$\{e^C, v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N, k \in \overline{1, N}}$$

stanowi bazę algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$. W szczególności więc

$$(1) \quad \dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V, Q) = 2^N.$$

Dowód: Przeprowadzimy indukcję względem wymiaru N , poczynając od przypadku $N = 1$. Niechaj zatem $v \in V \setminus \{0_V\}$, a wtedy homomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych

$$\iota_V : V \longrightarrow \langle e, v \rangle_{\mathbb{K}} \subset \text{Cliff}(V, Q) : \lambda \triangleright v \longmapsto j_V^C(\lambda \triangleright v) \equiv \lambda \triangleright v$$

jest odwzorowaniem Clifforda,

$$\iota_V(\lambda \triangleright v)^2 = \lambda^2 \triangleright \iota_V(v)^2 = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e^C = Q(\lambda \triangleright v) \triangleright e^C,$$

którego obraz generuje $\langle e, v \rangle_{\mathbb{K}}$ jako $\mathbb{K}$ -algebrę. Ponadto dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : V \longrightarrow \mathfrak{A}$ jest $\varphi(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(v)$, więc oznaczwszy $a := \varphi(v) \in \mathfrak{A}$, spełniający warunek $a^2 = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, możemy zdefiniować odwzorowanie (jawnie unitalne i $\mathbb{K}$ -liniowe)

$$\tilde{\varphi} : \langle e, v \rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathfrak{A} : \lambda \triangleright e^C + \mu \triangleright v \longmapsto \lambda \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu \triangleright a,$$

przy czym

$$\tilde{\varphi} \circ \iota_V(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(\lambda \triangleright v),$$

a nadto

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((\lambda_1 \triangleright e^C + \mu_1 \triangleright v) \cdot (\lambda_2 \triangleright e^C + \mu_2 \triangleright v)) &= \tilde{\varphi}((\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)) \triangleright e^C \\ &\quad + (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright v) = (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \\ &\quad +_{\mathfrak{A}} (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a = (\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a). \end{aligned}$$

Wnioskujemy więc, na podstawie Stw. 5.1, że $((\langle e^C, v \rangle_{\mathbb{K}}, \iota_V), \iota_V)$ jest algebrą Clifforda dla $(\langle v \rangle_{\mathbb{K}} \equiv V, Q)$ i – zgodnie z postulatem –

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q) \equiv \dim_{\mathbb{K}} \langle e^C, v \rangle_{\mathbb{K}} = 2 \equiv 2^1.$$

Załóżmy następnie, że dowodzona przez nas teza jest prawdziwa dla dowolnego $N < N_0$ (N_0 ustalone), i niech (V, Q) będzie przestrzenią kwadratową nad $\mathbb{K}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$, w której wybieramy bazę Q -ortogonalną $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N_0}}$, której element v_{N_0} spełnia warunek $Q(v_{N_0}) \neq 0_{\mathbb{K}}$, co uczyniwszy, rozkładamy V na sumę Q -ortogonalną podprzestrzeni

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{N_0-1} \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}} \equiv V_{N_0-1} \oplus_Q \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}},$$

wprowadzając przy tym oznaczenia $Q_{N_0-1} \equiv Q \upharpoonright_{V_{N_0-1}}$ i $Q_{N_0} \equiv Q \upharpoonright_{\langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}}$. W świetle Tw. 5.3, a dalej – dotychczasowych ustaleń i założenia indukcyjnego możemy teraz zapisać

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(V, Q) &\cong \text{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0}) \\ &\cong \left(\langle e_{N_0-1}^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k} \rangle_{\mathbb{K}} \right) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \left(\langle e_{N_0}^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}} \right) \\ &= \langle e_{N_0-1}^C \otimes_{\mathbb{K}} e_{N_0}^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_{N_0-1}^C \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} e_{N_0}^C \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

gdzie $e_{N_0-1}^C$ i $e_{N_0}^C$ są jednościami w odpowiednich algebrach Clifforda. Z powyższego wynika wprost pożądana równość (1), a nadto – wzięwszy pod uwagę jawną postać (5.9) użytego tu izomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr – stwierdzamy, że baza $\text{Cliff}(V, Q)$ otrzymana jako izomorficzny obraz otrzymanej powyżej bazy algebry $\text{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0})$ wzdłuż χ jest postaci wskazanej w tezie dowodzonego stwierdzenia. $\square$

W następnej kolejności wyróżnimy element algebry Clifforda, który odegra istotną rolę nie tylko w klasyfikacji niskowymiarowych rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, ale też – w dyskusji ich reprezentacji, więc i w zastosowaniach fizykalnych (w których nosi miano **operatora chiralności**).

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy (przy czym zakładamy $\text{char } \mathbb{K} = 0$) i niechaj

$$\xi_V : \bigwedge^{\bullet} V \xrightarrow{\cong} \text{Cliff}(V, Q)$$

będzie (jedynym) $\mathbb{K}$ -liniowym rozszerzeniem przyporządkowania określonego na tensorach prostych ($v_i \in V$, $i \in \overline{1, N}$ są dowolne)

$$\xi_V(1_{\mathbb{K}}) := e^C,$$

$$\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sign}(\sigma) \triangleright v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot v_{\sigma(k)}, \quad k \in \overline{1, N}.$$

Ponadto niech $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ będzie dowolnym niezerowym wyznacznikiem na V . **Element kanoniczny** algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ (**stowarzyszony z Δ**) to wektor $e_{\Delta} \in \text{Cliff}(V, Q)$ określony przez warunek

$$\forall_{v_1, v_2, \dots, v_N \in V} : \xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_N) =: \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \triangleright e_{\Delta}.$$

Uwaga 1. Powyższa definicja ma sens, gdyż dla dowolnej bazy ortogonalnej $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ przestrzeni V homomorfizm ξ_V przyporządkowuje elementom odnośnej bazy $\{1_{\mathbb{K}}, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N, k \in \overline{1, N}}$ wektory

$$\xi_V(1_{\mathbb{K}}) = e^C,$$

$$\begin{aligned} \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sign}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)} \cdot e_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot e_{\sigma(k)} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sign}(\sigma)^2 \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_k = e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_k, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia tożsamość wynika wprost z (jednej z wielu) definicji znaku permutacji jako odwzorowania

$$\text{sign} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\} : \sigma \longmapsto (-1)^{\tau(\sigma)},$$

w którego zapisie $\tau(\sigma)$ jest liczbą czynników w (dowolnym) rozkładzie permutacji σ na transpozycje, oraz z relacji skośnej przemienności

$$(2) \quad \forall_{\substack{i,j \in \overline{1,N} \\ i \neq j}} : e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$$

spełnianych przez obrazy elementów bazy $\mathcal{E}$ w $\text{Cliff}(V, Q)$. Tym samym odwzorowanie ($\mathbb{K}$ -liniowe) ξ_V przeprowadza bazę dziedziny na bazę przeciwdziedziny, o której mowa w tezie Stw. 1, jest zatem izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych. Ponadto dla dowolnych wektorów $v_\alpha = v_\alpha^j \triangleright e_i$, $\alpha \in \overline{1, N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) &= v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \xi_V(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_N}) \\ &= \frac{1}{N!} v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\sigma) \triangleright e_{i_{\sigma(1)}} \cdot e_{i_{\sigma(2)}} \cdots e_{i_{\sigma(N)}}, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej sumie wyrazy o indeksach $i_j = i_k$ dla $j \neq k$ występują w parach odpowiadających $(\sigma, \sigma \circ \tau_{j,k})$, których wkłady do sumy różnią się znakiem wobec relacji $\text{sign}(\sigma) = -\text{sign}(\sigma \circ \tau_{j,k})$, a zatem ostatecznie niezerowy przyczynek do tej sumy może pochodzić jedynie od tych N -tek indeksów $(i_1, i_2, \dots, i_N)$, które stanowią permutacje (dowolne) zbioru $\overline{1, N}$,

$$\begin{aligned} &\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\sigma) \triangleright e_{\sigma \circ \rho(1)} \cdot e_{\sigma \circ \rho(2)} \cdots e_{\sigma \circ \rho(N)} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \circ \rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\sigma \circ \rho) \triangleright e_{\sigma \circ \rho(1)} \cdot e_{\sigma \circ \rho(2)} \cdots e_{\sigma \circ \rho(N)} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)} \cdot e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(N)} \\ &\equiv \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \\ &\equiv \Delta_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_N) \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N. \end{aligned}$$

Istotnie, wobec N -liniowości i skośnej symetrii wyznacznika oraz jego unormowania dostajemy, na mocy argumentów analogicznych do tych użytych powyżej,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_N) &= v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_N}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(e_{\rho(1)}, e_{\rho(2)}, \dots, e_{\rho(N)}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \text{sign}(\rho) \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sign}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)}. \end{aligned}$$

Na koniec przywołujemy oczywistą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1,$$

z której wyciągamy wniosek o istnieniu skalaru¹ $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$ spełniającego relację

$$\Delta_{\mathcal{E}} = \lambda_{\Delta} \triangleright \Delta,$$

więc ostatecznie

$$\xi_V(\cdot) = \Delta(\cdot) \triangleright e_{\Delta},$$

gdzie wektor $e_{\Delta} \in \text{Cliff}(V, Q)$ stopnia N jest dany jednoznacznie (w szczególności nie zależy od argumentu odwzorowania z lewej strony równości).

Mamy istotne

¹Łatwo widzieć, że skalar ten to $\Delta(\mathcal{E})^{-1}$.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ będzie dowolną bazą ortogonalną w przestrzeni kwadratowej V , a $\Delta_{\mathcal{E}}$ – wyznacznikiem na V określonym przez tę bazę w standardowy sposób². Element kanoniczny stowarzyszony z $\Delta_{\mathcal{E}}$ przyjmuje postać

$$(3) \quad e_{\Delta_{\mathcal{E}}} = e_1 \cdot e_2 \cdots e_N.$$

Niechaj dalej $\Delta \in \wedge^N V^* \setminus \{0\}$ będzie dowolnym wyznacznikiem na V i niech $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$ będzie skalar, o którym mowa w tezie Stw. 5. Wówczas zachodzi tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^C,$$

jeśli zatem forma kwadratowa Q jest niezwyrodniała, to element kanoniczny jest odwracalny w $\text{Cliff}(V, Q)$, w przeciwnym zaś razie spełnia on tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

Ponadto

$$(4) \quad \forall_{\gamma \in \text{Cliff}(V, Q)} : e_{\Delta} \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_{\Delta}.$$

Dowód: Równość (3) wynika bezpośrednio z rachunku przeprowadzonego w obrębie Uwagi 1. Jeśli teraz w formule definiującej λ_{Δ} wypisanej w treści Stw. 5 dokonamy podstawienia $v_i \equiv w_i := e_i$, $i \in \overline{1, N}$, to otrzymamy równość

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \det_{(N)}(\Phi(e_i, e_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = \prod_{i=1}^N \Phi_Q(e_i, e_i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^N Q(e_i), \end{aligned}$$

wobec czego – w świetle udowodnionej wcześniej równości (3) – dostajemy

$$\begin{aligned} e_{\Delta_{\mathcal{E}}}^2 &\equiv e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_N = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} e_1^2 \cdot e_2^2 \cdots e_N^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N Q(e_i) \triangleright e^C \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C. \end{aligned}$$

Wobec oczywistych tożsamości

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})^2 = \det_{(N)}(\Phi(e_i, e_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = \lambda_{\Delta} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^2, \\ e_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \triangleright e_{\Delta_{\mathcal{E}}} = \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_N) = \Delta(\mathcal{E}) \triangleright e_{\Delta}, \end{aligned}$$

ślusznym dla dowolnego niezerowego wyznacznika Δ na V (a taki spełnia warunek $\Delta(\mathcal{E}) \neq 0_{\mathbb{K}}$), możemy w takim razie zapisać

$$\begin{aligned} e_{\Delta}^2 &= \Delta(\mathcal{E})^{-2} \triangleright e_{\Delta_{\mathcal{E}}}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-2} \triangleright (\lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C) \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-2} \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^C. \end{aligned}$$

Jeśli teraz Q jest niezwyrodniała, to jak jasno wynika z rachunku otwierającego niniejszy dowód, $\lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, zatem także $\lambda_{\Delta} \neq 0_{\mathbb{K}}$, a wówczas

$$e_{\Delta}^{-1} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta}^{-1} \triangleright e^C.$$

Jeśli natomiast Q jest zwyrodniała, to $\lambda_{\Delta} = 0_{\mathbb{K}}$ i w konsekwencji $e_{\Delta}^2 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}$. W dowodzie ostatniej składowej tezy stwierdzenia wykorzystujemy ustaloną wcześniej relację między e_{Δ} i $e_{\Delta_{\mathcal{E}}}$ w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnego $v = v^i \triangleright e_i \in V$ z wykorzystaniem relacji (2),

$$e_{\Delta} \cdot v \equiv v^i \triangleright e_{\Delta} \cdot e_i = v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \cdot e_i$$

²Przypomnijmy, że wyznacznik na przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej V skończonego wymiaru $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ to (dowolny) niezerowy wektor z jednowymiarowej przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej $\wedge^D V^*$. Jako taki jest on jednoznacznie wyznaczony przez wartość przyjmowaną na (dowolnej) bazie V . Poprzez narzucenie warunku, iżby wartość ta była równa $1_{\mathbb{K}}$ dla ustalonej bazy uporządkowanej $\mathcal{E}$, wyróżniamy wyznacznik $\Delta_{\mathcal{E}}$, o którym mowa w treści stwierdzenia.

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{N-i} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1.e_2.\dots.e_{i-1}.e_i^2.e_{i+1}.e_{i+2}.\dots.e_N \\
 &= (-1)^{N-i} (-1)^{i-1} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_i.e_1.e_2.\dots.e_N \equiv (-1)^{N-1} v.e_{\Delta} \\
 &\equiv J_V^{N-1}(v).e_{\Delta}.
 \end{aligned}$$

Postulowana tożsamość jawi nam się teraz jako prosta konsekwencja powyższego (wszak $\text{Cliff}(V, Q)$ jest generowana jako $\mathbb{K}$ -algebra przez $\text{Image } j_V^C$) oraz homomorficznego charakteru inwolucji kanonicznej. $\square$

Dalsze nasze dociekania podporządkowane celowi nadrzędnemu, jakim jest klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda oraz ich reprezentacji, wiodą nas wprost do dyskusji centrum algebry Clifforda oraz jego super-partnera, którego opisuje

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Centrum algebry Clifforda** $\text{Cliff}(V, Q)$ to jej podalgebra

$$\begin{aligned}
 Z(\text{Cliff}(V, Q)) &= \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall \tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(V, Q) : [\gamma, \tilde{\gamma}] = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \} \\
 &\equiv \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall v \in V : [\gamma, v] = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}.
 \end{aligned}$$

Antycentrum algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ to jej podprzestrzeń $\mathbb{K}$ -liniowa

$$\begin{aligned}
 AZ(\text{Cliff}(V, Q)) &= \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall \tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(V, Q) : \gamma.\tilde{\gamma} = J_V(\tilde{\gamma}).\gamma \} \\
 &\equiv \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall v \in V : \{\gamma, v\} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}.
 \end{aligned}$$

Najprostszego uszczegółowienia charakterystyki wprowadzonych powyżej obiektów dostarcza

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 2. $Z(\text{Cliff}(V, Q))$ jest podalgebrą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną $\mathbb{K}$ -algebry $\text{Cliff}(V, Q)$, natomiast $AZ(\text{Cliff}(V, Q))$ jest podprzestrzenią $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej $\text{Cliff}(V, Q)$, w rozumieniu Def. 4.5.

Dowód: Zarówno centrum, jak i antycentrum $\text{Cliff}(V, Q)$ są podprzestrzeniami zachowywanymi przez inwolucję kanoniczną, gdyż

$$\begin{aligned}
 \forall (v, \gamma) \in V \times Z(\text{Cliff}(V, Q)) : J_V(\gamma).v &= -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = -J_V(v.\gamma) \\
 &= -J_V(v).J_V(\gamma) = v.J_V(\gamma)
 \end{aligned}$$

i, podobnie,

$$\begin{aligned}
 \forall (v, \gamma) \in V \times AZ(\text{Cliff}(V, Q)) : J_V(\gamma).v &= -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = J_V(v.\gamma) \\
 &= J_V(v).J_V(\gamma) = -v.J_V(\gamma).
 \end{aligned}$$

Stąd też obie dziedziczą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradację z $\text{Cliff}(V, Q)$ na mocy Stw. 5.7. Przy tym centrum jest w oczywisty sposób podalgebrą $\text{Cliff}(V, Q)$. $\square$

Strukturę centrum i antycentrum algebry Clifforda opisuje

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2 (przy założeniu $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$) i niech $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, a wtedy

- (i) $N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies e_{\Delta} \in Z(\text{Cliff}(V, Q));$
- (ii) $N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies e_{\Delta} \in AZ(\text{Cliff}(V, Q)).$

Ponadto jeśli Q jest niewyrodniona, to

$$\text{(i')} \quad N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies \begin{cases} Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}} ; \\ AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \{ \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \} \end{cases} ;$$

$$(ii') \quad N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies \begin{cases} Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}} \\ AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}} \end{cases}.$$

Dowód: Punkty (i) i (ii) wynikają bezpośrednio z tożsamości (4). Załóżmy zatem, że Q jest formą niezwyrodniałą, i rozważmy składowe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -jednorodnie centrum i antycentrum algebry Clifforda, co możemy uczynić w odwołaniu do Stw.3. Niechaj $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))^1 \equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \cap \text{Cliff}(V, Q)^1$, a wtedy wobec

$$\forall_{v \in V} : \gamma \cdot v = -v \cdot \gamma$$

zachodzi

$$(5) \quad \gamma \cdot e_{\Delta} = (-1)^N e_{\Delta} \cdot \gamma,$$

ale też – na mocy Równ. (4) i w świetle założenia dotyczącego parzystości γ –

$$e_{\Delta} \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_{\Delta} = (-1)^{N-1} \gamma \cdot e_{\Delta},$$

więc ostatecznie

$$\gamma \cdot e_{\Delta} = (-1)^N \cdot (-1)^{N-1} \gamma \cdot e_{\Delta} = -\gamma \cdot e_{\Delta},$$

co przy $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ (a takie poczyniliśmy założenie) oznacza równość

$$\gamma \cdot e_{\Delta} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

W świetle Stw. 2 wnioskujemy zatem, że

$$\gamma \equiv \gamma \cdot e_{\Delta} \cdot e_{\Delta}^{-1} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \cdot e_{\Delta}^{-1} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)},$$

czyli dla niezwyrodniałej formy kwadratowej dostajemy

$$(6) \quad AZ(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \{\mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}\}.$$

Jeśli ponadto $N \in 2\mathbb{N} + 1$, to z porównania tożsamości (7),

$$(7) \quad \gamma \cdot e_{\Delta} = -e_{\Delta} \cdot \gamma,$$

śluszej dla dowolnego elementu antycentralnego $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q))^0$, z tożsamością

$$e_{\Delta} \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_{\Delta} = \gamma \cdot e_{\Delta}$$

wyciągamy oczekiwany wniosek

$$AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \{\mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}\}.$$

Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\varphi_{\Delta} : \text{Cliff}(V, Q) \rightarrow \mathbb{K} : \gamma \mapsto e_{\Delta} \cdot \gamma.$$

Wobec odwracalności elementu kanonicznego jest ono automorfizmem przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej $\text{Cliff}(V, Q)$, a przy tym jeśli $\gamma \in Z(\text{Cliff}(V, Q))$, to

$$\forall_{v \in V} : \varphi_{\Delta}(\gamma) \cdot v \equiv e_{\Delta} \cdot \gamma \cdot v = e_{\Delta} \cdot v \cdot \gamma = J_V^{N-1}(v) \cdot e_{\Delta} \cdot \gamma = (-1)^{N-1} v \cdot \varphi_{\Delta}(\gamma),$$

i – podobnie – jeśli $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))$, to

$$\forall_{v \in V} : \varphi_{\Delta}(\gamma) \cdot v \equiv e_{\Delta} \cdot \gamma \cdot v = -e_{\Delta} \cdot v \cdot \gamma = -J_V^{N-1}(v) \cdot e_{\Delta} \cdot \gamma = (-1)^N v \cdot \varphi_{\Delta}(\gamma),$$

zatem prawdziwe są następujące implikacje:

$$N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies \begin{cases} \varphi_{\Delta}(Z(\text{Cliff}(V, Q))) = Z(\text{Cliff}(V, Q)) \\ \varphi_{\Delta}(AZ(\text{Cliff}(V, Q))) = AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \end{cases},$$

(8)

$$N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies \varphi_{\Delta}(Z(\text{Cliff}(V, Q))) = AZ(\text{Cliff}(V, Q)).$$

Jak jasno widać, uzupełnienie dyskusji struktury antycentrum w przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 2$ wymaga więc zrozumienia struktury centrum, czym zajmiemy się obecnie.

Zacniemy od wyznaczenia składowej parzystej centrum, $Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 \equiv Z(\text{Cliff}(V, Q)) \cap \text{Cliff}(V, Q)^0$. Twierdzimy, że – niezależnie od parzystości wymiaru V – składowa ta jest rozpięta na jedności algebry,

$$(9) \quad Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a dowód opieramy na indukcji względem tegoż wymiaru N . Słuszność postulowanej równości w przypadku $N = 1$ staje się oczywista, gdy wziąć pod uwagę model algebry Clifforda skonstruowany w pierwszym kroku indukcyjnego dowodu Stw. 1, założmy zatem, że równość ta jest prawdziwa dla $N < N_0$ (N_0 ustalone) i niech $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$. Wybierzmy $v \in V$ o własności $Q(v) \neq 0$ (na co pozwala założenie o niezwyrodnieniu Q), a wtedy – w świetle twierdzenia o istnieniu dopełnienia ortogonalnego dowolnej niezwyrodniałej (skończenie wymiarowej) podprzestrzeni przestrzeni kwadratowej – możemy dokonać rozkładu Q -ortogonalnego

$$V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q},$$

przy czym – rzecz jasna – $\dim_{\mathbb{K}} \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - 1 < N_0$. W tym momencie możemy odwołać się do Tw. 5.3, aby przerzucić rachunki do algebry kanonicznie izomorficznej z $\text{Cliff}(V, Q)$, jaką jest $\text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q|_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q|_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$, co okaże się nader wygodne. Przyjawszy dla skrótu oznaczenia $C_v \equiv \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q|_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}})$ i $C_{\perp} \equiv \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q|_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$ i wybrawszy dla C_v model $\langle e_v^C, v \rangle_{\mathbb{K}}$ jak w dowodzie Stw. 1, rozważmy obraz dowolnego elementu $\gamma \in Z(\text{Cliff}(V, Q))^0$ w $C_v \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\perp}$ – ten jest postaci

$$\eta(\gamma) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1$$

dla pewnych $w^k \in \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^1$, $k \in \{0, 1\}$ (wszak suma stopni czynników tensorowych w każdym ze składników sumy ma być parzysta, bo taki jest stopień γ). Podobnie dla dowolnego $x = \lambda \triangleright_V v + y \in V$, zapisanego w terminach $\lambda \in \mathbb{K}$ i $y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$, otrzymujemy

$$\eta(x) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C,$$

gdzie $e_{\perp}^C \in C_{\perp}$ jest odnośną jednością. Na podstawie powyższych wzorów obliczamy

$$\begin{aligned} \eta(\gamma.x) &= (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) \cdot (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C) \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0.y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1.y - \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \eta(x.\gamma) &= (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C) \cdot (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y.w^0 + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 - v \otimes_{\mathbb{K}} y.w^1 + \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1, \end{aligned}$$

a stąd – wobec centralności γ –

$$\begin{aligned} 0 &= \eta([\gamma, x]) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} [w^0, y] + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1, y\} - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} ([w^0, y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1) + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1, y\}, \end{aligned}$$

co z racji liniowej niezależności składników pozwala wnioskować, że

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} : \{w^1, y\} = \mathbf{0}_{C_{\perp}},$$

czyli – w świetle Równ. (6) –

$$w^1 \in AZ(C_{\perp}) \cap \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^1 \equiv AZ(C_{\perp})^1 = \{\mathbf{0}_{C_{\perp}}\},$$

a dalej – wobec tego –

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} : [w^0, y] = [w^0, y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1 = \mathbf{0}_{C_{\perp}},$$

co na gruncie założenia indukcyjnego przyprowadza nas do przekonania, że

$$w^0 \in Z(C_{\perp}) \cap \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^0 \equiv Z(C_{\perp})^0 = \langle e_{\perp}^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

tj. $w^0 = \mu \triangleright e_\perp^C$ dla pewnego skalaru $\mu \in \mathbb{K}$. Koniec końców otrzymujemy

$$\gamma = \chi(e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) = \chi(e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} \mu \triangleright e_\perp^C) \equiv \mu \triangleright \chi(\mathbf{1}_{C_v} \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_\perp) = \mu \triangleright e^C.$$

Udowodniona tym samym równość (9) pozwala dokończyć dowód twierdzenia przy użyciu obserwacji (8), oto bowiem w przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 2$

$$\begin{aligned} AZ(\text{Cliff}(V, Q)) &\equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q))^0 = \varphi_\Delta(Z(\text{Cliff}(V, Q))^0) = \varphi_\Delta(\langle e^C \rangle_{\mathbb{K}}) \\ &= \langle \varphi_\Delta(e^C) \rangle_{\mathbb{K}} = \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

(co wynika z Równ. (6) oraz z tego, że φ_Δ jest parzysty), więc też – wtórnie –

$$Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \varphi_\Delta(AZ(\text{Cliff}(V, Q))) = \varphi_\Delta(\langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}) = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a w przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 1$

$$Z(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \varphi_\Delta(Z(\text{Cliff}(V, Q))^0) = \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}$$

(co wynika z faktu, że φ_Δ jest nieparzysty), zatem

$$Z(\text{Cliff}(V, Q)) = Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 \oplus Z(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}.$$

□

Pierwszy z istotnych wyników pozwalających oswoić nieco bestiarium algebr Clifforda przy użyciu wprowadzonych powyżej obiektów przynosi

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Stw. 5, zakładając przy tym, że forma kwadratowa Q na przestrzeni V wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$ jest niezwyrodniała. Ilekroć można wybrać wyznacznik $\Delta \in \wedge^N V^*$ w taki sposób, że

$$(10) \quad \lambda_\Delta = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}},$$

czyli w szczególności $e_\Delta^2 = e^C$, to istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\mu} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q)$$

o własności

$$\tilde{\mu}(e_\Delta) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \triangleright (e_\Delta^-)^{N+1},$$

gdzie e_Δ^- jest elementem kanonicznym algebry $\text{Cliff}(V, -Q)$ stowarzyszonym z tym samym wyznacznikiem Δ na przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej V będącej nośnikiem przeciwnej struktury kwadratowej $-Q$. W przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 2$ homomorfizm ten jest izomorfizmem.

Dowód: Niechaj λ_Δ będzie skalarom określonym, w sposób opisany w Stw. 5, przez dowolny niezerowy wyznacznik Δ na przestrzeni V z formą kwadratową Q i oznaczmy jako λ_Δ^- skalar określonym przez ten sam wyznacznik, gdy V wyposażymy w formę kwadratową $-Q$. Wówczas dla dowolnych układów wektorów $v_i, w_i \in V$, $i \in \overline{1, N}$ otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta^- \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N) &= \det_{(N)}(\Phi_{-Q}(v_i, w_j))_{i,j \in \overline{1, N}} \\ &\equiv \det_{(N)}(-\Phi_Q(v_i, w_j))_{i,j \in \overline{1, N}} = (-1)^N \det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i,j \in \overline{1, N}} \\ &= (-1)^N \lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N), \end{aligned}$$

z której wynika tożsamość

$$(11) \quad \lambda_\Delta^- = (-1)^N \lambda_\Delta.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\mu : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q) \equiv C_- : v \longmapsto e_\Delta^- \bullet v,$$

wprowadzając przy tym – gwoili przejrzystości zapisu dalszego rozumowania – osobny symbol $\bullet$ na oznaczenie mnożenia w algebrze C_- (z jednością, którą oznaczymy jako e_-^C). Przywoławszy Stw. 2 w odniesieniu do trójki (C_-, e_-^C, λ_-) oraz Równ. (11), stwierdzamy bez trudu, że odwzorowanie powyższe spełnia – na mocy założenia (10) – warunek Clifforda względem struktury kwadratowej Q , oto bowiem

$$\begin{aligned}\mu(v)^2 &= e_-^C \bullet v \bullet e_-^C \bullet v = (e_-^C)^2 \bullet J_V^{N-1}(v) \bullet v = (-1)^{N-1} \cdot (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_- \triangleright v \bullet v \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}-1} \lambda_- \triangleright ((-Q)(v) \triangleright e_-^C) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_- \triangleright (Q(v) \triangleright e_-^C) \\ &= Q(v) \triangleright e_-^C.\end{aligned}$$

Rozszerza się ono zatem kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\mu} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q)$$

o własności

$$\forall_{v \in V} : \tilde{\mu}(v) = e_-^C \bullet v.$$

Wybierzmy bazę $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ w V ortogonalną względem Q , a zatem także względem $-Q$. Na mocy Stw. 2 i rozumowania przeprowadzonego w jego dowodzie możemy zapisać

$$e_\Delta = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N, \quad e_-^C = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \bullet e_2 \cdots e_N,$$

a w takim razie

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(e_\Delta) &\equiv \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright \tilde{\mu}(e_1 \cdot e_2 \cdots e_N) = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright \mu(e_1) \bullet \mu(e_2) \cdots \mu(e_N) \\ &= \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_-^C \bullet e_1 \bullet e_-^C \bullet e_2 \cdots e_-^C \bullet e_N \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright (e_-^C)^N \bullet e_1 \bullet e_2 \cdots e_N \equiv (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (e_-^C)^{N+1}.\end{aligned}$$

Niech teraz $N = 2m \in 2\mathbb{N} + 2$, a wtedy skalary λ_Δ i λ_- przyjmują postać

$$\lambda_\Delta = (-1)^m = \lambda_-$$

i otrzymujemy

$$\tilde{\mu}(e_\Delta) = (-1)^m (e_-^C)^{2m+1},$$

co implikuje natychmiast, że odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\psi : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) : v \longmapsto e_\Delta \cdot v$$

spełnia warunek Clifforda względem struktury kwadratowej $-Q$,

$$\begin{aligned}\psi(v)^2 &= e_\Delta \cdot v \cdot e_\Delta \cdot v = e_\Delta^2 \cdot J_V^{2m-1}(v) \cdot v = -e_\Delta^2 \cdot v \cdot v = (-1)^{m(2m-1)} \lambda_\Delta \triangleright ((-Q)(v) \triangleright e^C) \\ &= (-Q)(v) \triangleright e^C,\end{aligned}$$

więc rozszerza się kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\psi} : \text{Cliff}(V, -Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

o własności

$$\forall_{v \in V} : \tilde{\psi}(v) = e_\Delta \cdot v.$$

Relację pomiędzy oboma homomorfizmami ustalamy na zbiorze generatorów obu algebr na podstawie rezultatów dotychczasowych dociekań. Oto więc

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \circ \tilde{\mu}(v) &= \tilde{\psi}(e_-^C \bullet v) = \tilde{\psi}(e_-^C) \cdot \tilde{\psi}(v) = (-1)^m (e_\Delta)^{2m+1} \cdot e_\Delta \cdot v \equiv (-1)^m (e_\Delta^2)^{m+1} \cdot v \\ &= (-1)^m v \equiv J_V^m(v),\end{aligned}$$

czyli w ogólności (wszak $\tilde{\mu}$ i $\tilde{\psi}$ to homomorfizmy $\mathbb{K}$ -algebr)

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\mu} = J_V^m.$$

Analogicznie wyprowadzamy relację

$$\tilde{\mu} \circ \tilde{\psi} = (J_V^-)^m,$$

gdzie J_V^- jest kanoniczną inwolucją na C_- . Zważywszy oczywistą tożsamość

$$\tilde{\mu} \circ J_V = J_V^- \circ \tilde{\mu} \quad \Longleftarrow \quad J_V^-(e_\Delta^-) = (-1)^{2m} e_\Delta^- = e_\Delta^-$$

(oraz inwolutyny charakter J_V i J_V^-), możemy zatem przepisać powyższe relacje w postaci

$$(J_V^m \circ \tilde{\psi}) \circ \tilde{\mu} = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)}, \quad \tilde{\mu} \circ (J_V^m \circ \tilde{\psi}) = \text{id}_{\text{Cliff}(V, -Q)},$$

z których jasno wynika, że $\tilde{\mu}$ jest izomorfizmem (o odwrotności $J_V^m \circ \tilde{\psi}$). $\square$

Kolejny arcyważny wynik artykułu

Twierdzenie 3 (O kanonicznym iloczynie tensorowym algebr Clifforda). Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q_V)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = 2m \in 2\mathbb{N} + 2$, z wyróżnionym wyznacznikiem $\Delta \in \wedge^{2m} V^*$ o stwarzyszonym elemencie kanonicznym $e_\Delta \in \text{Cliff}(V, Q_V)$, który spełnia warunek

$$e_\Delta^2 = \varepsilon \triangleright e^C, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Wówczas dla dowolnej $((\tilde{V}, +_{\tilde{V}}, P_{\tilde{V}}, \bullet \mapsto 0_{\tilde{V}}), \ell_{\tilde{V}}, Q_{\tilde{V}}) \in \text{Ob} \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\text{Cliff}(V \oplus \tilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \cong \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}).$$

Dowód: Rozważmy kanoniczne izometryczne włożenia

$$j_V : V \rightarrow V \oplus \tilde{V}, \quad j_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V \oplus \tilde{V},$$

przy czym w drugim przypadku *implicite* traktujemy $\tilde{V}$ jako nośnik struktury kwadratowej $\varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}$. Wobec parzystości wymiaru V tożsamość (4) implikuje

$$\forall_{v \in V} : \{e_\Delta, v\} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q_V)}.$$

Ponadto w świetle (dowodu) Tw. 5.3 indukowane unitalne homomorfizmy $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{j}_V \equiv \text{Cliff}(j_V) : \text{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \text{Cliff}(V \oplus \tilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \equiv C_\oplus,$$

$$\tilde{j}_{\tilde{V}} \equiv \text{Cliff}(j_{\tilde{V}}) : \text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_\oplus$$

spełniają – dla dowolnego elementu $\tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})$ – warunek ($\tilde{e}^C$ jest jednością w $\text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})$)

$$\begin{aligned} \tilde{j}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{j}_{\tilde{V}}(\tilde{\gamma}) &\equiv m_{C_\oplus} \circ (\tilde{j}_V \otimes \tilde{j}_{\tilde{V}})(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \equiv \chi(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) = \chi(e^C \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma} \cdot \tilde{e}^C) \\ &= \chi((-1)^{\deg \tilde{\gamma} \cdot \deg e_\Delta} (e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \cdot (e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) \\ &= \chi((e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \cdot (e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) = \chi(e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \cdot \chi(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \\ &= \tilde{j}_{\tilde{V}}(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{j}_V(e_\Delta), \end{aligned}$$

przeło odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\varphi : \tilde{V} \longrightarrow C_\oplus : v \mapsto \tilde{j}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{j}_{\tilde{V}}(v)$$

spełnia warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &\equiv \tilde{j}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{j}_{\tilde{V}}(v) \cdot \tilde{j}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{j}_{\tilde{V}}(v) = \tilde{j}_V(e_\Delta)^2 \cdot \tilde{j}_{\tilde{V}}(v)^2 = \tilde{j}_V(e_\Delta^2) \cdot \tilde{j}_{\tilde{V}}(v^2) \\ &= \varepsilon(\varepsilon \tilde{Q}(v)) \triangleright \mathbf{1}_\oplus = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_\oplus, \end{aligned}$$

i z tej racji rozszerza się jednoznacznie i kanonicznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_\oplus.$$

Przy tym – dla dowolnych $(v, \tilde{v}) \in V \times \tilde{V}$ – zachodzi równość

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_V(v) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v}) &\equiv \tilde{J}_V(v) \cdot \tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = \tilde{J}_V(v \cdot e_\Delta) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = \tilde{J}_V(e_\Delta \cdot J_V(v)) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \\
 &= -\tilde{J}_V(e_\Delta \cdot v) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = -\tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{J}_V(v) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \equiv -\tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\
 &= -\tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \chi(e^C \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} \cdot \tilde{e}^C) = -\tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \chi((-1)^{\deg v \cdot \deg \tilde{v}} (e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) \\
 &= \tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \chi(e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) = \tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \cdot \tilde{J}_V(v) \\
 &\equiv \tilde{\varphi}(\tilde{v}) \cdot \tilde{J}_V(v),
 \end{aligned}$$

zatem

$$\forall_{(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \text{Cliff}(V, Q_V) \times \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}})} : \tilde{J}_V(\gamma) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{J}_V(\gamma).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\Phi : \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_{\oplus}$$

stanowiące (jedyne) rozszerzenie przyporządkowania określonego na tensorach prostych jako

$$\Phi(\gamma \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) := \tilde{J}_V(\gamma) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}).$$

Pokażemy, że Φ jest unitalnym izomorfizmem $\mathbb{K}$ -algebr, konstruując jego odwrotność. W tym celu rozważmy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\Psi : V \oplus \tilde{V} \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) : (v, \tilde{v}) \longmapsto v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v},$$

które spełnia warunek Clifforda

$$\begin{aligned}
 \Psi(v, \tilde{v})^2 &= (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\
 &= v^2 \otimes_{\mathbb{K}} e^C + \varepsilon \triangleright v \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + \varepsilon \triangleright e_\Delta \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + e_\Delta^2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}^2 \\
 &= Q_V(v) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright v \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} - \varepsilon \triangleright v \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + \varepsilon Q_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C \\
 &\equiv (Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})(v, \tilde{v}) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C,
 \end{aligned}$$

a zatem indukuje (jedyne) unitalny homomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\Psi} : C_{\oplus} \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}})$$

o własności

$$\tilde{\Psi}(v, \tilde{v}) = v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}.$$

Zauważmy, że reprezentacja (3) elementu kanonicznego pozwala nam obliczyć wprost

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi} \circ \tilde{J}_V(e_\Delta) &\equiv \tilde{\Psi} \circ \tilde{J}_V(e_1 \cdot e_2 \cdots e_{2m}) = \tilde{\Psi}(J_V(e_1) \cdot J_V(e_2) \cdots J_V(e_{2m})) \\
 &= \Psi(e_1, 0) \cdot \Psi(e_2, 0) \cdots \Psi(e_{2m}, 0) = (e_1 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdot (e_2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdots (e_{2m} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \\
 &= e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C.
 \end{aligned}$$

Tożsamości

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi} \circ \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) &= \tilde{\Psi}((v, 0) \cdot \tilde{\varphi}(e^C) + \tilde{J}_V(e^C) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v})) \\
 &= \tilde{\Psi}((v, 0) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \mathbf{1}_{C_{\oplus}} \cdot \tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{v})) \\
 &= \tilde{\Psi}(v, 0) + \tilde{\Psi} \circ \tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{\Psi}(0, \tilde{v}) \\
 &= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + (e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdot (\varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\
 &= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta^2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}
 \end{aligned}$$

$$= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Phi \circ \tilde{\Psi}(v, \tilde{v}) &= \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) = \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) + \varepsilon \triangleright \Phi(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{e}^C) + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v}) \\ &= (v, 0) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \\ &= (v, 0) + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}^2) \cdot (0, \tilde{v}) = (v, 0) + (0, \tilde{v}) \equiv (v, \tilde{v}). \end{aligned}$$

pokazują dowodnie – na (nietrywialnych) generatorach, więc i ogólnie (wobec homomorficznego charakteru rozpatrywanych odwzorowań) – antycypowaną odwracalność Φ . $\square$

Na zakończenie rozważań ogólnych, wytyczających szlak ku twierdzeniom klasyfikacyjnym dla rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, wypowiemy jeszcze istotne

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, \mathbf{P}_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami $\mathbb{K}$ -liniowymi wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 =: N < \infty$, a nadto niech $\Delta : V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ będzie dwoistością³. Określmy na $V_1 \oplus V_2$ formę kwadratową

$$Q_{\Delta} : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathbb{K} : (v_1, v_2) \mapsto \Delta(v_1, v_2).$$

Istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_{\Delta}) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1).$$

Dowód: Zaczniemy od odnotowania, że sensowność definicji formy kwadratowej Q_{Δ} jest prostą konsekwencją dwuliniowości dwoistości Δ . To rzekłszy, możemy wykorzystać izomorfizm przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowych (odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z Δ)

$$r_{\Delta} : V_2 \xrightarrow{\cong} V_1^* : v \mapsto \Delta(\cdot, v)$$

w połączeniu z tezą Stw. 5.4 pozwala nam wypisać wygodny układ generujący $\mathbb{K}$ -algebry $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)$ złożony z endomorfizmów μ_{v_1} , $v_1 \in V_1$ oraz $\iota_{r_{\Delta}(v_2)}$, $v_2 \in V_2$, które spełniają proste relacje

$$\mu_{v_1}^2 = 0 = \iota_{r_{\Delta}(v_2)}^2, \quad \{\iota_{r_{\Delta}(v_2)}, \mu_{v_1}\} = \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^{\bullet} V_1}.$$

O ile dwie pierwsze nie wymagają dodatkowego komentarza, ostatnią sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (na tensorach prostych, dla dowolnych $w_i \in V_1$, $i \in \overline{1, n}$):

$$\begin{aligned} \{\iota_{r_{\Delta}(v_2)}, \mu_{v_1}\}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) &= \iota_{r_{\Delta}(v_2)}(v_1 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) \\ &\quad + v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_k} \wedge w_n \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &\quad - v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_k} \wedge w_n \\ &\quad + v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_k} \wedge w_n \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &\equiv \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^{\bullet} V_1}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n). \end{aligned}$$

³Przypomnijmy, że dwoistość dla pary (G_1, G_2) modułów nad pierścieniem przemiennym R to odwzorowanie $\Delta : G_1 \times G_2 \longrightarrow R$ nieosobliwe, tj. takie, dla którego oba odwzorowania jednostronnie stowarzyszone $l_{\Delta} : G_1 \longrightarrow G_2^* : g_1 \mapsto \Delta(g_1, \cdot)$ (lewostronnie) i $l_{\Delta} : G_2 \longrightarrow G_1^* : g_2 \mapsto \Delta(\cdot, g_2)$ (prawostronnie) są bijekcjami.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\varphi : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1) : (v_1, v_2) \longmapsto \mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}.$$

Na podstawie wypisanych wyżej tożsamości bez trudu sprawdzamy, że spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2)^2 &\equiv (\mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}) \circ (\mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}) = \mu_{v_1}^2 + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}^2 + \{\iota_{r_{\Delta}(v_2)}, \mu_{v_1}\} \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^{\bullet} V_1} \equiv Q_{\Delta}(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_{\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)}, \end{aligned}$$

rozszerza się ono zatem kanonicznie do unitalnego homomorfizmu $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_{\Delta}) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)$$

o własności

$$\tilde{\varphi}(v_1, v_2) = \mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}.$$

Na mocy Stw. 5.4 podprzestrzeń $\text{Image } \tilde{\varphi}|_{J_{V_1 \oplus V_2}^{\mathbb{C}}(V_1 \oplus V_2)} \equiv \text{Image } \varphi$ generuje $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)$ jako $\mathbb{K}$ -algebrę, zatem $\tilde{\varphi}$ jest epimorfizmem. Ale zarazem – w świetle Równ. (1) –

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_{\Delta}) = 2^{\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \oplus V_2)} = 2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2} = 2^{2 \dim_{\mathbb{K}} V_1}$$

oraz – tym razem na gruncie Tw. 5.4 oraz Stw. 5.3 –

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1) = (\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^{\bullet} V_1)^2 = (2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1})^2 \equiv 2^{2 \dim_{\mathbb{K}} V_1},$$

co pokazuje dowodnie, że $\tilde{\varphi}$ jest w istocie izomorfizmem. $\square$

Jako proste corollarium do poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając przy tym, że $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, przestrzeń kwadratowa V jest niezwyrodniała i ma $\dim_{\mathbb{K}} V \in 2\mathbb{N}$. Niechaj $\omega \in \text{End}_{\mathbb{K}} V$ będzie inwolucją, $\omega^2 = \text{id}_V$, skośnie symetryczną względem formy kwadratowej Q , tj. taką, która spełnia warunek

$$\omega^* = -\omega$$

wypisany dla

$$\forall_{v_1, v_2 \in V} : \Phi_Q(\omega^*(v_1), v_2) := \Phi_Q(v_1, \omega(v_2)).$$

Wówczas istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm $\mathbb{K}$ -algebr

$$\text{Cliff}(V, Q) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} \text{Ker}(\omega - \text{id}_V)).$$

Dowód: Inwolucja ω zadaje – w świetle stwierdzenia dotyczącego odpowiedniości pomiędzy rozkładami modułów nad pierścieniem na sumy proste ich podmodułów a zupełnymi rodzinami rzutów komplementarnych na tychże modułach – rozkład

$$V = \text{Ker}(\omega - \text{id}_V) \oplus \text{Ker}(\omega + \text{id}_V) \equiv V_- \oplus V_+,$$

gdyż para $P_{\pm} := 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\omega \pm \text{id}_V)$ stanowi zupełny układ rzutów komplementarnych. Ponadto dla dowolnych $v_{\pm}, w_{\pm} \in V_{\pm}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\pm}) &= \Phi_Q(\mp \omega(v_{\pm}), \mp \omega(w_{\pm})) = \Phi_Q(\omega^* \circ \omega(v_{\pm}), w_{\pm}) = -\Phi_Q(\omega^2(v_{\pm}), w_{\pm}) \\ &= -\Phi_Q(v_{\pm}, w_{\pm}), \end{aligned}$$

przeto

$$V_{\pm} \perp_Q V_{\pm},$$

natomiast w ograniczeniu do $V_{\pm} \times V_{\mp}$ forma dwuliniowa Φ_Q jest niezwyrodniała – istotnie, ilekroć dla ustalonego $v_{\pm} \in V_{\pm}$ jest

$$\forall_{w_{\mp} \in V_{\mp}} : \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = 0_{\mathbb{K}},$$

to dowolny wektor $V \ni w = \tilde{w}_- \oplus w_+$ wzgl. $w = w_- \oplus \tilde{w}_+$ spełnia warunek

$$\Phi_Q(v_{\pm}, w) = \Phi_Q(v_{\pm}, \tilde{w}_{\pm}) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = 0_{\mathbb{K}},$$

zatem – wobec niezwyrodnienia Q – koniecznie

$$v_{\pm} = 0_V.$$

W rezultacie otrzymujemy parę dwoistą (V_-, V_+) związaną dwoistością

$$\Delta_Q := 2\Phi_Q \upharpoonright_{V_- \times V_+},$$

dla której wyprowadzamy tożsamość

$$\begin{aligned} \Phi_Q(v_- \oplus v_+, w_- \oplus w_+) &= \Phi_Q(v_-, w_-) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_-) \\ &= \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w_-, v_+) \\ &\equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\Delta_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Delta_Q(w_-, v_+)), \end{aligned}$$

a z niej – równość

$$Q(v_- \oplus v_+) = \Delta_Q(v_-, v_+),$$

usprawiedliwiającą – w połączeniu z wcześniejszymi obserwacjami – bezpośrednie odwołanie się do Tw. 4. Na tej podstawie stwierdzamy, zgodnie z tezą będącą przedmiotem dowodu,

$$\text{Cliff}(V, Q) \equiv \text{Cliff}(V_- \oplus V_+, Q \equiv Q_{\Delta_Q}) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_-).$$

□

APPENDIX A. UZUPEŁNIENIE Z TEORII PRZESTRZENI KWADRATOWYCH

Poniższe stwierdzenie ustala prostą relację między formą kwadratową na przestrzeni wektorowej i dowolnym (niezerowym) wyznacznikiem na tej ostatniej, do którego będziemy się odwoływać w trakcie badań nad anatomią algebr Clifforda.

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj V będzie przestrzenią (kwadratową) wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$. Dowolny wyznacznik $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ określa jednoznacznie skalar $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$ spełniający – dla dowolnych $v_i, w_i \in V$, $i \in \overline{1, N}$ – tożsamości

$$\det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i,j \in \overline{1, N}} = \lambda_{\Delta} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N).$$

Dowód: Przy ustalonych (dowolnie) wektorach w_i , $i \in \overline{1, N}$ odwzorowanie

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) : V^{\times N} \longrightarrow \mathbb{K} : (v_1, v_2, \dots, v_N) \longmapsto \det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i,j \in \overline{1, N}}$$

jest jawnie N -liniowe i alternujące, przeto

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) \in \bigwedge^N V^*,$$

co wobec oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1$$

implikuje dla ustalonego (dowolnie) wyznacznika $\Delta \in \bigwedge^N V^*$ istnienie skalaru $\lambda_{\Delta}(w_1, w_2, \dots, w_N)$ spełniającego relację

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) = \lambda_{\Delta}(w_1, w_2, \dots, w_N) \triangleright \Delta.$$

Symetryzacja powyższej obserwacji prowadzi wprost do tezy dowodzonego stwierdzenia. □