METODY ALGEBRY I GEOMETRII WYŻSZEJ W FIZYCE II
W CZASACH ZARAZY
7. I 8. WYKŁAD ZDALNY
ACTION DIRECTE GRUPY LIEGO

Rzetelna dyskusja wiązek głównych i stowarzyszonych, których potrzebujemy w konstrukcji wiązek Clifforda i odnośnych wiązek spinorowych, wymaga wprowadzenia do teorii działania grup Liego na rozmaitościach różniczkowalnych. Zaczynamy od pojęcia podstawowego[1]

Definicja 1. Grupa topologiczna to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1, m_1, \mathrm{Inv}_1, \bullet_1 \longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2, m_2, \mathrm{Inv}_2, \bullet_2 \longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Grupa Liego to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big),$$

której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Bogatym źródłem przykładów grup Liego jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu (dowód jest prezentowany na kursie Teorii Grup II).

Twierdzenie 1 (Cartana o podgrupie domkniętej)**.** Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

Przykłady 1.

(1) dowolna $V \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest przemienną grupą Liego z $(m, \mathrm{Inv}, e) = (+_V, \mathsf{P}_V, \mathbf{0}_V)$;

(2) dla V z poprzedniego przykładu $\mathrm{GL}(V;\mathbb{K}) = \{\ \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \quad | \quad \exists\ \chi^{-1}\ \}$ jako otwarty podzbiór przestrzeni wektorowej $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest grupą Liego (z superpozycją endomorfizmów jako mnożeniem) zwaną **grupą główną liniową** V – jest ona izomorficzna z **grupą główną liniową** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathbb{K}(n) \quad | \quad \det_{(n)} A \neq 0\ \}$ dziedziczącą topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(n) \equiv \mathbb{K}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{K}(n) \longrightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym);

(3) wszechobecne w fizyce „małe” grupy Liego $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ i $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ oraz **grupa Poincarégo** $\mathrm{ISO}(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(3,1)$ o topologii będącej pochodną (złożonej) topologii **grupy Lorentza** $\mathrm{SO}(3,1) = \{\ L \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R}) \quad | \quad L^{\mathrm{T}} \cdot \eta \cdot L = \eta\ \}$ odwzorowań zachowujących metrykę Minkowskiego $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ (ich naturalne działanie na $\mathbb{R}^4$ określa iloczyn półprosty w definicji $\mathrm{ISO}(3,1)$);

(4) **grupa specjalna liniowa** $\mathrm{SL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \quad | \quad \det_{(n)} A = 1\ \}$;

[1] W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w rozmaitych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto wprowadzić pojemniejsze pojęcie grupy i jej działania w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

(5) **grupa ortogonalna** $\mathrm{O}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\ \ |\ \ A^{\mathrm{T}} \cdot A = \mathbf{1}_n\ \}$;
(6) **grupa specjalna ortogonalna** $\mathrm{SO}(n;\mathbb{K}) = \mathrm{O}(n;\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{K})$;
(7) **grupa unitarna** $\mathrm{U}(n) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})\ \ |\ \ A^{\dagger} \cdot A = \mathbf{1}_n\ \}$;
(8) **grupa specjalna unitarna** $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$;
(9) **grupa symplektyczna** $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{SL}(2n;\mathbb{K})\ \ |\ \ A^{\mathrm{T}} \cdot J_n \cdot A = J_n\ \}$ odwzorowań zachowujących „strukturę symplektyczną”

$$J_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Uzgodninie struktury różniczkowej i algebraicznej na zbiorze G ma daleko idące konsekwencje, których szczegółowe studium jest przedmiotem odrębnego kursu (Teoria Grup II – zapraszam w tym semestrze!) i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w kontekście konstrukcji powiązania na wiązkach głównych. Tymczasem jednak przejdziemy bezpośrednio do dyskusji kompleksu zagadnień związanych z działaniem grup Liego na rozmaitościach różniczkowalnych, które odgrywają kluczową rolę w konstrukcji wiązek stowarzyszonych (takich jak wiązki Clifforda i spinorowe właśnie). Zaczniemy, jak zazwyczaj, od pojęcia podstawowego.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą[2] i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej[3]. Homomorfizm grup

$$\lambda_{\cdot}\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X)\ :\ g \longmapsto \lambda_g$$

określamy mianem **działania lewostronnego grupy** G **na zbiorze** X, na którym jest określone działanie grupy G, a który nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy** G. Antyhomomorfizm

$$\varrho_{\cdot}\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X)\ :\ g \longmapsto \rho_g$$

nazywamy **działaniem prawostronnym grupy** G **na zbiorze** X, a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy** G. Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako

$$\lambda\ :\ \mathrm{G} \times X \longrightarrow X\ :\ (g,x) \longmapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g,x)\,,$$

a podgrupy $\varrho_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako

$$\varrho\ :\ X \times \mathrm{G} \longrightarrow X\ :\ (x,g) \longmapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x,g)\,.$$

Niechaj $X_A,\ A \in \{1,2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem lewostronnie** G**-ekwiwariantnym**, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times X_1 \arrow[r, "\lambda^1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times f"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{G} \times X_2 \arrow[r, "\lambda^2"'] & X_2 \end{tikzcd}\,.$$

[2]Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.
[3]Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych $\varrho^A,\ A \in \{1,2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^1"] \arrow[d, "f\times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie** G**-ekwiwariantnym**.

Parę $((X, \mathscr{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy** G (albo G**-przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo G**-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G. Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) topologicznie G**-ekwiwariantnego**.

Parę $((M, \widehat{\mathscr{A}}), \lambda)$ złożoną z rozmaitości różniczkowalnej $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ oraz działania lewostronnego grupy Liego G na M nazywamy **rozmaitością z działaniem gładkim lewostronnym grupy** G (albo G**-rozmaitością gładką lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem gładkim klasy C^∞. Analogicznie definiujemy **rozmaitość z działaniem gładkim prawostronnym** (albo G**-rozmaitość gładką prawostronną**) G. Gładkie odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne klasy C^∞ między rozmaitościami z działaniem gładkim lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) **gładko** G**-ekwiwariantnego**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami $M_A,\ A \in \{1,2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)\,.$$

W następnej kolejności dowodzimy pomocniczego (dla dowodu zasadniczego Tw. 3)

Twierdzenie 2 (O rzędzie odwzorowania ekwiwariantnego)**.** Przyjmijmy zapis Def. 2 (i wcześniejszy). Niechaj $((M_A, \widehat{\mathscr{A}_A}), \lambda^A),\ A \in \{1,2\}$ będą rozmaitościami z odnośnymi działaniami gładkimi (lewostronnymi) grupy Liego G, przy czym zakładamy dodatkowo, że λ^1 jest przechodnie, tj.,

$$\forall_{x,y \in M_1}\ \exists_{g \in \mathrm{G}}\ :\ y = \lambda^1(g, x)\,,$$

i niech $F\ :\ M_1 \longrightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem gładko (lewostronnie) G-ekwiwariantnym. Wówczas F ma stały rząd, w szczególności zaś przeciwobrazy punktów w M_2 względem F są domkniętymi podrozmaitościami włożonymi w M_1.

<u>*Dowód:*</u> Wobec przechodniości działania G na rozmaitości M_1, dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in M_1$ istnieje element $g_{21} \in \mathrm{G}$ o własności $x_2 = \lambda^1_{g_{21}}(x_1)$, przy czym z racji G-ekwiwariantności F zachodzi tożsamość funkcjonalna

$$F \circ \lambda^1_{g_{21}} = \lambda^2_{g_{21}} \circ F\,,$$

a zatem także tożsamość

$$\mathsf{T}_{x_1}(F \circ \lambda^1_{g_{21}}) = \mathsf{T}_{x_1}(\lambda^2_{g_{21}} \circ F)\,,$$

którą możemy przepisać w postaci

$$\mathsf{T}_{x_2}F \circ \mathsf{T}_{x_1}\lambda^1_{g_{21}} = \mathsf{T}_{F(x_1)}\lambda^2_{g_{21}} \circ \mathsf{T}_{x_1}F\,.$$

Z racji dyfeomorficznego charakteru odwzorowań $\lambda^A_{g_{21}},\ A \in \{1,2\}$ (przesądzającego o odwracalności odwzorowań do nich stycznych) z powyższej tożsamości wywodzimy wniosek o tożsamości rzędów:

$$\mathrm{rk}\,\mathsf{T}_{m_2}F = \mathrm{rk}\,\mathsf{T}_{m_1}F\,,$$

który w konsekwencji przechodniości λ^1 możemy rozciągnąć na całą dziedzinę F. Końcowa część tezy wynika wprost z twierdzenia o rzędzie (odwzorowania). □

Kluczową z punktu widzenia zastosowań w konstrukcji wiązek stowarzyszonych własność działania grupy Liego (ogólniej: topologicznej) na rozmaitości (ogólniej: przestrzeni topologicznej) wprowadzamy w poniższej

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 2. Działanie $\lambda : \mathrm{G}\times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ nazywamy **właściwym**, ilekroć odwzorowanie

$$\Lambda := (\lambda, \mathrm{pr}_2) : \mathrm{G}\times X \longrightarrow X\times X : (g,x) \longmapsto (g \rhd x, x) \tag{1}$$

jest właściwe, tj. ilekroć przeciwobrazy zbiorów zwartych względem Λ są zwarte.

Warunek właściwości działania można przeformułować jak poniżej.

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 3. Działanie $\lambda : \mathrm{G}\times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathscr{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K}\subset X$ podzbiór

$$\mathrm{G}(\mathcal{K}) := \{\ g\in\mathrm{G} \quad | \quad \lambda_g(\mathcal{K})\cap\mathcal{K}\neq\varnothing\ \}$$

jest zwarty.

<u>*Dowód:*</u> Załóżmy najpierw, że działanie λ jest właściwe, tj. przeciwobraz dowolnego podzbioru zwartego w $X\times X$ względem odwzorowania Λ (z Def. 3) jest zwarty. Niechaj $\mathcal{K}\subset X$ będzie wybranym (dowolnie) podzbiorem zwartym, a wtedy podzbiór

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(\mathcal{K}) \quad &\equiv \quad \{\ g\in\mathrm{G} \quad | \quad \exists_{x\in\mathcal{K}}\ :\ g\rhd x\in\mathcal{K}\ \} \equiv \{\ g\in\mathrm{G} \quad | \quad \exists_{x\in X}\ :\ \Lambda(g,x)\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}\ \}\\ &= \quad \mathrm{pr}_1\big(\Lambda^{-1}(\mathcal{K}\times\mathcal{K})\big)\end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągły obraz (rzut kanoniczny pr_1 jest odwzorowaniem ciągłym) przeciwobrazu kwadratu kartezjańskiego zbioru zwartego (czyli zbioru zwartego w topologii produktowej) względem odwzorowania właściwego Λ.

I odwrotnie, niechaj podzbiór $\mathrm{G}(\mathcal{K})$ będzie zwarty dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K}\subset X$. Rozważmy dowolny podzbiór zwarty $\widetilde{\mathcal{K}}\subset X\times X$. Jego ciągłe obrazy $\mathrm{pr}_A(\widetilde{\mathcal{K}})\subset X,\ A\in\{1,2\}$ są zwarte, przeto własność tę ma także ich suma mnogościowa, $\mathcal{K}_{12}\equiv\mathrm{pr}_1(\widetilde{\mathcal{K}})\cup\mathrm{pr}_2(\widetilde{\mathcal{K}})\subset X$. Przy tym oczywiście ilekroć $(g,x)\in\mathrm{G}\times X$ spełnia warunek $\Lambda(g,x)\in\widetilde{\mathcal{K}}$, to tym bardziej para ta spełnia warunek $\Lambda(g,x)\in\mathcal{K}_{12}\times\mathcal{K}_{12}$, oto bowiem relacja $(x_1,x_2)\in\widetilde{\mathcal{K}}$ implikuje relacje $x_1\in\mathrm{pr}_1(\widetilde{\mathcal{K}})\subset\mathcal{K}_{12}$ oraz $x_2\in\mathrm{pr}_2(\widetilde{\mathcal{K}})\subset\mathcal{K}_{12}$, więc też $(x_1,x_2)\in\mathcal{K}_{12}\times\mathcal{K}_{12}$, zatem ostatecznie

$$\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathcal{K}})\subset\Lambda^{-1}(\mathcal{K}_{12}\times\mathcal{K}_{12})\equiv\{\ (g,x)\in\mathrm{G}\times\mathcal{K}_{12} \quad | \quad g\rhd x\in\mathcal{K}_{12}\ \}\subset\mathrm{G}(\mathcal{K}_{12})\times\mathcal{K}_{12}\,,$$

co w świetle twierdzenia o zwartości podzbiorów domkniętych przestrzeni topologicznej przesądza o zwartości $\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathcal{K}})$. Istotnie, podzbiór ten jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc – na mocy twierdzenia o domkniętości podzbiorów zwartych przestrzeni Hausdorffa, a wobec hausdorffowskości X, która jest dziedziczona przez $X\times X$ – domkniętego podzbioru $\widetilde{\mathcal{K}}$, a ponieważ – jak pokazaliśmy – jest podzbiorem (pod)przestrzeni zwartej $\mathrm{G}(\mathcal{K}_{12})\times\mathcal{K}_{12}$ (iloczynu kartezjańskiego zbiorów zwartych), przeto jest – znów na mocy pierwszego z przywoływanych twierdzeń – także zwarty. □

Nierzadko wygodniejszym okazuje się opis działania właściwego zawarty w

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 3. Działanie $\lambda : \mathrm{G}\times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na lokalnie prezwartej[4] przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy,

[4]Przestrzeń topologiczną nazywamy **lokalnie prezwartą**, jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze prezwartym (tj. takim, którego domknięcie jest zwarte) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu.

gdy ze zbieżności dowolnego ciągu punktów

$$\lambda(g.,x.)\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow M\ :\ n\longmapsto g_n\triangleright x_n\,,$$

określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów $x.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow X$ oraz dowolnego ciągu elementów $g.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow \mathrm{G}$, wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu $g.$.

Dowód: Załóżmy najpierw, że odwzorowanie Λ jest właściwe i niechaj $x.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow X$ oraz $g.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow \mathrm{G}$ będą ciągami o własnościach

$$x\coloneqq\lim_{n\to\infty}x_n\in X\,,\qquad\qquad y\coloneqq\lim_{n\to\infty}g_n\triangleright x_n\in X\,.$$

Korzystając z założenia o lokalnej prezwartości X, wybierzmy dowolne zbiory prezwarte $\mathcal{U}\ni x$ oraz $\mathcal{V}\ni y$ zawierające punkty x i – odpowiednio – y wraz z pewnymi ich otoczeniami (otwartymi). Zbieżność $x.$ do x (wzgl. $\lambda(g.,x.)$ do y) oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są zawarte w $\mathcal{U}$ (wzgl. $\mathcal{V}$), więc tym bardziej w zwartym zbiorze $\overline{\mathcal{U}}$ (wzgl. $\overline{\mathcal{V}}$), to jednak oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\Lambda(g.,x.)\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow X\times X\ :\ n\longmapsto(g_n\triangleright x_n,x_n)$ są zawarte w zwartym podzbiorze $\overline{\mathcal{U}}\times\overline{\mathcal{V}}$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu $(g.,x.)\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow \mathrm{G}\times X\ :\ n\longmapsto(g_n,x_n)$ są zawarte w podzbiorze $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}}\times\overline{\mathcal{V}})$, który wobec właściwego charakteru Λ jest zwarty. Ta cecha $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}}\times\overline{\mathcal{V}})$ przesądza o istnieniu podciągu zbieżnego ciągu $(g.,x.)$, co w szczególności implikuje zbieżność odnośnego podciągu ciągu $g.$.

I odwrotnie, załóżmy, że spełniona jest implikacja z końca tezy dowodzonego stwierdzenia. Ustalmy podzbiór zwarty $\mathcal{K}\subset X\times X$ i wybierzmy dowolny ciąg $(g.,x.)$ punktów w zbiorze $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$. Jego obraz w $X\times X$ względem Λ jest zawarty w zwartym podzbiorze $\mathcal{K}$, można zeń przeto wybrać podciąg zbieżny, którego przeciwobraz przecina się z ciągiem wyjściowym $(g.,x.)$ definiując (pod)ciąg, o którym mowa we wspomnianej wcześniej implikacji. Tym sposobem otrzymujemy podciąg $(g.,x.)$ w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})\subset\mathrm{G}\times X$ zbieżny w $\mathrm{G}\times X$ w topologii produktowej, a ponieważ zbiór $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc też domkniętego (j/w) podzbioru $\mathcal{K}$, przeto granica tego zbieżnego podciągu leży w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$, co ostatecznie dowodzi zwartości $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ i tym samym przekonuje, że Λ jest odwzorowaniem właściwym. □

Przykładu bezpośredniego zastosowania powyższego rezultatu jest

Stwierdzenie 3. Działanie topologiczne zwartej grupy topologicznej na dowolnej rozmaitości różniczkowalnej jest właściwe.

Dowód: Każdy ciąg elementów grupy ma podciąg zbieżny z racji zwartości grupy, teza wynika zatem wprost ze Stw. 2. □

Mamy także

Stwierdzenie 4. Działanie dowolnej podgrupy domkniętej dowolnej grupy Liego stanowiące ograniczenie do podgrupy działania regularnego prawego (wzgl. lewego) grupy na sobie jest właściwe.

Dowód: Zastosujemy kryterium ze Stw. 2. Niechaj $g.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathrm{G}$ będzie ciągiem zbieżnym, $h.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathrm{H}$ zaś – takim, dla którego ciąg $g.\cdot h.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ n\longmapsto g_n\cdot h_n$ jest zbieżny. Wobec ciągłości operacji grupowych w G zbieżnym jest wówczas także ciąg $(\mathrm{Inv}\circ g.)\cdot(g.\cdot h.)=h.$. □

I wreszcie kluczowe dla naszych dalszych rozważań

Stwierdzenie 5. Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe.

Dowód: Rozważmy ciągi $p.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ i $g.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathrm{G}$ o własnościach

$$\lim_{n\to\infty}p_n=p\,,\qquad\qquad\lim_{n\to\infty}(p_n\triangleleft g_n)=\widetilde{p}\,.$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p}) &\equiv \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\lim_{n\to\infty}(p_n \triangleleft g_n)\big) = \lim_{n\to\infty}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n\to\infty}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_n)\\ &= \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\lim_{n\to\infty}p_n\big) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\,,\end{aligned}$$

która w świetle Def. **??** pozwala zapisać

$$\widetilde{p} = p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\,.$$

Niechaj $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \in \mathcal{O}_i$, gdzie $\mathcal{O}_i$ jest elementem pokrycia trywializującego P_{G}. Istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ o własności

$$\forall_{n\ge N}\ :\ p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\,,$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi $p_{N+\cdot}$ i $p_{N+\cdot} \triangleleft g_{N+\cdot}$ w obrazie trywializacji $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$, w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n,\gamma_n)\,,\qquad\qquad \tau_i(p) =: (x,\gamma)\,,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,\gamma_n) = (x,\gamma)\,,$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n,\gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n,\gamma_n \cdot g_n)$$

oraz

$$\tau_i(\widetilde{p}) = \tau_i\big(p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\big) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p}) = (x,\gamma) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p}) = \big(x,\gamma\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\big)\,,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}(\gamma_n \triangleleft g_n) = \gamma\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\,.$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek

$$\lim_{n\to\infty} g_n \equiv \lim_{n\to\infty}\big(\gamma_n^{-1}\cdot(\gamma_n\cdot g_n)\big) = \gamma^{-1}\cdot\big(\gamma\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\,,$$

który przesądza o słuszności dowodzonej tezy. □

Idąc tym tropem dalej w kierunku fizykalnych zastosowań

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną, M zaś – rozmaitością z działaniem (lewostronnym) $\lambda\ :\ \mathrm{G}\times M \longrightarrow M$ grupy G. Rozważmy rozmaitość produktową $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$. Działanie grupy G dane wzorem

$$\widetilde{\lambda}_\cdot\ :\ \mathrm{G}\times(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M\ :\ \big(g,(p,x)\big) \longmapsto \big(r\big(p,g^{-1}\big),\lambda(g,m)\big)$$

(2)

jest wolne i właściwe.

<u>*Dowód:*</u> Oczywisty. □

Tytułem przygotowania gruntu pod wynik wieńczący nasze rozważania wysłowimy jeszcze

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $((X,\mathscr{T}(X)),\lambda)$ będzie przestrzenią z działaniem topologicznym grupy topologicznej G. Rzut kanoniczny

$$\pi_{X/\mathrm{G}}\ :\ X \longrightarrow X/\mathrm{G}$$

na przestrzeń orbit

$$X/\mathrm{G} := \{\ \mathrm{G}\triangleright x \quad|\quad x\in X\ \}$$

jest odwzorowaniem otwartym[5] względem topologii ilorazowej na X/G.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy zbiór otwarty $\mathcal{O} \subset X$. Jego obraz $\pi_{X/\mathrm{G}}(\mathcal{O})$ jest – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej – otwarty w X/G, jeśli przeciwobraz tego ostatniego,

$$\pi_{X/\mathrm{G}}^{-1}(\pi_{X/\mathrm{G}}(\mathcal{O})) = \{ \lambda(g,x) \quad | \quad (g,x) \in \mathrm{G} \times \mathcal{O} \} \equiv \mathrm{G} \rhd \mathcal{O}$$

jest otwarty w X. Tak jednak jest w istocie, oto bowiem zbiór ten jest sumą mnogościową

$$\mathrm{G} \rhd \mathcal{O} = \bigcup_{g \in \mathrm{G}} \lambda_g(\mathcal{O})$$

obrazów zbioru otwartego $\mathcal{O}$ względem automorfizmów λ_g przestrzeni X, czyli zbiorów otwartych. □

Możemy już sformułować fundamentalne

Twierdzenie 3 (O rozmaitości ilorazowej)**.** Przyjmijmy notację Def. 3 oraz Lematu 1 (i wcześniejszą). Ilekroć działanie grupy Liego G na rozmaitości $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit M/G jest rozmaitością topologiczną wymiaru $\dim M - \dim \mathrm{G}$ i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny $\pi_{M/\mathrm{G}}$ jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaitości nosi miano **rozmaitości ilorazowej**.

<u>*Dowód:*</u> Zaczniemy od zidentyfikowania struktury rozmaitości topologicznej na zbiorze orbit M/G. Topologia M/G jest topologią ilorazową indukowaną z M: zbiór $\mathcal{O} \subset M/\mathrm{G}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz $\pi_{M/\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w M. Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, wykorzystajmy relację równoważności $\mathscr{R}_\lambda$ na M, jaką jest przynależność do tej samej orbity działania G,

$$\mathscr{R}_\lambda = \Lambda(\mathrm{G} \times M) \subset M \times M\,,$$

gdzie Λ jest odwzorowaniem zdefiniowanym w Równ. 1. Relacja ta zadaje rozkład M na wzajem rozłączne orbity działania grupy G. Niechaj x i y będą punktami w M, których obrazy $\pi_{M/\mathrm{G}}(x)$ i $\pi_{M/\mathrm{G}}(y)$ są dwoma różnymi punktami w przestrzeni orbit, tj. $\pi_{M/\mathrm{G}}(x) \neq \pi_{M/\mathrm{G}}(y)$, a wtedy $(x_1, x_2) \notin \mathscr{R}_\lambda$, a ponieważ podzbiór $\mathscr{R}_\lambda \subset M \times M$ jest w świetle twierdzenia o domkniętości odwzorowania właściwego o prezwartej przeciwdziedzinie domknięty w topologii produktowej na $M \times M$ jako ciągły obraz zbioru domkniętego $\mathrm{G} \times M$ względem odwzorowania właściwego Λ, przeto istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_{(x_1,x_2)} \ni (x_1, x_2)$ o własności $\mathcal{O}_{(x_1,x_2)} \cap \mathscr{R}_\lambda = \varnothing$. Wprost na mocy definicji topologii produktowej otoczenie takie jest sumą mnogościową pewnej rodziny iloczynów kartezjańskich podzbiorów otwartych w M, wybierając zatem dowolny z nich – powiedzmy $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathscr{T}(M)$ – otrzymujemy relacje $\mathcal{O}_\alpha \ni x_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ oraz $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \cap \mathscr{R}_\lambda = \varnothing$, a zatem także $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_\alpha) \ni \pi_{M/\mathrm{G}}(x_\alpha)$, przy czym koniecznie $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_1) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_2) = \varnothing$, w przeciwnym bowiem razie istniałyby punkty $y_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ należące do wspólnej orbity działania G, a zatem także $(y_1, y_2) \in \mathscr{R}_\lambda \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, co przeczyłoby rozłączności $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ i $\mathscr{R}_\lambda$. W konsekwencji Lematu 1 zbiory $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_\alpha)$ są otwartymi otoczeniami punktów $\pi_{M/\mathrm{G}}(x_\alpha)$ w przestrzeni orbit.

W następnej kolejności dokonamy rozkładu rozmaitości M na włożone weń gładko orbity działania grupy G, po czym stowarzyszymy z tym rozkładem stosowne lokalne mapy, w których współrzędne kartografujące kierunki transwersalne do (bliskich sobie) orbit zostaną ostatecznie wykorzystane w konstrukcji atlasu przestrzeni orbit. Punktem wyjścia do tak zakreślonej taktyki jest upewnienie się, że orbity działania grupy są w istocie podrozmaitościami gładko włożonymi w M. W tym celu rozważymy odwzorowanie gładkie, określone dla dowolnego (ustalonego) punktu $x \in M$,

$$\Omega_x \equiv \lambda(\cdot, x) \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow M \;:\; g \longmapsto \lambda(g,x)\,,$$

o oczywistej własności

$$\Omega_x(\mathrm{G}) = \mathrm{G} \rhd x\,.$$

[5]**Odwzorowanie otwarte** między przestrzeniami topologicznymi to takie, które przeprowadza podzbiory otwarte dziedziny w podzbiory otwarte przeciwdziedziny.

Odwzorowanie to jest jawnie G-ekwiwariantne,

$$\forall_{g\in \mathrm{G}}\ :\ \Omega_x\circ \ell_g = \lambda_g\circ \Omega_x\,,$$

tj. splata ze sobą działania G: lewe regularne na sobie oraz λ na M, a ponieważ pierwsze z tych działań jest przechodnie, przeto możemy odnieść do Ω_x tezę Tw. 2, wnioskując o stałości rzędu tego odwzorowania. Ponadto jest ono injekcją, oto bowiem równość

$$g_2\rhd x = \Omega_x(g_2) = \Omega_x(g_1) = g_1\rhd x \qquad\Longleftrightarrow\qquad \big(g_2^{-1}\cdot g_1\big)\rhd x = x$$

oznacza – wobec założenia dotyczącego charakteru działania λ – równość

$$g_2^{-1}\cdot g_1 = e \qquad\Longleftrightarrow\qquad g_2 = g_1\,.$$

To jednak w połączeniu z wcześniejszą konkluzją, a w odwołaniu do twierdzenia o immersywności gładkiej injekcji o stałym rzędzie (wynikającego wprost z twierdzenia o stałym rzędzie), pozwala stwierdzić, że Ω_x jest immersją. Przy tym ilekroć $\mathcal{K}\subset M$ jest zwarty, więc też (wobec hausdorffowskości M) domknięty, jego przeciwobraz $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty w G wobec ciągłości Ω_x, a ponieważ dla dowolnego należącego doń elementu g zachodzi relacja $g\rhd x\in\mathcal{K}$, czyli też

$$\big(g\rhd\big(\mathcal{K}\cup\{x\}\big)\big)\cap\big(\mathcal{K}\cup\{x\}\big) = \big(g\rhd\mathcal{K}\cup\{g\rhd x\}\big)\cap\big(\mathcal{K}\cup\{x\}\big)\supset\{g\rhd x\}\neq\varnothing\,,$$

co implikuje jego zawieranie się

$$\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})\subset \mathrm{G}\big(\mathcal{K}\cup\{x\}\big)$$

w zbiorze $\mathrm{G}(\mathcal{K}\cup\{x\})$, który jest zwarty na mocy Stw. 1, przeto $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest zwarty. To zaś oznacza, że Ω_x jest odwzorowaniem właściwym, a zatem ostatecznie – w konsekwencji poprzednich ustaleń – gładkim włożeniem (jest nim każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym – patrz: Niezbędnik Rozmaitości).

Wybierzmy (dowolnie) punkt $x\in M$, a wraz z nim jego przeciwobraz $e\in\mathrm{G}$ względem Ω_x, i lokalne mapy: $\kappa_e\ :\ \mathcal{O}_e\longrightarrow\mathbb{R}^{\times D}$, $D=\dim\mathrm{G}$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_e$ elementu neutralnego e w G oraz $\kappa_x\ :\ \mathcal{O}_x\longrightarrow\mathbb{R}^{\times N}$, $N=\dim M$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu x w M, w których lokalna prezentacja włożenia Ω_x przybiera postać kanoniczną (jako immersja), czyli

$$\mathrm{G}\rhd\{x\}\cap\mathcal{O}_x = \kappa_x^{-1}\big(\mathcal{U}_x\times\{\mathbf{0}_n\}\big)\,,$$

gdzie $\mathcal{U}_x\in\mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times D})$ jest homeomorficznym obrazem fragmentu orbity x zawartego w $\mathcal{O}_x$. Niechaj

$$\Delta_x := \kappa_x^{-1}\big(\{\mathbf{0}_D\}\times\mathbb{R}^{\times N}\big)$$

będzie podrozmaitością $\mathcal{O}_x$ transwersalną do (fragmentu) rzeczonej orbity $\mathrm{G}\rhd\{x\}$, wyznaczającą rozkład przestrzeni stycznej

$$\mathsf{T}_xM = \mathsf{T}_x(\mathrm{G}\rhd\{x\})\oplus\mathsf{T}_x\Delta_x\,,$$

w którym wobec immersywności Ω_x identyfikujemy

$$\mathsf{T}_e\Omega_x\big(\mathsf{T}_e\mathrm{G}\big)\equiv\mathsf{T}_x\big(\mathrm{G}\rhd\{x\}\big)\subset\mathsf{T}_xM\,. \tag{3}$$

Oznaczmy dalej

$$\delta_x := \lambda\restriction_{\mathrm{G}\times\Delta_x}\ :\ \mathrm{G}\times\Delta_x\longrightarrow M\,.$$

Wykażemy, że δ_x jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu punktu $(e,x)\in\mathrm{G}\times\Delta_x$. W tym celu wykorzystamy gładkie włożenie

$$\imath_x\ :\ \mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\times\Delta_x\ :\ g\longmapsto(g,x)$$

do rozłożenia odwzorowania Ω_x wedle schematu

$$\Omega_x = \delta_x\circ\imath_x\,,$$

a zatem także – stycznego do niego:

$$\mathsf{T}_e\Omega_x = \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\circ\mathsf{T}_e\imath_x\,.$$

Zważywszy Równ. (3), konstatujemy prawdziwość relacji

$$\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G}\times\Delta_x)\big)\quad\equiv\quad\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_e\mathrm{G}\oplus\mathsf{T}_x\Delta_x\big)\supset\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_e\mathrm{G}\oplus\{0_{\mathsf{T}_x\Delta_x}\}\big)$$

$$\equiv \quad \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x \circ \mathsf{T}_e \imath_x\big(\mathsf{T}_e \mathrm{G}\big) = \mathsf{T}_e \Omega_x\big(\mathsf{T}_e \mathrm{G}\big) = \mathsf{T}_x\big(\mathrm{G} \triangleright \{x\}\big) .$$

Wprowadźmy dalej gładkie włożenie

$$\imath_e \ : \ \Delta_x \longrightarrow \mathrm{G} \times \Delta_x \ : \ y \longmapsto (e,y)$$

podrozmaitości transwersalnej do (lokalnego fragmentu) orbity $\mathrm{G} \triangleright \{x\}$, aby móc rozłożyć gładkie włożenie $\jmath_{\Delta_x} \ : \ \Delta_x \longrightarrow M$ w postaci

$$\jmath_{\Delta_x} = \delta_x \circ \imath_e$$

i – co za tym idzie – styczne do niego:

$$\mathsf{T}_y \jmath_{\Delta_x} = \mathsf{T}_{(e,y)}\delta_x \circ \mathsf{T}_y \imath_e .$$

Wobec oczywistej równości

$$\mathsf{T}_x \imath_e(\mathsf{T}_x \Delta_x) = \{0_{\mathsf{T}_e \mathrm{G}}\} \oplus \mathsf{T}_x \Delta_x$$

otrzymujemy tym razem relację

$$\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G} \times \Delta_x)\big) \quad \supset \quad \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\{0_{\mathsf{T}_e \mathrm{G}}\} \oplus \mathsf{T}_x \Delta_x\big) \equiv \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x \circ \mathsf{T}_x \imath_e(\mathsf{T}_x \Delta_x)$$

$$= \quad \mathsf{T}_x \jmath_{\Delta_x}(\mathsf{T}_x \Delta_x) \equiv \mathsf{T}_x \Delta_x \subset \mathsf{T}_x M ,$$

ostatecznie zatem stwierdzamy, że

$$\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G} \times \Delta_x)\big) \supset \mathsf{T}_x(\mathrm{G} \triangleright \{x\}) \oplus \mathsf{T}_x \Delta_x \equiv \mathsf{T}_x M ,$$

skoro zaś zarazem

$$\mathsf{T}_x M \supset \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G} \times \Delta_x)\big) ,$$

to nieuchronnie

$$\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G} \times \Delta_x)\big) = \mathsf{T}_x M ,$$

co dowodzi surjektywności $\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x$, a ponieważ jest też – wobec ustalonej wcześniej immersywności Ω_x –

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G} \times \Delta_x) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_e \mathrm{G} + \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x \Delta_x$$

$$= \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x(\mathrm{G} \triangleright \{x\}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x \Delta_x \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x M ,$$

przeto $\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x$ jawi się bijekcją. Na tym etapie możemy już odwołać się do twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań, aby orzec istnienie pewnego otoczenia otwartego $\mathcal{V}_x$ punktu $(e,x) \in \mathrm{G} \times \Delta_x$ odwzorowywanego dyfeomorficznie przez (ograniczenie) δ_x w pewne otoczenie otwarte $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ punktu $x \in M$. Biorąc pod uwagę naturę topologii (produktowej) na $\mathrm{G} \times \Delta_x$ (wedle schematu myślowego wyłożonego na początku niniejszego dowodu w uzasadnieniu hausdorffowskości topologii ilorazowej na przestrzeni orbit), upewniamy się, że pierwsze z tych otoczeń można wybrać w postaci produktowej $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_e \times \mathcal{W}_x$, przy czym z każdego z otoczeń: $\mathcal{W}_a$, $a \in \{e,x\}$ można wyjąć prezwarte przeciwobrazy pewnych kul otwartych $B^D(\widetilde{\kappa}_e(e) = \mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \equiv \widetilde{\kappa}_e(\widetilde{\mathcal{W}}_e)$, $\varepsilon_e > 0$ oraz – odpowiednio – $B^{N-D}(\widetilde{\kappa}_x(x) = \mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \equiv \widetilde{\kappa}_x(\widetilde{\mathcal{W}}_x)$, $\varepsilon_x > 0$ względem lokalnych map $\widetilde{\kappa}_e \ : \ \mathcal{W}_e \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$ oraz – odpowiednio – $\widetilde{\kappa}_x \ : \ \mathcal{W}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N-D}$. W dalszej części naszej analizy skupimy uwagę na otoczeniu produktowym $\widetilde{\mathcal{V}}_x \equiv \widetilde{\mathcal{W}}_e \times \widetilde{\mathcal{W}}_x$.

W następnej kolejności pokażemy, że otoczenie $\widetilde{\mathcal{W}}_x \subset \Delta_x$ można wybrać na tyle małym, ażeby każda orbita działania G przecinała je w co najwyżej jednym punkcie. Załóżmy przeciwnie i rozważmy przeliczalną bazę otoczeń x w $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ złożoną z przeciwobrazów względem $\widetilde{\kappa}_x$ rodziny kul otwartych $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n)$, $r_n := \frac{1}{E(\varepsilon_x^{-1})+n}$, $n \in \mathbb{N}$. W każdym z przeciwobrazów $\mathcal{B}_n \equiv \widetilde{\kappa}_x^{-1}(B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n))$ tkwi para punktów x_n oraz $y_n \neq x_n$ należących do tej samej orbity, tj. spełniających warunek $y_n = g_n \triangleright x_n$ dla pewnego elementu $g_n \in \mathrm{G}$. Przy tym wobec założonej postaci bazy otoczeń oba ciągi punktów w (prezwartym) $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ zbiegają do x,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} (g_n \triangleright x_n) ,$$

a zatem – w świetle Stw. 2, a z racji właściwego charakteru λ – ciąg $g.$ zdefiniowany przez parę ciągów $(x., y.)$ zawiera podciąg $g_{n.}$ zbieżny do pewnego elementu $g \in \mathrm{G}$. Ciągłość działania λ pozwala nam zatem zapisać ciąg równości

$$g \triangleright x \equiv \lambda\big(\lim_{k\to\infty}(g_{n_k}, x_{n_k})\big) = \lim_{k\to\infty}\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) \equiv \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x\,,$$

a ponieważ mamy do czynienia z działaniem wolnym, przeto nieodzownie $g = e$. Jednakowoż dla dostatecznie dużych wartości $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $g_{n_k} \in \widetilde{\mathcal{W}}_e$, przy czym $g_{n_k} \neq e$ (wszak $y_{n_k} \neq x_{n_k}$) więc też

$$\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) = y_{n_k} = \lambda(e, y_{n_k})\,,$$

co z racji injektywności $\delta_x\restriction_{\widetilde{\mathcal{W}}_e\times\widetilde{\mathcal{W}}_x} \equiv \lambda\restriction_{\widetilde{\mathcal{W}}_e\times\widetilde{\mathcal{W}}_x}$ implikuje równość

$$(g_{n_k}, x_{n_k}) = (e, y_{n_k})\,,$$

prowadzącą do jawnej sprzeczności. Otoczenie $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ o postulowanej cesze zawsze zatem istnieje.

Rozważmy teraz złożenie homeomorfizmów

$$\phi_x := (\widetilde{\kappa}_e \times \widetilde{\kappa}_x) \circ \big(\delta_x\restriction_{\widetilde{\mathcal{V}}_x}\big)^{-1} \;:\; \widetilde{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{V}}_x \equiv \widetilde{\mathcal{W}}_e \times \widetilde{\mathcal{W}}_x \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x)\,.$$

Pokażemy, że określa ono lokalną mapę zgodną z działaniem grupy G w tym naturalnym sensie, że orbity tegoż działania są w tej mapie hiperpłaszczyznami parametryzowanymi przez pierwszych D współrzędnych. Zacznijmy od tego, że wobec otwartości zarówno swojej dziedziny, jak i przeciwdziedziny homeomorfizm ϕ_x dopuszcza postulowaną interpretację, pozostaje więc jedynie upewnić się co do słuszności naszych oczekiwań dotyczących opisu fragmentów orbit zawartych w jego dziedzinie. Mamy

$$\begin{aligned}\phi_x^{-1} \;:&\quad B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{O}}_x\\ :&\quad (\xi,\zeta) \longmapsto \delta_x\big(\widetilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)\big) \equiv \lambda\big(\widetilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)\big)\,,\end{aligned}$$

bez trudu przeto stwierdzamy, że dowolna hiperpowierzchnia $\zeta = \zeta_* = \mathrm{const}$ jest zawarta w pojedynczej orbicie, oto bowiem jej homeomorficzny przeciwobraz w M względem ϕ_x spełnia relację

$$\phi_x^{-1}\big(B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times \{\zeta_*\}\big) \equiv \lambda\big(\widetilde{\mathcal{W}}_e \times \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}\big) \subset \lambda\big(\mathrm{G} \times \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}\big) \equiv \mathrm{G} \triangleright \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}\,.$$

Rozumowanie to pokazuje, że dowolna orbita $\mathrm{G} \triangleright \{y\}$, $y \in M$ przecina $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ wzdłuż sumy mnogościowej (fragmentów) hiperpowierzchni o opisie współrzędniowym $\zeta = \zeta_i = \mathrm{const}$, $i \in I_y$ dla pewnego zbioru indeksów I_y. Otoczenie $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ zostało jednak wybrane tak, iżby dowolna orbita przecinała je w *co najwyżej jednym* punkcie, wobec czego $|I_y| \leq 1$. Lokalna mapa ϕ_x jest zatem – w istocie – zgodna z działaniem G w określonym wyżej znaczeniu i może być wykorzystana w kartografowaniu przestrzeni orbit na otoczeniu punktu $\pi_{M/\mathrm{G}}(x) \equiv [x]$.

Skonstruujemy teraz lokalną mapę na otoczeniu $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$ punktu $[x]$, pamiętając, że otwartość zbioru $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x) \ni [x]$ w topologii ilorazowej jest zapewniona przez otwartość rzutu kanonicznego $\pi_{M/\mathrm{G}}$, stwierdzoną w Lemacie 1. Oznaczmy lokalne cięcie przez x w poprzek orbit zawartych w $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ symbolem

$$\widetilde{\Delta}_x := \phi_x^{-1}\big(\{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x)\big)$$

i zauważmy, że ograniczenie rzutu kanonicznego

$$\pi_{M/\mathrm{G}}\restriction_{\widetilde{\Delta}_x} \;:\; \widetilde{\Delta}_x \longrightarrow \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$$

jest bijekcją w świetle założeń poczynionych w odniesieniu do charakteru przecięć orbit działania G z $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ oraz z racji potwierdzonej zgodności mapy ϕ_x z tymże działaniem. Przy tym ilekroć $\mathcal{W} \subset \widetilde{\Delta}_x$ jest podzbiorem otwartym, jego obraz w przestrzeni orbit

$$\begin{aligned}\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{W}) &\equiv \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \phi_x^{-1}\big(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})\big)\\ &= \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \phi_x^{-1}\big(B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})\big)\end{aligned}$$

jest w oczywisty sposób otwarty jako obraz względem złożenia odwzorowań otwartych zbioru $B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej – wszak ϕ_x jest homeomorfizmem, więc też odwzorowaniem otwartym, a rzut na drugą składową zadanego przezeń zbioru $\phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej, czyli będącego sumą mnogościową iloczynów kartezjańskich zbiorów otwartych, jest takąż sumą rzutów tychże iloczynów na drugą składową, więc także zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{\times N-D}$. Koniec końców odwzorowanie ograniczone $\pi_{M/\mathrm{G}}\restriction_{\widetilde{\Delta}_x}$ jest zatem homeomorfizmem, którego ciągłą odwrotność będziemy oznaczać symbolem

$$\sigma_{[x]} := \left(\pi_{M/\mathrm{G}}\restriction_{\widetilde{\Delta}_x}\right)^{-1} \ :\ \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Delta}_x \,.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\psi_{[x]} := \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x \circ \sigma_{[x]} \ :\ \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Delta}_x \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x) \longrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x)\,,$$

które – jak łatwo widać – jest homeomorfizmem otoczenia otwartego $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$ na kulę otwartą $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^{\times N-D}$, czyli – innymi słowy – lokalną mapą klasy C^0. Należy przy tym podkreślić, że lokalna prezentacja rzutu kanonicznego określona przez lokalną mapę ϕ_x na $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ oraz stowarzyszoną z nią lokalną mapę $\psi_{[x]}$ na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$ przyjmuje prostą postać

$$\psi_{[x]} \circ \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \phi_x^{-1} \ :\ B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x) \twoheadrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x)\,,$$

o jawnie submersywnym charakterze. Odwzorowanie $\sigma_{[x]}$ ma zatem naturalną interpretację ciecia lokalnego submersji $\pi_{M/\mathrm{G}}$. Jeśli więc zaindukujemy strukturę rozmaitości na M/G z tej na rozmaitości M (j/w) przy użyciu podatlasu na M utworzonego przez wszystkie możliwe mapy lokalne na M zgodne z działaniem G i wszystkie cięcia lokalne rzutu kanonicznego nad obrazami – względem tegoż cięcia – ich dziedzin, to dla zakończenia dowodu twierdzenia pozostanie nam jedynie wykazać gładkość odwzorowań przejścia między mapami określonymi na przecinających się niepusto otoczeniach w przestrzeni orbit, a na koniec – jedyność tak otrzymanej struktury gładkiej.

Niechaj zatem $\psi_{[x_A]} \ :\ \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_A}) \xrightarrow{\cong} B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_{x_A}),\ A \in \{1,2\}$ będą dwiema lokalnymi mapami spełniającymi warunek $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \neq \emptyset$, a stowarzyszonymi z lokalnymi mapami $\phi_{x_A} \ :\ \widetilde{\mathcal{O}}_{x_A} \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_{e;A}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_n;\varepsilon_{x_A})$. Przecinanie się rzutów $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_A})$ otoczeń $\widetilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ odnośnych punktów x_A oznacza, że są w tych otoczeniach punkty $y_A \in \widetilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ należące do tej samej orbity, tj. $y_2 = g_{21} \triangleright y_1$ dla pewnego elementu $g_{21} \in \mathrm{G}$, możemy zatem bez straty ogólności (dokonawszy – jeśli trzeba – trywialnego przesunięcia w przeciwdziedzinach obu map ϕ_{x_A}) przyjąć, że $y_A = x_A$ i jest spełniony warunek

$$x_2 = g_{21} \triangleright x_1\,.$$

Załóżmy najpierw, że $g_{21} = e$, a wtedy możemy wprost rozpatrzeć odwzorowanie przejścia między mapami $\phi_{x_1} = (\xi_1,\zeta_1)$ i $\phi_{x_2} = (\xi_2,\zeta_2)$ na zbiorze $\mathcal{O}_{12} := \widetilde{\mathcal{O}}_{x_1} \cap \widetilde{\mathcal{O}}_{x_2}$. Jako że przecięcia dowolnej orbity z każdym z otoczeń odpowiadają stałej i jedynej wartości ζ_1 *oraz* takiejż wartości ζ_2, przeto gładkie (wprost na mocy konstrukcji – wszak ϕ_{x_A} są mapami na gładkiej rozmaitości M) odwzorowanie przejścia między obiema mapami jest postaci

$$\begin{aligned}\phi_{x_2} \circ \left(\phi_{x_1}\restriction_{\mathcal{O}_{12}}\right)^{-1} \quad &:\quad \phi_{x_1}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \phi_{x_2}(\mathcal{O}_{12}) \\ &:\quad \big(\xi_1(y),\zeta_1(y)\big) \longmapsto \big(F_1 \circ (\xi_1,\zeta_1), F_2 \circ \zeta_1\big)(y)\,,\end{aligned}$$

gdzie F_1 i F_2 są pewnymi odwzorowaniami gładkimi. W szczególności więc otrzymujemy relację

$$\zeta_2(y) = F_2 \circ \zeta_1(y)\,, \quad y \in \mathcal{O}_{12}\,,$$

z której odczytujemy jawnie gładką postać odwzorowania przejścia między mapami indukowanymi:

$$\begin{aligned}&\psi_{[x_2]} \circ \left(\psi_{[x_1]}\restriction_{\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{12})}\right)^{-1} \\ :\quad &\psi_{[x_1]} \circ \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \psi_{[x_2]} \circ \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{12}) \\ :\quad &\mathrm{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \left(\pi_{M/\mathrm{G}}\restriction_{\widetilde{\Delta}_{x_1}}\right)^{-1}\big(\pi_{M/\mathrm{G}}(y)\big) \equiv \zeta_1(y) \longmapsto \zeta_2(y) = F_2\big(\zeta_1(y)\big)\,.\end{aligned}$$

W przypadku $g_{21} \neq e$ nie możemy wprawdzie *a priori* rozważać odwzorowań przejścia między mapami ϕ_{x_1} i ϕ_{x_2} na $\mathcal{O}_{12}$ (zbiór ten może być w szczególności pusty), ale możemy zastąpić mapę lokalną ϕ_{x_2} oraz cięcie lokalne $\sigma_{[x_2]}$ użyte w definicji mapy lokalnej $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{x_2})$

innymi z tego samego podatlasu na M i – odpowiednio – zbioru cięć lokalnych rzutu kanonicznego, indukujących mapy lokalne na przestrzeni orbit, które wspólnie wyznaczają *tę samą* mapę lokalną $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{x_2})$, ale jednocześnie przeprowadzają punkt z jej dziedziny przez zbiór otwarty w nakryciu M przecinający się z $\mathcal{O}_{x_1}$ w pewnym otoczeniu otwartym x_1, co sprowadza nas do poprzednio zweryfikowanego przypadku. Otóż więc użyjmy automorfizmu $\lambda_{g_{21}}$, aby zdefiniować odwzorowanie

$$\phi^{21}_{x_1} := \phi_{x_2} \circ \lambda_{g_{21}} \;:\; \lambda_{g_{21}^{-1}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;2}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_2})$$

na otwartym (wprost z konstrukcji) otoczeniu $\lambda_{g_{21}^{-1}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ punktu x_1. Jako że automorfizm $\lambda_{g_{21}}$ przeprowadza orbity na orbity, $\phi^{21}_{x_1}$ jest mapą lokalną zgodną z działaniem G. Definicję tę uzupełniamy stosowną definicją lokalnego cięcia rzutu kanonicznego nad $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})$,

$$\sigma^{21}_{[x_2]} := \lambda_{g_{21}^{-1}} \circ \sigma_{[x_2]} \,.$$

Ta ostatnia ma sens, gdyż

$$\pi_{M/\mathrm{G}} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} = \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \sigma_{[x_2]} = \mathrm{id}_{\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})} \,,$$

a przy tym zgodnie z zapowiedzią odtwarza, w połączeniu z nową mapą lokalną, wyjściową mapę lokalną na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})$, o czym przekonuje bezpośredni rachunek:

$$\psi^{21}_{[x_2]} := \mathrm{pr}_2 \circ \phi^{21}_{x_1} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \lambda_{g_{21}} \circ \lambda_{g_{21}^{-1}} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} \equiv \psi_{[x_2]} \,.$$

To kończy dowód istnienia struktury gładkiej, o której jest mowa w tezie twierdzenia. Należy jeszcze wykazać struktury tej jedyność.

W tym celu rozważmy dowolne dwie takie struktury na tej samej przestrzeni orbit M/G, oznaczając odnośne jej kopie indeksem: $(M/\mathrm{G})_A$, $A \in \{1,2\}$ dla wygodnego odróżnienia. Wprost na mocy poczynionego założenia rzut kanoniczny $\pi_{M/\mathrm{G}} \,:\, M \twoheadrightarrow (M/\mathrm{G})_A$, $A \in \{1,2\}$ jest w obu przypadkach gładką surjektywną submersją, można zatem odnieść do niego tezę Stw.2.1 (o kwaziuniwersalnej własności submersji), i to na dwa sposoby: możemy oto zapisać diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & (M/\mathrm{G})_2 \\ M \arrow[ur, "\pi_{M/\mathrm{G}}"] \arrow[r, "\pi_{M/\mathrm{G}}"'] & (M/\mathrm{G})_1 \arrow[u, "\mathrm{id}_{M/\mathrm{G}}"'] \end{tikzcd} \,,$$

w którym traktujemy $\pi_{M/\mathrm{G}} \,:\, M \twoheadrightarrow (M/\mathrm{G})_1$ jako submersję, $\pi_{M/\mathrm{G}} \,:\, M \twoheadrightarrow (M/\mathrm{G})_2$ zaś (to samo odwzorowanie) – jako odwzorowanie referencyjne, którego gładkość przesądza o gładkości $\mathrm{id}_{M/\mathrm{G}}$; możemy też zamienić miejscami (i rolami) $(M/\mathrm{G})_1$ i $(M/\mathrm{G})_2$, co prowadzi do wniosku, że także wtedy, gdy traktujemy $\mathrm{id}_{M/\mathrm{G}}$ jako odwzorowanie z $(M/\mathrm{G})_2$ w $(M/\mathrm{G})_1$, jest ono gładkie, co jest równoznaczne z równoważnością obu struktur różniczkowych. □

Uwaga 1. Często przyjmuje się, że nośnik struktury rozmaitości topologicznej powinien spełniać drugi aksjomat przeliczalności. Bez trudu przekonujemy się, że przestrzeń orbit M/G ma tę cechę, oto bowiem obraz dowolnej skończonej lub przeliczalnie nieskończonej bazy $\mathscr{O} := \{\mathcal{O}_n\}_{n \in I \subset \mathbb{N}}$ topologii M względem rzutu kanonicznego na przestrzeń orbit, $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathscr{O}) = \{\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_n)\}_{n \in I \subset \mathbb{N}}$, jest – w świetle Lematu 1 – odpowiednią bazą topologii (ilorazowej) M/G. Istotnie, $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathscr{O})$ jest pokryciem otwartym M/G, a ponadto dla dowolnej pary $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}), \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2})$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ elementów tej rodziny o niepustym przecięciu $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni \mathrm{G} \triangleright x$, $x \in M$ istnieje element $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \subset \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2})$ o własności $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \ni \mathrm{G} \triangleright x$. W rzeczy samej, z relacji $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni \mathrm{G} \triangleright x$ wynika istnienie punktów $x_A \in \mathcal{O}_{n_A}$, $A \in \{1,2\}$ oraz elementu grupy $g_{21} \in \mathrm{G}$ spełniających relację $x_2 = g_{21} \triangleright x_1$, wobec czego zbiór $\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})$ ma niepuste przecięcie z $\mathcal{O}_{n_2}$, a ponieważ jest otwarty (jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego), przeto jest sumą mnogościową pewnej rodziny elementów bazy $\mathscr{O}$. Przynajmniej jeden element tej rodziny – oznaczmy go $\mathcal{O}_{n_{12}}$ – przecina się niepusto z $\mathcal{O}_{n_2}$, a zatem – wprost na mocy definicji bazy topologii – istnieje element $\mathcal{O}_{n_{122}} \in \mathscr{O}$ spełniający warunek

$$\mathcal{O}_{n_{122}} \subset \mathcal{O}_{n_{12}} \cap \mathcal{O}_{n_2} \subset \lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}\,,$$

z którego wynika już pożądany warunek

$$\begin{aligned}\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_{122}}) &\subset \pi_{M/\mathrm{G}}\big(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}\big) \subset \pi_{M/\mathrm{G}}\big(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})\big) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2}) \\ &= \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2})\,.\end{aligned}$$

Wreszcie na koniec zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego $\mathcal{O} \subset M/\mathrm{G}$ zachodzi – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej oraz wobec bazowego charakteru $\mathscr{O}$ – tożsamość

$$\pi_{M/\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{n_i}\,,$$

w której $I \subset \mathbb{N}$ jest pewnym zbiorem indeksów. Wobec powyższego otrzymujemy równość

$$\pi_{M/\mathrm{G}}\big(\pi_{M/\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O})\big) = \pi_{M/\mathrm{G}}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{n_i}\Big) = \bigcup_{i\in I} \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_i})\,,$$

która przesądza o bazowym charakterze $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathscr{O})$.

Na zakończenie tej części wykładu wypowiemy stwierdzenie istotne z punktu widzenia zastosowań teorii grup Liego w opisie nieliniowych realizacji symetrii w teorii pola (w szczególności w modelowaniu efektywnej teorii pola „małych" wzbudzeń klasycznej jej próżni), a mianowicie

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Lematu 1 i niechaj G będzie grupą Liego, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ zaś – jej podgrupą domkniętą. Istnieje dokładnie jedna struktura rozmaitości gładkiej na przestrzeni ilorazowej G/H z topologią ilorazową zaindukowaną z G, względem której rzut kanoniczny $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{H}$ jest surjektywną submersją. Naturalne lewe działanie

$$[\ell].\ :\ \mathrm{G} \times (\mathrm{G}/\mathrm{H}) \to \mathrm{G}/\mathrm{H}\ :\ (\widetilde{g}, g\mathrm{H}) \longmapsto (\widetilde{g} \cdot g)\mathrm{H} \tag{4}$$

jest gładkie względem tej struktury. Gładka rozmaitość G/H z działaniem grupy G określona tym sposobem nosi miano **gładkiej przestrzeni jednorodnej** G.

Dowód: Rozważmy działanie $\wp : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} : (g, h) \longmapsto g \cdot h$ podgrupy $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ na grupie G otrzymane w wyniku ograniczenia do tejże podgrupy prawego działania regularnego G na sobie. Jest ono jawnie swobodne, a przy tym możemy je zapisać jako superpozycję

$$\wp = m \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \jmath_{\mathrm{H}})$$

odwzorowań gładkich (przy czym gładkość kanonicznego włożenia $\jmath_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}$ wynika wprost z twierdzenia Cartana o podgrupie domkniętej grupy Liego), zatem jest też gładkie. W świetle Stw. 4 jest ono również właściwe, możemy więc odnieść do pary (G, H) tezę Tw. 3, konstatując prawdziwość pierwszej części tezy twierdzenia dowodzonego. Pozostaje zatem wykazać gładkość działania $[\lambda]$. Zauważmy, że działanie to domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{G}/\mathrm{H} \\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[ur, "\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \circ m"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{G}/\mathrm{H} \arrow[u, "{[\lambda]}"'] \end{tikzcd}\,,$$

w którym $\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}$ jest submersją, co pozwala zastosować Twierdzenie o kwazi-uniwersalnej własności submersji (Stw. 0.29 z Niezbędnika różniczkowo-geometrycznego), aby wywnioskować gładkość $[\lambda]$ z gładkości odwzorowania $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \circ m$, wynikającej ze stwierdzonej wcześniej gładkości $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}$ i założonej gładkości m. □