TEORIA GRUP II

WYKŁAD I

2021/22

GRUPY i ALGEBRY LIEGO

– ALEŻ SKĄD ?!

Γ OBÓLNIKI

POZNANIE FIZYCZNE / MATEMATYCZNE :

MUSIMY USTALIĆ :

OBIEKTY
OBDARZONE
STRUKTURĄ ,

i

RELACJE
MIĘDZY NIMI
TRANSPORTUJĄCE
STRUKTURĘ

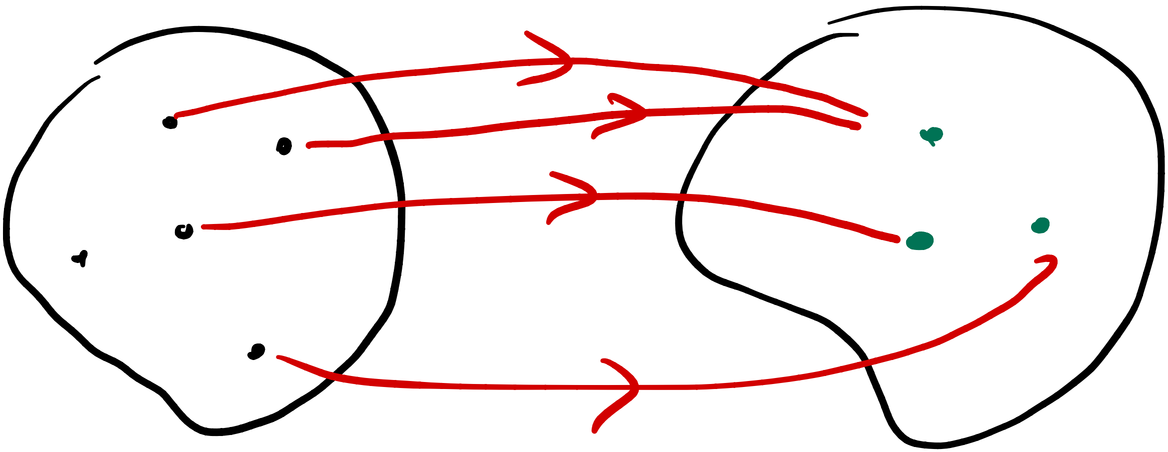
np. PUNKTY ,
FERMIONY ,
ATOMY , GWIAZDY

OKREŚLA
„ROZDZIELCZOŚĆ"
NASZYCH ROZWAŻAŃ

WIELE ROZWAŻAŃ PROWADZIMY

W KATEGORII **Set** : ZBIORY

(ew. z dod. struktury) i ODWZOROWANIA



POŚRÓD RELACJI WYRÓŻNIAMY

TE WEWNĘTRZNE, $R \subset X \times X$

A DALEJ TE, KTÓRE

3

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO LOKALNĄ, $\subset$ JAKĄŚ

np.

($\Uparrow$ W TYM PRZYP)

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO GLOBALNĄ

$$|f(X)| = |X|$$

, albo lepiej

$$\exists f^{-1}$$

- ZACHOWUJĄ „STRUKTURĘ"/INFO MIĘDZY-LOK., O ILE TA ISTNIEJE . . .

TAK OKREŚLONE AUTORELACJE (4)

TO **SYMETRIE** (W NAJOG. MOŻLIWYM ZNACZENIU)

$S_X \subset \mathrm{Hom}(X,X)$

OBSERWACJE:

→ $id_X \in S_X$

→ $f, g \in S_X \Rightarrow f \circ g \in S$

→ $f \in S_X \Rightarrow f^{-1} \in S$

WŁASNOŚCI $\circ$; id_X CZYNIĄ Z $(S_X, \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto id_X)$ **GRUPĘ** (**SYMETRII**)

E.g., DLA X - ZBIÓR ZE STRUKTURĄ GLOBALNĄ $|X|$ (5)

MAMY $S \equiv G_X = \{\sigma \in Map(X,X) \mid \exists \sigma^{-1}\}$

GRUPA SYMETRYCZNA X

FIZYKA ZAWĘŻA POJĘCIE OGÓLNĄ DEFINICJĘ, PRZYDAJĄC ZARAZEM NIEJAKO (NATURALNEJ) STRUKTURY GRUPIE SYMETRII:

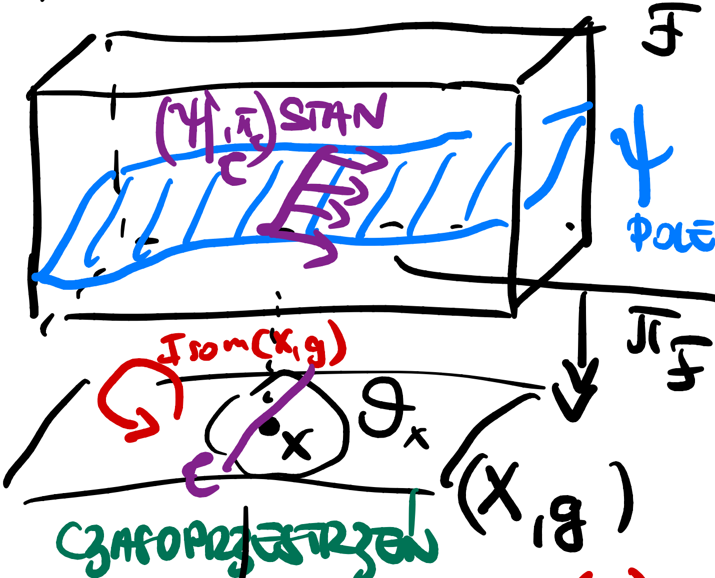
II SYMETRIE (CIĄGŁE) W FIZYCE (6)

(*) CZYM JEST X ?

(**) JAKIE SĄ NATURALNE δ ?

ABY TO USTALIĆ, MUSIMY ZDEFINIOWAĆ PARADYGMAT, W KTÓRY WPISZEMY „FIZYKĘ" ...

PARADYGMAT gLFT



KLASYCZNE:

$\delta S[\psi_*] = 0$

S FUNKCJONAŁ DZIAŁANIA

$$\int_{(X,g)} \mathrm{vol}(X,g)\, \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$$

$$\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}$$

Aut(F)

(WEWN.)

F - STOPNIE SWOBODY POLA, skalary, np. wektory, spinory

$$\left(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \{\cdot,\cdot\}_{PB}\right)$$

PRZESTRZEŃ STANÓW

8

$\{\cdot,\cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]$

$$\Big(\mathcal{P}_F\,,\ \underbrace{\{\cdot,\cdot\}_{P.B.}}_{\text{nawias Liego}}\Big) \overset{g}{\underset{\text{ART}}{\rightsquigarrow}} \Big(\mathcal{H}_F\,,\ \underbrace{[\cdot,\cdot]}_{\text{nawias Liego}}\Big)$$

NAWIAS POISSONA

KOMUTATOR

$|\psi\rangle$ PRZESTRZEŃ HILBERTA TEORII

TRANSFORMACJE KANONICZNE

Operatory Unitarne i Antyunitarne

POMIARY $\in \mathbb{R}$

$$\big|\langle\psi'|\,\hat{O}\,|\psi\rangle\big|^2$$

SAMOSPRZĘŻONE

IDEA OGÓLNA / SUROWA :

$$X = \{ \text{STANY TEORII } (\Psi|_{e}, \pi) \}$$

$$\mathcal{S} = \{ \gamma|_{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}} \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}} \;\big|\; \text{„}\gamma \text{ ZACHOWUJE DYNAMIKĘ"} \}$$

$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ ($\parallel$), $\gamma \in \mathcal{G}_{\Gamma(\mathcal{F})}$

$\mathcal{S} \ni \mathrm{id}_{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}}$

ZE SKŁADANIEM $\Rightarrow$ GRUPA SYMETRII TEORII

MUSIMY DOPRECYZOWAĆ...

(i) OBRAZEK LAGRANŻOWSKI :

E.g. $$S[g] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(g, \dot{g})$$

$g : \mathcal{P}_{\text{aram}} \longrightarrow (M, g)$

TRAJEKTORIE KLASYCZNE : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\right) = \frac{\partial L}{\partial g} \qquad (E-L)$$

ROZWAŻAMY $$(g, \dot{g}) \xrightarrow[s \in]-\varepsilon, \varepsilon[]{\gamma_s \in \mathrm{Map}(M,M)} \Big(\gamma_s(g), \underbrace{\frac{\partial \gamma_s}{\partial g}(g)\dot{g}}_{\text{INDUK.!}}\Big)$$

1-PARAMETROWE GRUPY SYMETRII

$\boxed{\text{NIEZMIENNICZOŚĆ DZIAŁANIA}}$: $$L\left(\gamma_s(g), \frac{\partial \gamma_s}{\partial g}(g)\dot{g}\right) = L(g, \dot{g}) \quad \checkmark$$

DOWOLNA! $\rightsquigarrow + \frac{d}{dt} F_s(g, \dot{g}, t)$

(11)

⇒ POPRAWKI BRZEGOWE DO S

(KLASYCZNIE ~ „BEZ ZNACZENIA!")

↓

TE SAME $(E-L)$ W NOWYCH ZMIENNYCH

$$\boxed{g_s(t) := \gamma_s \cdot g(t)}$$

KONSEKWENCJE RÓŻNICZKOWALNEJ γ ZALEŻNOŚCI SYMETRII OD PARAMETRU s:

→ γ_s INDUKUJE ODWZOROWANIE $\mathcal{P}_\Gamma \circlearrowleft$

(WSZAK ZACHOWUJE S → $g_* \mapsto \gamma_s \cdot g_*$)

→ POJAWIAJĄ SIĘ CAŁKI RUCHU ŁADUNKI

≡ WIELKOŚCI ZACHOWANE

Ozn. : $\Phi(s,t) := \gamma_s \circ g(t)$

LICZYMY — NA TRAJEKTORII KLASYCZNEJ

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(L(\Phi,\dot{\Phi}) - \frac{d}{dt}F_s\right) = \frac{\partial}{\partial s}L(g,\dot{g}) \overset{!}{=} 0$$

ZACHOWANE NA TRAJEKTORII

$$\overset{L}{=} \frac{\partial L}{\partial g}\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s\,\partial t} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_s}{\partial s}$$

$$\underset{(E\text{-}L)}{=} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\right)^{\bullet}\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s\,\partial t} - \left(\frac{\partial F_s}{\partial s}\right)^{\bullet}$$

ŁADUNEK NOETHER

$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial F_s}{\partial s}\right)}_{=:\,Q} \iff \boxed{\frac{d}{dt}Q = 0}$$

OGÓLNIE:

SYMETRIE GLOBALNE

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}} \cong \left\{ \gamma \in \mathrm{Aut}(F) \;\middle|\; \gamma^{*}S = S \ (\mathrm{mod}\ 2\pi\hbar\mathbb{Z}) \right\}$$

1-PARAMETROWE PODGRUPY

INDUKUJĄ ŁADUNKI NOETHEROWSKIE

(ii) OBRAZEK HAMILTONOWSKI

PRZESTRZEŃ STANÓW $\mathcal{P}_\mathcal{F} \ni (\psi|_c, \pi)$

ROZWAŻAMY F-CJE GŁADKIE NA NIEJ

(„OBSERWABLE") A NA NICH HAMILTONIAN H ($\equiv p\dot{q} - L$ W PRZYP. REG.)

$$\{\cdot,\cdot\}_{P.B.} : C^\infty(\mathcal{P}_\mathcal{F}, \mathbb{R})^{\times 2} \longrightarrow C^\infty(\mathcal{P}_\mathcal{F}, \mathbb{R})$$

$$(f,g) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

NAWIAS POISSONA

NATURALNOŚĆ:

$$\frac{dq}{dt} = \{H, q\}_{P.B.}, \quad \frac{dp}{dt} = \{H, p\}_{P.B.} \tag{H}$$

1 OGÓLNIE

$$\frac{d}{dt} f(q,p) = \{H, f\}_{P.B.}$$

WŁASNOŚCI : ALGEBRA LIEGO !!!

(1) $\forall f, g \in C^\infty$: $\{g, f\} = -\{f, g\}$

~~ANTYSYMETRIA~~

(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g, h \in C^\infty$: $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}$

$\mathbb{R}$-LINIOWOŚĆ

(3) $\forall f, g, h \in C^\infty$: $\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} h + g\{f, h\}$

LEIBNIZ

(4) $\forall f, g, h \in C^\infty$: $\mathrm{Jac}(f, g, h) = 0$

JACOBI

SYMETRIE ~ ŁADUNKI :

$$\dot{Q} = 0 \iff \{H, Q\}_{P.B.} = 0$$

tj. ŁADUNKI SYMETRII W INWOLUCJI Z HAMILTONIANEM

$$\Downarrow$$

$\forall Q_1, Q_2$ - ŁADUNKI : $\{Q_1, Q_2\}_{P.B.}$ - ŁADUNEK,

bo $\{H, \{Q_1, Q_2\}\} \overset{}{=}_{Jac} -\{Q_2, \overset{0}{\{H, Q_1\}}\} + \{Q_1, \overset{0}{\{H, Q_2\}}\}$

WNIOSEK: ŁADUNKI ROZPINAJĄ POD-ALGEBRĘ LIEGO w C^∞

TYM RAZEM ŁADUNKI „POCHODZĄ" Z WIĘKSZEJ GRUPY...

ZAPISZMY $\{f, g\}_{P.P.} = \Pi(df, dg)$

Π – biwektor Poissona, niezdegenerowany!

$\Downarrow$

MAMY $\Omega := \Pi^{-1} \in \Omega^2(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$

JIC $\iff d\Omega = 0$

ORAZ $Q \longmapsto V_Q \in \mathfrak{X}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$:

$$V_Q \lrcorner \, \Omega = -dQ$$

POLE HAMILTONOWSKIE

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}_{V_Q} \Omega = 0$$

STRUKTURĘ NA PRZ.-STANÓW

JEGO POTOKI ZACHOWUJĄ Ω,

$$\Phi_{V_Q}(t,\cdot)^* \Omega = \Omega \quad !$$

DYNAMIKI

+ ZACHOWYWANIE HAMILTONIANU

(nat. warunek)

19

WNIOSEK: SYMETRIE GENERUJĄ 1-PARAMETROWE PODGRUPY W GRUPIE SYMPLEKTOMORFIZMÓW ZACHOWUJĄCYCH HAMILTONIAN

(P_{δ}, Ω) (PRAWIDŁOWOŚĆ OGÓLNA)

$\rightsquigarrow$

TRAFO KAN. $\sim$ SYMETRIE SCAŁKOWANE

(iii) OBRAZEK KWANTOWY (KAN.)

KWANTOWANIE KANONICZNE

$$\left(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \{\cdot,\cdot\}_{P.B.}\right) \longmapsto \left(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]\right)$$

$C^\infty(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \mathbb{R})$ OPERATORY SAMOSPRZĘŻONE

$$f \longmapsto \hat{f}$$

(NIE DBAMY O DZIEDZINY!)

$$[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar \, \widehat{\{f, g\}}_{P.B.}$$

$$\text{const} \longmapsto \text{const}\ \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

(+ EKWIWARIANTNOŚĆ)

OBRAZEK HEISENBERGA: 21

$$\frac{d}{dt}\hat{f} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{f}]$$

(R-NIE HEISENBERGA)

WŁASNOŚCI KOMUTATORA

ALGEBRA LIEGO!

(1) $[B, A] = -[A, B]$

(2) $[\lambda A + \mu B, C] = \lambda[A, C] + \mu[B, C]$

(3) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

(4) $\mathrm{Jac}(A, B, C) = 0$

ZNOWU WIĘC SYMETRIE ~
ŁADUNKI DANE PRZEZ

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$$

$$\Downarrow$$

W INWOLUCJI ⟹ POD-ALGEBRA
Ć
CIEGO!

(TO SAMO W OBRAZIE SCHRÖDINGERA

BO : $A_H(t) = e^{\frac{it}{\hbar}\hat{H}} A_S e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}$)

23

OBECNOŚĆ $\hat{Q}$ NARZUCA (OBSERWOWALNE) WIĘZY NA DYNAMIKĘ

$\Downarrow$

REGUŁY WYBORU, np. ELEKTRON W ATOMIE H (ZANIEDBUJEMY SPIN)

$\hookrightarrow$ ZACHOWANY MOMENT PĘDU,

$$[\hat{H}, \hat{\vec{J}}] = 0$$

$$\Downarrow$$

gł. liczba kwantowa

całk. moment pędu

rzut na $\hat{z}$

$$0 = \langle n', l', m' | [\hat{H}, \hat{J}_z] | n, l, m \rangle$$

$$= (m - m') \langle n', l', m' | \hat{H} | n, l, m \rangle$$

<u>Wniosek:</u> $\hat{H}$ ma $\neq 0$ elementy macierzowe tylko między stanami o $m' = m$ $\perp$

ŁADUNKI SYMETRII GENERUJĄ 1-PARAMETROWE PODGRUPY

$\mathcal{U}(\mathcal{H})$: $\hat{Q} \longmapsto e^{it\hat{Q}} = U_{\hat{Q}}$

ZACHOWUJĄCE AMPLITUDY PRZEJŚCIA

$\langle U_{\hat{Q}} \psi_1 | U_{\hat{Q}} \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$

$\Rightarrow$ PRAWDOPODOBIEŃSTWA, ale ...

TE ZACHOWYWANE TAKŻE PRZEZ OPERATORY ANTY-UNITARNE:

$$\begin{cases} \Theta(\lambda \psi_1 + \mu \psi_2) = \bar{\lambda}\, \Theta(\psi_1) + \bar{\mu}\, \Theta(\psi_2) \\ \langle \Theta \psi_1 | \Theta \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \end{cases}$$

in $\overset{S}{\rightsquigarrow}$ out,

czyli związek z T odwrócenia czasu!

INNE ZASTOSOWANIA I UOGÓLNIENIA STRUKTUR LIE-GRUPOWYCH I -ALGEBRAICZNYCH W FIZYCE:

→ KLASYFIKACJA TYPÓW CZĄSTEK ELEM. WG TEORII REPR. ISO($\mathbb{R}^{3,1}$) [Wigner]

→ CECHOWANIE SYMETRII GLOBALNYCH (WIĄZKI GRUP I GRUPOIDÓW NAD (X,g)) ORAZ ICH TORSORÓW

→ PROLONGACJE TYCHŻE W MODELOWANIU FERMIONÓW ↘ wykład KCDG

→ SUPER-SYMETRIA
(supergrupy i superalgebry Liego)

→ MECHANIKA PĘTLI / TEORIA STRUN
(grupy i algebry pętlowe, algebry prętowe, grupy i algebry Hopfa, kwantowe, kategorie ...)

... algebry obwiedni, algebroidy etc.

III PRZEDMIOT WYKŁADU:

Def$^{\underline{n}}$ 1. GRUPA LIEGO TO CZWÓRKA

$(G, m, \mathrm{inv}, \cdot \mapsto e)$ ZŁOŻONA Z

(1) G - ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWALNEJ KLASY C^∞

(2) $m : G \times G \to G$ GŁADKIEGO MNOŻENIA

(3) $\mathrm{inv} : G \to G$ (— — ODWROTNOŚCI)

(4) $e \in G$ - ELEMENTU NEUTRALNEGO

SPEŁNIAJĄCYCH AKSJOMATY GRUPY.

PRZYKŁADY:

(1) $V \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Wówczas: V – GRUPA LIEGO

$\ni \; m = +_V, \; \mathrm{Inv} = P_V$

$$GL(V;\mathbb{K}) - \text{––}\!\!\!\checkmark$$

$$\stackrel{L}{=} \{ X \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \exists X^{-1} \}$$

(2) $SL(n;\mathbb{K}) = \{ A \in GL(n;\mathbb{K}) \mid \det A = 1 \}$

(3) $O(n;\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n;\mathbb{R}) \mid A^T A = 1 \}$

(4) $SO(n;\mathbb{K}) = O(n;\mathbb{K}) \cap SL(n;\mathbb{K})$ 30

(5) $U(n) = \{ A \in Gl(n;\mathbb{C}) \mid A^{\dagger}A = 1 \}$

(6) $SU(n) = U(n) \cap SL(n;\mathbb{C})$

(7) $Sp(n;\mathbb{K}) = \{ A \in SL(2n;\mathbb{K}) \mid A^{T} J_n A = J_n \}$

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

etc.

(8) $ISO(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(3,1)$ 31

$$SO(3,1) = \{ A \in GL(m+n;\mathbb{R}) \mid A^T I_{m,n} A = I_{m,n},\ \det A = 1 \}$$

$$I_{m,n} = \begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_n \end{pmatrix}$$

Def^{n} 2. Niech G – grupa Liego. Rozmaitość z działaniem

G to PARA (M, λ)

ZŁOŻONA Z

→ M – ROZMAITOŚCI C^∞

→ $\lambda : G \times M \longrightarrow M$

GŁADKIE

$\lambda : G \to \mathrm{Diff}(M)$

HOMEO

PRZYKŁAD:

(1) (G, m) JEST ROZMAITOŚCIĄ Z DZIAŁANIEM G

(2) S^2 — " — Z DZIAŁANIEM $SO(3)$

(3) $Mink(3,1)$ — " — ISO(3,1)