Wykład I

2021/22

Stw. 18. Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą 77

algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej

$\mathfrak{k}$. Istnieje niezwyrodniała forma hermitowska

$$(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

o własności $(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} : \mathfrak{k}\times\mathfrak{k} \longrightarrow \mathbb{R}\ (\subset\mathbb{C})$

(dla $\mathfrak{k} \equiv \mathfrak{k}\otimes 1 \subset \mathfrak{g}$)

i taka, że działanie dołączone $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$
$\equiv \mathrm{ad}.\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$

jest unitarne w sensie wyrażonym przez

$$\forall X\in\mathfrak{k}, Y,Z\in\mathfrak{g} : (\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Y)|Z) = -(Y|\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Z)).$$
$(\hat{\mathfrak{g}})$

Zdefiniujmy anty-$\mathbb{C}$-liniową inwolucję:

$$* : \mathfrak{g} \circlearrowleft : X\otimes 1 + Y\otimes i \longmapsto -X\otimes 1 + Y\otimes i ,$$
$$(X,Y\in \mathfrak{k})$$

a równocześnie przyjęta forma hermitowska spełnia

$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g} : \left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_X(Y)\,\middle|\,Z\right) = \left(Y\,\middle|\,\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X^*}(Z)\right), \qquad (*)$$

czyli $\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})\dagger}_X = \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X^*}$.

D: Rozważmy wyróżnioną strukturę hermitowską na $\mathfrak{k}$ otrzymaną z konstruktywnego dowodu Tw. 1. dla $(V, R) \equiv (\mathfrak{k}, T_e \mathrm{Ad}.)$, względem której $dR \equiv \mathrm{ad}$ jest unitarna. Strukturę tę możemy rozszerzyć na $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ w naturalny sposób:

$$(\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$$

$$: (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i) \mapsto (X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i\big((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\big)$$

Bez trudu przekonujemy się, że $(\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}}$ jest niezdegenerowaną formą hermitowską na $\mathfrak{g}$. W rzeczy samej,

$$\forall_{\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}} : \left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i \,\middle|\, \lambda\triangleright(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i \,\middle|\, (\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2)\otimes 1+(\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2)\otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(X_1 \,\middle|\, \alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^G+\left(Y_1 \,\middle|\, \alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^G$$

$$+\,i\left(\left(X_1 \,\middle|\, \alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^G-\left(Y_1 \,\middle|\, \alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^G\right)$$

(81)

$$= \alpha \left((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i\left((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\right)\right)$$

$$+ \beta \left((Y_1|X_2)^G - (X_1|Y_2)^G + i\left((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G\right)\right)$$

$$= (\alpha + i\beta) \cdot (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \,|\, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i)^G_{\mathbb{C}}$$, e nello

$$(X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i \,|\, X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i)^G_{\mathbb{C}} = (X_2|X_1)^G + (Y_2|Y_1)^G$$

$$+ i\left((X_2|Y_1)^G - (Y_2|X_1)^G\right)$$

$$\boxed{x = 0 = y \; ?}$$

$$= \underline{(X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G - i} \left((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\right)$$

$$= \overline{(X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i \,|\, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i)^G_{\mathbb{C}}}$$

Pensato

$$(X \otimes 1 + Y \otimes i \,|\, X \otimes 1 + Y \otimes i)^G_{\mathbb{C}} = (X|X)^G + (Y|Y)^G + i\left((X|Y)^G - (Y|X)^G\right) \ge 0$$

W kolejnym kroku sprawdzimy też, że kompleksyfikacja ad., dana jawnym wzorem

$$\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X (Y\otimes 1 + Z\otimes i) := \mathrm{ad}_X(Y)\otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Z)\otimes i\,, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{k},$$

spełnia pożądany warunek:

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X (X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}_X(X_1)\otimes 1 + \mathrm{ad}_X(Y_1)\otimes i \,\middle|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}_X(X_1) \middle| X_2\right)^{G} + \left(\mathrm{ad}_X(Y_1) \middle| Y_2\right)^{G} + i\Big(\left(\mathrm{ad}_X(X_1) \middle| Y_2\right)^{G} - \left(\mathrm{ad}_X(Y_1) \middle| X_2\right)^{G}\Big)$$

$$= -\left(X_1 \,|\, ad_X(X_2)\right)^G - \left(Y_1 \,|\, ad_X(Y_2)\right)^G$$

$$-i\left(\left(X_1 \,|\, ad_X(Y_2)\right)^G - \left(Y_1 \,|\, ad_X(X_2)\right)^G\right)$$

$$\equiv -\left(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,\middle|\, ad_X(X_2)\otimes 1 + ad_X(Y_2)\otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv -\left(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,\middle|\, ad^{\mathbb{C}}_X\left(X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i\right)\right)^G_{\mathbb{C}},$$

co pozwala nam zapostulować (w odniesieniu do tej dowolnej str.)

$$(\cdot|\cdot) \equiv (\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}}.$$

Pozostaje sprawdzić tożsamość (*) (str. 78).

W tym celu liczymy – dla jedynego (84)

$\mathbb{C}$-liniowego rozszerzenia $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}$ z $\mathfrak{k}$ do $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$,

danego wzorem

$$\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_Y \quad -$$

słuszność postulowanej tezy :

$$\left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv \left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) + i\triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_Y(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i) \,\middle|\, X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$= -\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i \,\middle|\, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$-i\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$=\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\left(-\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{X}+i\,\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}\right)(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\mathrm{ad}^{(\sigma)}_{(X\otimes 1+Y\otimes i)^*}(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{G}_{\mathbb{C}},$$

co kończy dowód. $\square$

Nim wyprowadzimy z powyższego daleko idące wnioski, wysłowimy jeszcze...

Str. 19. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$.
Niech $(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ będzie jak w Str. 18.
Jeżeli $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{g}$ jest ideałem, to także $\mathfrak{r}^\perp$ jest ideałem i $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{r}^\perp$ jako algebra Liego.

D: Być ideałem oznacza, że

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{g})}(\mathfrak{r})\subset\mathfrak{r}\,,$$

w szczególności więc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{r})\equiv\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}\otimes 1}^{(\mathfrak{g})}(\mathfrak{r})\subset\mathfrak{r}$.

W takim jednak razie

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}^{\perp}) \,\middle|\, \mathfrak{t}\right) = -\left(\mathfrak{t}^{\perp} \,\middle|\, \underbrace{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t})}_{\subset \mathfrak{t}}\right) = 0,$$

czyli $\mathfrak{t}^{\perp}$ jest $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$-niezmiennicze,

a zatem także $\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}} + i \cdot \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{k}}$ -niezmiennicze.

Jako przestrzeń $\mathbb{C}$-liniowa $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^{\perp}$, a ponieważ

$\Rightarrow \mathfrak{t} \cap \mathfrak{t}^{\perp} = \{0_{\mathfrak{g}}\}$

zarówno $\mathfrak{k}$, jak i $\mathfrak{k}^\perp$ są ideałami w $\mathfrak{g}$, przeto $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}^\perp] \subset \mathfrak{k}\cap\mathfrak{k}^\perp = \{0_{\mathfrak{g}}\}$, co oznacza właśnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{k}^\perp$ jako algebra Liego. □

Relacje między algebrami redukcyjnymi i półprostymi precyzuje ...

Str. 20. Niech $\mathfrak{g}$ będzie reduktywną zespoloną algebrą Liego o centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Wówczas istnieje półprosta algebra Liego $\delta\mathfrak{g}$ o własności $\mathfrak{g} \simeq \delta\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (jako algebry Liego).

D: Jako że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, przeto także $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp}$ (wzgl. struktury hermitowskiej j.w.) jest ideałem w $\mathfrak{g}$ na mocy str. 19, a przy tym $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\perp} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Pokażemy, że $\delta\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ jest półprosta.

Oczywiście $\mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) = 0$, albowiem

$$\forall Z \in \mathfrak{z}(\delta\mathfrak{g}) : Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \quad \left(\text{wszak } [Z, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0,\right.$$

czyli $Z \in \delta\mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. $\quad$ a $\left.\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp\right)$

Pozostaje wykazać zwartość formy Zwiększosty algebry Liego $\delta\mathfrak{g}$.

W tym celu zauważmy, że $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$\Longleftrightarrow Z \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{g})} \Longleftrightarrow Z \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}_{K}^{c}$, a zatem

$$\mathcal{Z} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \iff \mathcal{Z}^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Istotnie $\mathcal{Z} = X \otimes 1 + Y \otimes i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \ 0 = \mathrm{ad}_u^{\mathbb{C}}(X \otimes 1 + Y \otimes i)$$

$$= \mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i$$

$$\iff \forall u \in \mathfrak{k} : \ \mathrm{ad}_u(X) = 0 = \mathrm{ad}_u(Y)$$

$$\iff \mathrm{ad}_u^{\mathbb{C}}(\mathcal{Z}^*) \equiv \mathrm{ad}_u^{\mathbb{C}}(-X \otimes 1 + Y \otimes i) =$$

$$\equiv -\mathrm{ad}_u(X) \otimes 1 + \mathrm{ad}_u(Y) \otimes i = 0.$$

Ponieważ zaś $*$ jest inwolucją, (92)

przeto także $\delta g^* = \delta g$, to pociąga

implikuje $\delta g = \mathbb{C}\otimes(\delta g \cap k^{\otimes'}) = (\delta g \cap k^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$ elementy rzeczywiste

Istotnie, niech $\delta g \ni v = X\otimes 1 + Y\otimes i \Rightarrow \frac{1}{2i}\otimes(v+v^*) = X\otimes 1$ i $\frac{1}{2}(v-v^*) = X\otimes 1$ generują δg!

podobnie dla $z(g) = \mathbb{C}\otimes(z(g)\cap k^{\otimes'}) = (z(g)\cap k^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$. and $\mathbb{C}$ $\delta g \subset (\delta g \cap k^{\otimes'})^{\mathbb{C}}$!

Wystarczy zatem okazać, że $\delta g \cap k^{\otimes'}$ i vice versa!

jest algebrą Liego zwartej grupy Liego.

Niech K będzie zwartą grupą Liego o algebrze

Liego $\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\, K$. Otrzymujemy

$$\delta K := T_e \mathrm{Ad}(K) \subset GL(\mathfrak{k}).$$

Jako ciągły obraz grupy zwartej δK jest zwarta, zatem domknięta. Na mocy Tw. Cartana 2-3-4-7.2 jest ona podgrupą Liego grupy Liego $GL(\mathfrak{k})$, więc w szczególności – grupą Liego.

Money pattern

$$0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap k \hookrightarrow k \twoheadrightarrow \delta\mathfrak{g}\cap k \to 0$$
$$(k\otimes 1)$$

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[rr, "T_e Ad"] \arrow[dr, two heads, "T_e Ad^*"'] & & GL(k) \\
& & \delta K \arrow[ur] & \\
& & \delta\mathfrak{g}\cap k \arrow[u, "\exp^{\delta K}"] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap k \arrow[r] & k \arrow[uuu, "\exp^{K}"] \arrow[ur, two heads, "ad"] \arrow[rr, "ad"'] & & \mathfrak{gl}(k) \arrow[uuu, "\exp^{GL(k)}"'] \\
0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

conj

$k \simeq k\otimes 1$

$\subseteq$

$k\otimes 1\cap \mathfrak{g}$

$=$

$k\otimes 1\cap(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\oplus\delta\mathfrak{g})$

$\supseteq$

$(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap k\otimes 1)\oplus(\delta\mathfrak{g}\cap k\otimes 1)$

$\delta\mathfrak{g}\cap k \simeq \mathrm{Lie}\,\delta K$

$\delta\mathfrak{g}\cap k \to 0$

prove

$\delta\mathfrak{g}\cap k \simeq k/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap k$

$\ker ad = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap k\otimes 1$

skąd pojedyńczy wniosek

$$\delta\mathfrak{g}\cap\mathfrak{k} \equiv \mathrm{Lie}\,\delta K$$

δK - zwarta. $\square$

Przechodząc do dyskusji algebr półprostych, zauważymy

<u>Tw. 3.</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego. Istnieją podalgebry $\{\mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{g}\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N < \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ będące prostymi algebrami Liego

i jedyny rozkład prosty

$$\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i \quad \text{(jako algebry Liego)}.$$

Podalgebry $\mathfrak{h}$ są określone jednoznacznie z dokładnością do permutacji.

D: Gdyby $\mathfrak{g}$ ma nietrywialny ideał $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ rozkłada się jako algebra Liego na sumę prostą $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ na mocy str. 19, przy czym $\mathfrak{h}^{\perp}$ także jest idealem w $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{h}$ zawiera mniejszy

ideał (w $\mathfrak{h}$!) $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{h}$, to oczywiście $[\mathfrak{h}^{\perp}, \mathfrak{h}']_{\mathfrak{g}} = \underset{\mathfrak{h}'}{\underset{\cap}{0}}$

oraz $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}'$, przeto $\mathfrak{h}'$ jest też

ideałem w $\mathfrak{g}$. W takim razie

$$\mathfrak{h}'' := (\mathfrak{h}')^{\perp} \cap \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$$

jest ideałem w $\mathfrak{g}$ i otrzymujemy

– ponownie na mocy str. 19 –

$$\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'') \oplus \mathfrak{h}^{\perp}.$$

Po skończonej liczbie kroków uzyskujemy tym sposobem rozkład prosty algebry Liego $\mathfrak{k}$ na sumę prostą algebr nierozkładających niezmienniczych ideałów, a następnie ten sam algorytm stosujemy do ideału $\mathfrak{k}^\perp$, otrzymując ostatecznie rozkład prosty $\mathfrak{g}$ na sumę prostą

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{g}_i$$

takich że algebr. Pozostaje pokazać, że każde j ideał ma wymiar liniowy co najmniej 2.

<u>1.a.</u> Niech $\mathfrak{g}_i$ będzie jednym z ideałów i załóżmy, że $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_i = 1$. Wówczas $\mathfrak{g}_i$ jest komutatywna, a zatem $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ (wszak $\forall j \in \overline{1,N} \setminus \{i\} : [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i]_{\mathfrak{g}} = 0$). Ale $\mathfrak{g}$ półprosta, zatem $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. ↯

Niechaj teraz $\bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)} \simeq \mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N_2} \mathfrak{g}_i^{(2)}$
będą dwoma takimi rozkładami.
Każda podalgebra $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$,
a zatem podreprezentacją reprezentacji $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.
Jako taka $\mathfrak{g}_i^{(A)}$ jest nieprzywiedlna,
bo w p.p. zawierałaby podprzestrzeń,
która będąc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-niezmienniczą, byłaby
w szczególności $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i^{(A)}}$-niezmienniczą,

czyli – nietrywialnym ideałem w $\mathfrak{g}^{(A)}_i$, w sprzeczności z prostotą $\mathfrak{g}^{(A)}_i$. Przy tym

$$i \neq j \Longrightarrow \left(\mathfrak{g}^{(A)}_i, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right) \not\cong \left(\mathfrak{g}^{(A)}_j, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction\right),$$

bo $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ działa na $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ nietrywialnie (wszak $\mathfrak{g}^{(A)}_i$ jest niekomutatywna), a na $\mathfrak{g}^{(A)}_j$ – trywialnie ($\Leftarrow \mathfrak{g} \cong \bigoplus_{i=1}^{N_A} \mathfrak{g}^{(A)}_i$ jako <u>algebra Liego</u>).

Rozważmy teraz ideał $\mathfrak{g}^{(2)}_i \subset \mathfrak{g}$. Jako je rzut kanoniczny $pr_j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_j^{(1)}$

jest splotaczem między $ad_{\mathfrak{g}}$ i $ad_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}$

(wszak $\mathfrak{g}_j^{(1)}$ jest ideałem), zatem

$\pi_{j;i} = pr_j|_{\mathfrak{g}_i^{(2)}} : (\mathfrak{g}_i^{(2)}, ad_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_i^{(2)}}) \longrightarrow (\mathfrak{g}_j^{(1)}, ad_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_j^{(1)}})$ (nieprzywiedlne obie!) jest albo 0, albo $\simeq$ na mocy

Lematu Schura (Tw. 2.1°). Skoro jednak

$\mathfrak{g} \simeq \bigoplus_{i=1}^{N_1} \mathfrak{g}_i^{(1)}$, to istnieje $j \in \overline{1,N_1}$: $\pi_{j;i}$ jest $\simeq$.
(inaczej $\equiv 0$)

Wtedy też jednak $\pi_{k\neq j;i} = 0$, bo reprezentacje

$$\left(\mathfrak{g}_k^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_k^{(1)}}\right) \not\sim \left(\mathfrak{g}_j^{(1)}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\restriction_{\mathfrak{g}_j^{(1)}}\right) \quad \text{dla } k \neq j.$$

Jest zatem $\mathfrak{g}_i^{(2)} = \mathfrak{g}_j^{(1)}$ (równość, a nie tylko $\simeq$!).

$\square$

Uzyskawszy wstępny wgląd w „anatomię" półprostych algebr Liego, przejdziemy obecnie do ich analizy pod kątem klasyfikacji ich reprezentacji. W tym celu wprowadzimy w $\mathfrak{g}$ (półprostej) elementy (współ-) 105

diagonalizowalne w każdej reprezentacji,

wręcz w szczególności – w reprezentacji

dołączonej $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.