Wykład XI

2021/22

Def. 17. PODALGEBRA CARTANA

(półprostej) algebry Liego $\mathfrak{g}$ (nad $\mathbb{C}$) to podprzestrzeń (zespolona) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o własnościach:

(C1) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ (KOMUTATYWNOŚĆ)

(C2) $\forall X \in \mathfrak{g} : \left([\mathfrak{h}, X]_{\mathfrak{g}} = 0 \Rightarrow X \in \mathfrak{h} \right)$ (MAKSYMALNOŚĆ)

(C3) $\forall H \in \mathfrak{h}$: ad_H jest diagonalizowalny. (WSPÓŁDIAGONALIZOWALNOŚĆ).

Mamy następujące

<u>Tw. 4</u> [O istnieniu podalgebry Cartana]

Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ będzie (dowolną) maksymalną podalgebrą komutatywną. Wtedy podalgebra

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$$

jest podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$. W szczególności podalgebra Cartana istnieje.

<u>D</u>: Rozważmy dowolną 1-wym. podprzestrzeń $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}$ ($\neq \mathfrak{k}$, bo $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})=0$). To jest podalgebra komutatywna. Niech teraz $S_{\mathfrak{k}_0}$ będzie zbiorem podalgebr komutatywnych w $\mathfrak{k}$ zawierających $\mathfrak{k}_0$. Wówczas maksymalny element tego zbioru, $\mathfrak{t} := \bigcup_{s \in S_{\mathfrak{k}_0}} s \subset \mathfrak{k}$ jest przykładem maksymalnej podalgebry komutatywnej.

Niech teraz $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ dla $\mathfrak{t}$ j.w.

Wówczas $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i musimy pokazać, że jest maksymalna.

Niech $X \in \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ spełnia $[X,\mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}} = 0$

$= X_1 \otimes 1 + X_2 \otimes i$, a wtedy także

$[X,\mathfrak{t}\otimes 1]_{\mathfrak{g}} = 0$, więc $[X_1,\mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0 = [X_2,\mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}}$!

ponieważ jednak $\mathfrak{t}$ maksymalna, przeto nieodzownie $X_1, X_2 \in \mathfrak{t}$, czyli $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}$.

Jeśli teraz $(\cdot|\cdot)$ jest formą hermitowską, (110)
o której mowa w Stw. 18, to

$$\forall H \in \mathfrak{t} \left(\subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}\right) : \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_H \text{ jest skośnie}$$

hermitowski, więc też diagonalizowalny,
a ponieważ dla dowolnych dwóch $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$
zachodzi $\left[\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}\right]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{[H_1,H_2]_{\mathfrak{t}}} = 0$,
przeto operatory $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}$ i $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$ są
współ-diagonalizowalne. W takim razie

weźmy teraz dowolny element

$H = H_1 \otimes 1 + H_2 \otimes i$ ma $\mathrm{ad}_H \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1} + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}$

diagonalizowalny i – znów –

$$\forall H, \tilde{H} \in \mathfrak{t} : [\mathrm{ad}_H, \mathrm{ad}_{\tilde{H}}]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = \mathrm{ad}_{[H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}}} = 0,$$

więc $\{\mathrm{ad}_H\}_{H \in \mathfrak{t}}$ są współdiagonalizowalne. $\square$

<u>NB</u>: Dowodzi się, że dowolne dwie podalgebry Cartana są izomorficzne, przy czym izomorfizm taki rozszerza się do automorfizmu $\mathfrak{g}$.

To uprawomocnia

Def. 18. RZĄD półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ to wymiar jej (dowolnej) podalgebry Cartana.

W dalszej części wykładu zbadamy rozkład $\mathfrak{g}$ na podprzestrzenie własne $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ ...

Wobec $\mathbb{C}$-liniowego charakteru odwzorowania $\mathrm{ad}_\cdot : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ zależność wartości własnej operatora ad_H, $H \in \mathfrak{h}$ od H jest $\mathbb{C}$-liniowa. Ma zatem sens

Przyjmijmy dotychczasowe notacje.

Def. 19 Jeżeli istnieje niezerowy wektor $X \in \mathfrak{g}$ o własności

$$\mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H) \triangleright X \,, \quad H \in \mathfrak{h},$$

funkcjonał $\mathbb{C}$-liniowy $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ określamy mianem PIERWIASTKA $\mathfrak{g}$ dla $\mathfrak{h}$.

Istnienie niezdegenerowanej formy hermitowskiej na $\mathfrak{g}$, o której mowa w str. 18, wyznacza izomorfizm $\mathfrak{t}^* \cong \mathfrak{t}$, który pozwala utożsamić zdefiniować pierwiastek jako taki $\alpha \in \mathfrak{t} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, dla którego istnieje $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ o własności

$$\forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X .$$

Zbiór wszystkich pierwiastków będziemy oznaczać symbolem $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$. ||

Dla dowolnego pierwiastka $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ (115)
określamy PRZESTRZEŃ PIERWIASTKOWĄ

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \}.$$

Dowolny jej element $X \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ nazywamy WEKTOREM PIERWIASTKOWYM α.

Ozn.: Ogólniej rozważamy - dla dowolnego $\alpha \in \mathfrak{t}$:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{t} : \mathrm{ad}_H(X) = (\alpha|H) \triangleright X \},$$

przy czym $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{t}$ oraz $\alpha \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha = 0$.

Mamy oczywiście (116)

Przyjmijmy jeszcze dodatkowo:

<u>Str. 21.</u> Dowolna półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ o podalgebrze Cartana $\mathfrak{h}$ ma jako przestrzeń <u>$\mathbb{C}$-liniowa</u> rozkład

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha .$$

Przyjrzyjmy się bliżej przykładom pierwiastkowym ...

Str. 22. Przypominamy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha,\beta \in \mathfrak{t} : \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} .$$

W szczególności, jeżeli $\alpha+\beta \notin Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]_{\mathfrak{g}} = 0 .$$

D: Tożsamość Jacobiego może być zinterpretowana jako stwierdzenie:

118

$\forall X \in \mathfrak{g}$: ad_X jest różniczkowaniem algebry $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \leftarrow$ iloczyn $)$,

$$\mathrm{ad}_X([Y,Z]_{\mathfrak{g}}) = [\mathrm{ad}_X(Y), Z]_{\mathfrak{g}} + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)]_{\mathfrak{g}}.$$

W szczególności $\forall (X,Y) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$:

$$\mathrm{ad}_H([X,Y]_{\mathfrak{g}}) = [\mathrm{ad}_H(X), Y]_{\mathfrak{g}} + [X, \mathrm{ad}_H(Y)]_{\mathfrak{g}}$$

$$= [(\alpha|H) \triangleright X, Y]_{\mathfrak{g}} + [X, (\beta|H) \triangleright Y]_{\mathfrak{g}}$$

$$= (\alpha+\beta|H) \triangleright [X,Y]_{\mathfrak{g}} \quad . \quad \square$$

Mamy dalej

<u>Str. 23.</u> Przyjmijmy dotychczasową notację:

$$Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}^* \otimes i .$$

<u>D</u>: Jako że ad_H, $H \in \mathfrak{t}$ jest skośnie hermitowski, przeto $\mathrm{Sp}\,\mathrm{ad}_H \subset i\mathbb{R} \, (\subset \mathbb{C})$, ale to oznacza, że $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : \ (\alpha|H) \in i\mathbb{R}$.

Niech $\alpha = \alpha_1 \otimes 1 + \alpha_2 \otimes i$, a wtedy – w świetle str. 18. – $(\mathrm{Im}(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}} \subset \mathbb{R})$
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{t}$

$$\underset{i\mathbb{R}\,\ni}{(\alpha|H)} = \underset{\mathbb{R}\,\ni}{(\alpha_1|H)} - i\cdot \underset{\mathbb{R}\,\ni}{(\alpha_2|H)} \Rightarrow \alpha_1 = 0 .$$

□

Jest także

Stw. 24. Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : \quad X \in \mathfrak{g}_\alpha \Rightarrow X^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

zatem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Longleftrightarrow -\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$.

Ponadto $\langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}$.

D: Niech $H\otimes 1 \in \mathfrak{t}\otimes 1$ i $\underbrace{X}_{X_1\otimes 1 + X_2\otimes i} \in \mathfrak{g}_\alpha$, a wtedy

$$[H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^* = \left([H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i\right)^*$$

$$= -[H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i \equiv [H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}}.$$

Wobec anty-$\mathbb{C}$-liniowości $*$ i str. 23. (121)

$\alpha \in Q \subset \mathfrak{t} \otimes i$

mamy – dla $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ –

$$[H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}} = [H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^* = ((\alpha|H)\cdot X)^* = \overline{(\alpha|H)}\cdot X^*$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_H(X^*)} = -(\alpha|H)\cdot X^*.$$

Stąd też dla $H = H_1\otimes 1 + H_2\otimes i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ i $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ zachodzi

$$[H, X^*]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_H(X^*) = \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_1}(X^*) + i\cdot \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{H_2}(X^*)$$

$$= -(\alpha|H_1)\cdot X^* - i\cdot(\alpha|H_2)\cdot X^*$$

$$= -(\alpha|H_1\otimes 1 + H_2\otimes i)\cdot X^* \equiv (-\alpha|H)\cdot X^*.$$

Niech teraz $H \in \mathfrak{t} \setminus \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}}$. Mamy (122)

$(\mathfrak{t}, (\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}})$ – mięjnpodniarte (wzgolu $(\cdot|\cdot)$ ma też własności i $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})} \mathfrak{g}_\alpha$), przebo

$$\mathfrak{t} = \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp},$$ czyli

$$H \in \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp},$$ tj. $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (\alpha|H) = 0$,

ale wtedy $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\ \forall X\in\mathfrak{g}_\alpha : [H,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H) \triangleright X = 0$,

co w połączeniu z $\forall \tilde{H}\in\mathfrak{t} : [H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}} = 0$

i rozkładem $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})} \mathfrak{g}_\alpha$ daje $[H,\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} = 0$, czyli $H \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ↯ □

Wzory Weylowe

Tw. 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\ \exists\, (F_\alpha, H_\alpha, E_\alpha) \in (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha) \setminus \{0_\mathfrak{g}\} :$$

$$[H_\alpha, E_\alpha]_\mathfrak{g} = 2E_\alpha \qquad \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} = \langle E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha \rangle_\mathbb{C}$$

$$[H_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = -2F_\alpha \quad \wedge \quad H_\alpha \in \langle \alpha \rangle_\mathbb{C} .$$

$$[E_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = H_\alpha$$

Przy tym możemy wybrać $F_\alpha = E_\alpha^*$.

D: zacznijmy od

Lemat: $\forall (X,H,Y) \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$:

$$([Y,X]_\mathfrak{g} | H) = (\alpha | H) \cdot (X | Y^*) .$$

Dowód Lematu: Korzystając ze stw. 18., liczymy

$$([Y,X]_\mathfrak{g} | H) \equiv (\mathrm{ad}_Y^{(\mathfrak{g})}(X) | H) = (X | \mathrm{ad}_{Y^*}^{(\mathfrak{g})}(H))$$

$$= -(X | \mathrm{ad}_H^{(\mathfrak{g})}(Y^*))$$, ale $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$

oznacza, że $Y^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ na mocy stw. 24, zatem $([Y,X]_\mathfrak{g} | H) = -(X | (-\alpha | H) \triangleright Y^*) = (\alpha | H) \cdot (X, Y^*)$. $\square$

Zastosujmy powyższy Lemat do pary $(Y, X \equiv Y^*) \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, a wówczas dostaniemy

$$([Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \,|\, H) = (\alpha|H)\cdot(Y^*|Y^*),$$

zatem

$$\forall H\in\mathfrak{t}: \begin{cases} H\perp\alpha \Longrightarrow [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\perp H \\ \underset{\neq 0}{H} \not\perp \alpha \Longrightarrow ([Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\,|\,H)\neq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\neq 0$$

Jest $\mathfrak{t} = \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp_{\mathfrak{t}}}$, widać więc, że $[Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$.

Niech teraz $H = [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}$, a wtedy

$$\underset{\neq 0}{\left([Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\right)} = \left(\alpha \,\middle|\, [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\right)\cdot \underset{\neq 0}{\left(Y^* \,\middle|\, Y^*\right)},$$

przeto
$$\left(\alpha \,\middle|\, [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\right) = \frac{\overbrace{\left([Y,Y^*]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\right)}^{\in \mathbb{R}_{>0}}}{\underbrace{\left(Y^* \,\middle|\, Y^*\right)}_{\in \mathbb{R}_{>0}}} > 0$$

Możemy zatem zdefiniować

– dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ i $N_{\alpha,Y} := \frac{\left(\alpha \,\middle|\, [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}}\right)}{2}$ –

$$E_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha,Y}}} \triangleright \overset{\in \mathfrak{g}_\alpha}{Y}; \quad F_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha,Y}}} \triangleright \overset{\in \mathfrak{g}_{-\alpha}}{Y^*}; \quad \overset{\in \mathfrak{t}}{H_\alpha} := \frac{1}{N_{\alpha,Y}} \triangleright [Y,Y^*]_{\mathfrak{g}},$$

a wtedy $(\alpha|H) = \frac{2}{(\alpha|H)} \Rightarrow (\alpha|H) = 2$

i stąd $[H_\alpha, E_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 2E_\alpha$, $[H_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = -2F_\alpha$

oraz $[E_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{N_{\alpha,Y}} [Y, Y^*] \equiv H_\alpha$,

zatem – w istocie – spełnione są relacje z tezy Twierdzenia. $\square$

NB. Zauważmy przy okazji, że z równości $(\alpha|H_\alpha) = 2$ w połączeniu z ustaloną przynależnością $H_\alpha \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$, czyli $H_\alpha = h_\alpha \triangleright \alpha$, wynika $2 = (\alpha | h_\alpha \triangleright \alpha) = h_\alpha \cdot (\alpha|\alpha)$, Tj.

$$\boxed{H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha}$$

Def. 20 Niech $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$. Wówczas

$$H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha \in \mathfrak{t}$$

określony mianem KOPIERWIASTKA stowarzyszonego z pierwiastkiem α.
