Wykład XII

2021/22

Zajmiemy się obecnie reprezentacją podalgebry $sl(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} \subset \mathfrak{g}$ otrzymaną przez ograniczenie reprezentacji dołączonej ad.

Mamy kluczowe

<u>Tw. 6.</u> W dotychczasowym zapisie

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (1)\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \Big(\lambda \triangleright \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \lambda \in \{-1,1\} \Big)$$

$$(2)\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1 .$$

D: W ramach przygotowań do dowodu (B3) tezy zasadniczej wygodnie będzie rozpatrzeć najpierw

Lemat: W powyższych oznaczeniach

$$|\lambda| > 1 \implies \lambda \in \{-2, 2\}.$$

Dowód Lematu: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_{\lambda \triangleright \alpha} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy $[H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} = (\lambda \triangleright \alpha | H_\alpha) \triangleright X = \bar{\lambda} \cdot (\alpha | H_\alpha) \triangleright X$

$$= \bar{\lambda} \cdot \left(\alpha \middle| \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright X = 2\bar{\lambda} \triangleright X,$$

czyli $2\bar{\lambda} \in \operatorname{Sp} H_\alpha$. Tymczasem (31)

Tw. [ćwiczenie] W dowolnej ($\propto\infty$-wym.) reprezentacji (V, ρ) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ zachodzi

(i) $\operatorname{Sp} \rho(H) \subset \mathbb{Z}$

(ii) $n \in \operatorname{Sp} \rho(H) \Rightarrow \{-|n|, -|n|+2, -|n|+4, \ldots, |n|\} \subset \operatorname{Sp} \rho(H)$.

zatem $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, czyli $\exists N \in \mathbb{Z} : \lambda = \frac{N}{2}$. Ale też dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ dostajemy

$$[H_{\lambda \triangleright \alpha}, Y] = (\alpha | H_{\lambda \triangleright \alpha}) \triangleright Y = \left(\alpha \middle| \frac{2\lambda}{\lambda^2 (\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright Y = \frac{2}{\lambda} \triangleright Y,$$

zatem także $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{N} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tj. 132

$N \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$, a skoro $\underbrace{|\lambda|}_{\leq \frac{|N|}{2}} > 1$,

to w istocie $N \in \{-4, 4\}$, czyli $\lambda \in \{-2, 2\}$. $\square$

Wracamy do dowodu tezy pomocniczej...

Wykorzystując skończoność wymiaru $\mathfrak{g}$,

konstatujemy istnienie najmniejszej

(niezerowej) krotności α w $Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$

a następnie odnosimy do tego pierwiastka tego Lematu, by wywnioskować, że (B3) jedyne skalarne krotności (tego minimalnego) α w $Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$ to $\pm\alpha$ i - ewentualnie - $\pm 2\alpha$.

Rozważmy następnie

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle E_\alpha, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wybór}}}{F_\alpha \equiv E_\alpha^*}, H_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

i międ. $V_\alpha := \langle H_\alpha \rangle \oplus \bigoplus_{\beta \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}$

Łatwo przekonujemy się, że V_α jest podalgebrą Liego $\mathfrak{g}$. Istotnie, po pierwsze

1° RÓŻNE PIERWIASTKI:

$\forall \beta_1, \underset{\neq -\beta_1}{\beta_2} \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}} : [\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\beta_1+\beta_2}$, 134

ale $\beta_1+\beta_2 \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, a ponadto na mocy Lematu ze str. 124 z $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$

2° PRZECIWNE PIERWIASTKI:

wynika, że dowolny element $[\mathfrak{g}_{\beta}, \mathfrak{g}_{-\beta}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}$ jest prostopadły do każdego elementu $\mathfrak{h}$ prostopadłego do β, czyli sam jest skalarną krotnością β, więc też α, zatem – koniec końców – tylko je H_α. Wreszcie też

$\forall X \in \mathfrak{g}_\beta : [H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} \in \langle X \rangle_{\mathbb{C}}$, co przeczy (135) o słuszności naszej konkluzji.

Skoro jednak $V_\alpha \,(\supset \mathfrak{s}_\alpha)$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$, to $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(V_\alpha) \subset V_\alpha$. Jest też $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(\mathfrak{s}_\alpha) \subset \mathfrak{s}_\alpha$. Zważywszy, że $(E_\alpha^*, F_\alpha^*, H_\alpha^*) = (F_\alpha, E_\alpha, H_\alpha)$ (wszak $H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \overset{\in \mathbb{R}_{>0}}{\cdot} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{I} \otimes i$), czyli $\mathfrak{s}_\alpha^* \subset \mathfrak{s}_\alpha$, stwierdzamy w świetle str. 18, (36)

że w rozkładzie

$$V_\alpha = s_\alpha \oplus s_\alpha^\perp$$

jest $ad_{s_\alpha}(s_\alpha) \subset s_\alpha$ oraz $ad_{s_\alpha}(s_\alpha^\perp) \subset s_\alpha^\perp$,

gdyż $X \in s_\alpha^\perp$ implikuje

$$(ad_{s_\alpha}(X) | s_\alpha) = (X | ad_{s_\alpha^*}(s_\alpha)) \subset (X | ad_{s_\alpha}(s_\alpha))$$

$$\subset (X | s_\alpha) = 0.$$

Pierwiastki jednostki $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ są postaci $\beta \in \{\mp\alpha, \mp 2\cdot\alpha\}$, przeto (137)

$$Sp\left(ad_{H_\alpha}\restriction_{V_\alpha}\right) \subset \{0, \mp(\alpha|H_\alpha), \mp 2(\alpha|H_\alpha)\}$$

$$\equiv \{0, \pm 2, \pm 4\} \subset 2\mathbb{Z} \; !$$

Załóżmy, że $s_\alpha^\perp \neq \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$s_\alpha^\perp \ni X \; : \; ad_{H_\alpha}(X) = \lambda \cdot X$, $\lambda \in \{0, \pm 2, \pm 4\}$,

więc jako przestrzeń s_α - niezmiennicza, $\cong$ rzep. $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$

koniecznie zawiera wektor, $\underline{\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\alpha}$ $\cong$ stowarzyszony

$\underline{0}$ ✓ ; $-2, -2+2=\underline{0}$ ✓, $-2+4=2$; $-4, -4+2=-2, -4+4=\underline{0}, -4+6=2, -4+8=4$

z wartością własną 0. Jednakowoż jedynym takim wektorem jest (138)

czyli ten wektor $= 0$ ↯

$H_\alpha \in S_\alpha \perp S_\alpha^\perp$, zatem $S_\alpha^\perp = \{0_{\mathfrak{g}}\}$,

co zaś oznacza, że $V_\alpha = S_\alpha$, skąd teza. $\square$

Przyjrzyjmy się teraz geometrii $Q(\mathfrak{g}; T_e)$ (w duchu Kleina). W tym celu wprowadźmy ...

Def. 21. Przyjmujemy dotychczasowy język. 139

Z dowolnym pierwiastkiem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ stowarzyszony endomorfizm

$$w_\alpha : \mathfrak{t} \circlearrowleft \,:\, H \longmapsto H - 2\cdot\frac{(\alpha|H)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha .$$

GRUPA WEYLA $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to grupa wolna generowana przez w_α,

$$W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) := \langle\, w_\alpha \mid \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \,\rangle .$$

Zauważmy, że ilekroć $H \in \mathfrak{F}\otimes i$, zachodzi – w świetle Stw. 23 (str. 119) i rzeczywistości $(\cdot|\cdot)$ na K (str. 79) – relacja (140)

$$w_\alpha(H) = \underbrace{H}_{\in \mathfrak{F}\otimes i} - \underbrace{2\frac{\overbrace{(\alpha|H)}^{\in\mathbb{R}}}{(\alpha|\alpha)}}_{\in\mathbb{R}} \triangleright \underbrace{\alpha}_{\in \mathfrak{F}\otimes i} \in \mathfrak{F}\otimes i.$$

nad $\mathbb{R}$!!!

Jako endomorfizm $\mathfrak{F}\otimes i$ odwzorowanie to jest odbicie w hiperpłaszczyźnie ortogonalnej do α, tj. $w_\alpha(H) = \begin{cases} H & \text{dla } H\perp\alpha \\ -H & \text{dla } H\in\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \end{cases}$

Odbicie to określamy mianem **ODBICIA WEYLA**. Rzecz jasna odbicie jest izometrią $(\cdot|\cdot)$,

$$W \subset O\big(\mathfrak{t}\otimes i, \overbrace{(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{t}\otimes i \times \mathfrak{t}\otimes i}}\big)$$

to jest przestrzeń $\underline{\mathbb{R}}$-liniowa

nie $\mathbb{C}$-lin.!

nad $\mathbb{R}$!!!

Bez trudu dowodzimy

<u>Tw. 7</u> $\forall w \in W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : w(Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})) \subset Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$

$\underline{D}$: Zdefiniujmy automorfizm $\mathfrak{g}$ (142) wzorem (dla dowolnego $\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$):

$$S_\alpha := \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})$$

(z którego odczytujemy $S_\alpha^{-1} = \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha})$).

Dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$ o własności $H \perp \alpha$ zachodzi $[X_\alpha, H] = 0 = [Y_\alpha, H]$, a zatem także

$$[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_H] = 0 = [\mathrm{ad}_{Y_\alpha}, \mathrm{ad}_H],$$

$$\mathrm{ad}_{[X_\alpha, H]} = \mathrm{ad}_0 = \mathrm{ad}_{[Y_\alpha, H]}$$

przeto – w tym przypadku –

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_H .$$

W bezpośrednim rachunku (ćwiczenie!) sprawdzamy dalej, że

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_{H_\alpha} \circ S_\alpha^{-1} = -\mathrm{ad}_{H_\alpha},$$ zatem w sumie – wobec liniowości ad. i rozkładu $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$

$$\forall H \in \mathfrak{h} : S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_{W_\alpha(H)} .$$

Niechaj teraz $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ i $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$$[H, S_\alpha^{-1}(X)]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1}(X) = S_\alpha^{-1} \circ (S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1})(X)$$

$$= S_\alpha^{-1} \circ \mathrm{ad}_{w_\alpha(H)}(X) \equiv S_\alpha^{-1}\big(\underbrace{[\underset{\mathfrak{h}}{w_\alpha(H)}, X]_{\mathfrak{g}}}_{\mathfrak{g}_\beta}\big)$$

$$= (\beta | w_\alpha(H)) \triangleright S_\alpha^{-1}(X) \equiv \big(w_\alpha(w_\alpha^{-1}(\beta)) \big| w_\alpha(H)\big) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$$

Ale w_α jest $\mathbb{C}$-liniowe, jest

jest izometrią na całym $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, przeto

$[H, S_\alpha^{-1}(X)] = (w_\alpha^{-1}(\beta) | H) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$, skąd wniosek,

w_α jest odbiciem $\Rightarrow w_\alpha^2 = id$

je $w_\alpha^{-1}(\beta) = w_\alpha(\beta) \in Q(g; T)$ jest pierwiastkiem 145

o wektorze pierwiastkowym $S_\alpha^{-1}(X)\ (\neq 0)$.

Skoro zaś generatory zachowują $Q(g; T)$,

to $W(g; T)$ – także. $\square$

W istocie – wobec odwracalności w_α –

$$W(g; T) \subset G_{Q(g; T)}\text{, co uzasadnia}$$

Stw. 25. $|W(g; T)| < \infty$ (grupa skończona)

D: Wynika to wprost z $|Q(g; T)| < \infty$ ($\Leftarrow \dim_{\mathbb{C}} g < \infty$) $\square$

Zanim poddamy dotychczasowe rozważania przydatnej abstrakcji, udowodnimy jeszcze

Stw. 26.

$$\forall \alpha, \beta \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) : \; 2\,\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \equiv (\beta|H_\alpha) \in \mathbb{Z} .$$

Liczby $A_{\alpha,\beta} := 2\,\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ nazywamy LICZBAMI CARTANA.

147

D: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ (wektor pierwiastkowy), a wówczas

$$[H_\alpha, X]_\mathfrak{g} = \underbrace{(\beta | H_\alpha) \triangleright X}_{\equiv A_{\alpha,\beta} \triangleright X},$$

zatem $A_{\alpha,\beta}$ jest wartością własną H_α w reprezentacji (dołączonej) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$ na $\mathfrak{g}$.

Teza jest teraz konsekwencją Tw. [Ómiyenia](i) (str. 131). $\square$

Powyższy wynik ma prostą geometryczną interpretację:

Rzut prostopadły $\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}\cdot\alpha$ pierwiastka β na $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ jest $\frac{\mathbb{Z}}{2}$-krotnością α.

$$\Updownarrow$$

$$W_\alpha(\beta) - \beta \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

$$= -2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}\cdot\alpha = -A_{\alpha\beta}\cdot\alpha$$

Podsumujemy obecnie dotychczasowe ustalenia dotyczące $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ ... (149)

<u>Tw. 8.</u> $R \equiv Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to skończony podzbiór niezerowych wektorów $\mathbb{R}$-liniowej przestrzeni kwadratowej $\left(E \equiv \mathfrak{t}\otimes i, (\cdot|\cdot)\restriction_{E\times E}\right)$ o własnościach

(1) $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$

(2) $\forall \alpha \in R \; \forall \lambda \in \mathbb{R} : \left(\lambda \cdot \alpha \in R \Longrightarrow \lambda \in \{-1,1\} \right)$

(3) $\forall \alpha,\beta \in R : w_\alpha(\beta) \in R$

(4) $\forall \alpha,\beta \in R : A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$

Abstrakcja:

150

Def. 22. SYSTEM PIERWIASTKOWY

to para $((E, \langle\cdot|\cdot\rangle), R)$ złożona z:

- $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle) \in \mathrm{Ob}\,\square\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{<\infty}$, niezerowymiarowa
- $R \subset E$ – podzbiór PIERWIASTKÓW

o własnościach:
(SP1) $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$

(SP2) $\forall_{\alpha \in R} \forall_{\lambda \in \mathbb{R}} : \left(\lambda \triangleright \alpha \in R \Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\}\right)$

(SP3) $\forall_{\alpha, \beta \in R} : \quad w_\alpha(\beta) := \beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha \in R$ ODBICIE WEYLA

(SP4) $\forall_{\alpha, \beta \in R} : \quad A_{\alpha\beta} := 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Przy tym $\dim_{\mathbb{R}} E$ nazywamy RZĘDEM SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO

Podgrupę skończoną $W((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R) := \langle w_\alpha \mid \alpha\in R\rangle \subset O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ (151)

określony mianem GRUPY WEYLA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO $\mathfrak{G}_R$.

MORFIZM SYSTEMÓW PIERWIASTKOWYCH $((E_A,\langle\cdot|\cdot\rangle_A),R_A)$, $A\in\{1,2\}$

to $\chi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2)$ o własnościach

(MSP1) $\chi(R_1)\subset R_2$

(MSP2) $\forall_{\alpha\in R_1} : \chi\circ\hat{w}^1_\alpha = \hat{w}^2_{\chi(\alpha)}\circ\chi$

dla rozszerzenia $\hat{w}^A_\alpha$ odbicia Weyla do E_A.

System pierwiastkowy nazywamy PRZYWIEDLNYM, jeśli

152

$$\exists E_1, E_2 \subset E : \left(E \simeq E_1 \oplus E_2 \wedge \forall \alpha \in R : \alpha \in E_1 \veebar \alpha \in E_2 \right)$$

$\neq 0 \quad \neq 0$ ← ortog!

W przeciwnym razie mówimy o NIEPRZYWIEDLNYM SYSTEMIE PIERWIASTKOWYM.

W dalszej części będziemy analizować anatomię systemów pierwiastkowych. Przedtem jednak zbadamy dokładnie relacje między algebrami podprostymi i prostymi:

W ramach przypomnień terminologicznych

Stw. 27. Niech $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą a.L.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \text{ - proste } \cancel{<}\!\!\Longrightarrow \mathfrak{g} \text{ - proste}.$$

D: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ - proste $\overset{ex}{\underset{def}{\Longrightarrow}} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \geqslant 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \geqslant 2$. ✓

Ponadto jeśli $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest nietrywialnym ideałem $\Longrightarrow \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — " —

— " — ↯ □

Mamy [illegible]

Tw. 9. Niech K będzie zwartą grupą Liego o algebrze Liego $\mathrm{Lie}\,K \equiv \mathfrak{k}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ jest prosta, to $\underbrace{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}_{\equiv \mathfrak{g}}$ jest prosta (jako $\mathbb{C}$-algebra).

D: W pierwszej kolejności musimy przeformułować pojęcie struktury $\mathbb{C}$-liniowej.

Lemat 1. Niech V będzie grupą przemienną. Wówczas poniższe zdania są równoważne:

(C1) Na V jest określone działanie $\mathbb{C}$, które czyni z niej przestrzeń $\mathbb{C}$-liniową.

(C2) — " — — " — $\mathbb{R}$ — " — $\mathbb{C}$-liniową. $\mathbb{R}$-liniowej, a nadto $\exists\, I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V : I \circ I = -\mathrm{id}_V$.

Endomorfizm taki określamy mianem **STRUKTURY ZESPOLONEJ** na V.

Dl 1.: $(C1) \Rightarrow (C2)$ Działanie $\mathbb{C}$ indukuje działanie $\mathbb{R}$ poprzez $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r,0)$.

Mamy też $I = (0,1) \triangleright$.

$(C2) \Rightarrow (C1)$ Działanie $\mathbb{R}$ wraz z I indukuje

$$\mathbb{C} \times V \to V : ((x,y),v) \mapsto x \triangleright v + I(y \triangleright v).$$

$\square$

Powróćmy wyniki wspólnie raz jeszcze (456) do kategorii algebr Liego:

Lemat 2. Algebra Liego nad $\mathbb{R}$ $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ jest algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow$

$$\exists \underset{\text{STRUKTURA ZESPOLONA}}{I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})} : \left(I \circ I = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \ \wedge \ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (I \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) = I \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \mathfrak{h} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{C}},\ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) :$$

$$\left(\exists\, \chi^{-1} \ \wedge \ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}} \right).$$

Dk 2: Proste ćwiczenie.