Wykład $\overline{\underline{XIII}}$

2021/22

Mony ulugowe

<u>Tw. 9.</u> Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o algebrze Liego $\mathrm{Lie}\,K \cong \mathfrak{k}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ jest prosta, to $\underbrace{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}_{\cong \mathfrak{g}}$ jest prosta (jako $\mathbb{C}$-algebra).

D :

Lemat. Niech K będzie zwartą grupą Liego o nieprzemiennej algebrze Liego $\mathfrak{k}$. Wówczas na $\mathfrak{k}$ nie istnieje struktura zespolona.

DL: Załóżmy, przeciwnie, że $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ jest strukturą zespoloną. Wówczas ad_X, $X \in \mathfrak{k}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Istotnie,

$$\forall Y \in \mathfrak{k} : \quad \mathrm{ad}_X \circ I(Y) \equiv [X, I(Y)]$$

$$= -[I(Y), X] = -I([Y,X]) = I([X,Y]) \equiv I \circ \mathrm{ad}_X(Y).$$

Ale w świetle konstruktywnego dowodu Stw. 18. na $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ istnieje niezwyrodniałą strukturę hermitowską, względem której $\mathrm{ad}_X^{\mathbb{C}}$ jest skośnie hermitowski, zatem diagonalizowalny z $\mathrm{Sp}\, \mathrm{ad}_X^{\mathbb{C}} \subset i\mathbb{R}$, o ile więc wybierzemy $X \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$, dostaniemy

$\mathrm{Sp}\, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X \neq \{0\}$, czyli $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X$ NIE
jest nilpotentny, co oznacza, że
ad_X nie jest nilpotentny.

Przechodząc do (K, I), stwierdzamy,
że $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(K)$ jako operator
NIE-nilpotentny ma niezerową
wartość własną $\lambda = (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Jeśli zatem $V \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$[X, V] \equiv \mathrm{ad}_X(V) = \lambda \triangleright V \equiv a \triangleright V + b \triangleright I(V)$$

Rozważmy $\tilde{X} := \bar{\lambda} \triangleright X \equiv a \triangleright X - b \triangleright I(X)$.

Zachodzi $[\tilde{X}, V] \equiv [\bar{\lambda} \triangleright X, V] = \bar{\lambda} \triangleright [X, V]$

$$= \bar{\lambda} \triangleright (\lambda \triangleright V) = |\lambda|^2 \triangleright V .$$

Ale $\mathrm{ad}_{\tilde{X}}$ jest skośnie symetryczny względem struktury hermitowskiej (rzeczywistej) na $\mathbb{K}$, zatem

$$|\lambda|^2(V|V) = (\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V)|V) = -(V|\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V))$$ 161

$$= -|\lambda|^2(V|V) \Longrightarrow (V=0 \vee \lambda = 0) \text{ ↯ } \square$$

Możemy już teraz przystąpić do dowodu

Twierdzenie ... Po pierwsze zauważmy, że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=0$, bo w p.p.

$\neq 0$, bo inaczej $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k}\otimes i$ – a ta nie jest $\mathbb{C}$-podprz.

$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) - \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^* \subset \mathfrak{g} - \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{k}\otimes 1$ byłoby centrum $\mathfrak{k}(\otimes 1)$ ↯ (wszak $\mathfrak{k}$ proste).

Dalej załóżmy, przeciwnie niż że $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ NIE jest proste,

= słowo jest, lub półproste –

tj. istnieją przynajmniej dwie podalgebry proste $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$, $j \in \overline{1,N}$, $N \geq 2$ o własności

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{g}_j .$$

W świetle Tw. 3 rozkład powyższy jest jedyny z dokładnością do permutacji składników. Ale też $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą podalgebr $\overline{\mathfrak{g}}_j$, gdzie 162

$$\overline{X_1\otimes 1 + X_2\otimes i} = X_1\otimes 1 - X_2\otimes i.$$

Istotnie, „sprzężenie" (właściwie ℂ-liniowe) $\overline{\cdot} : \mathfrak{g} \circlearrowleft$ zachowuje nawias Liego,

$$\overline{[X,Y]_{\mathfrak g}} = \overline{[X_1\otimes 1, Y]_{\mathfrak g} + i\triangleright [X_2\otimes 1, Y]_{\mathfrak g}}$$
$$= [X_1\otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak g} - i\triangleright [X_2\otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak g} = [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak g},$$

potem $\overline{g_j}$ spełniają te same relacje co g_j. Wobec powyższego

$$\forall j\in\overline{1,N}\ \exists k\in\overline{1,N}:\ \overline{g_j} = g_k .$$

Przypuśćmy, że $\exists j\in\overline{1,N}:\ \overline{g_j} = g_j$.

Wówczas $\forall x\in g_j:\ x+\bar{x} \in g_j\cap k$ i $g_j\cap k$

$[Y\otimes 1,\ x+\bar{x}]_g = [Y\otimes 1, x]_g + [Y\otimes 1, \bar{x}]_g = [Y\otimes 1, x]_g + \overline{[Y\otimes 1, x]_g} \in g_j$ Tdom!

jest $\neq 0$ ideałem w k. Ale $g_j\cap k \neq k$,

bo w p.p. $g_j = (g_j\cap k)^{\mathbb{C}} = k^{\mathbb{C}} = g$.

$= 0$ dla każdy $x = \alpha\otimes i$ $\forall x\in g_j$, a to nie jest $\mathbb{C}$-podprz.!

W takim razie $\mathfrak{g}_j \cap K$ jest (164)
niezdegenerowanym ideałem w K. ↯
(wszak K – prosta)

Wniosek: $\neg \exists\, j \in \overline{1,N}$: $\overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_j$.

Niechaj $\underset{j \neq k}{j,k \in \overline{1,N}}$: $\overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_k$, a wtedy
$(\mathfrak{g}_j \oplus \mathfrak{g}_k) \cap K \subset K$ jest niezerowym ideałem,
który wobec prostoty K jest tożsamy z K.
Stąd jednak wniosek: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_j \oplus \overline{\mathfrak{g}_j}$.

Mamy zatem dwie podalgebry proste, względem „sprzężenia”, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \overline{\mathfrak{g}_1}$.

Zdefiniujmy następnie odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe:

$$\chi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \underset{\equiv\, \mathfrak{k}\otimes 1}{\mathfrak{k}} : X \longmapsto X + \overline{X} .$$

Wobec $\overline{X} \in \overline{\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_2$ jest $[Y, \overline{X}]_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}_1$, przeto

$$[\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X+\overline{X}, Y+\overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{g}} + [\overline{X},\overline{Y}]_{\mathfrak{g}}$$

$$= [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \overline{[X,Y]_{\mathfrak{g}}} = \chi([X,Y]_{\mathfrak{g}}) .$$

Przy tym X jest mono, gdyż

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_1}}{X} + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_2}}{\overline{X}} = 0 \iff X = 0$$ wobec $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$.

Rachunek wymiarów (rzeczywistych)

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}$$

pokazuje, że X jest izo, zatem w świetle Lematu 2. $\mathfrak{k}$ ma strukturę zespoloną, co stoi w sprzeczności z Lematem 3. $\square$

Możemy wreszcie sformułować

<u>**Tw. 10.**</u> Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ będzie podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$ stowarzyszoną z maksymalną podalgebrą przemienną $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ <u>nie</u> jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{h}$ rozkłada się na ortogonalną sumę prostą podprzestrzeni

$$\mathfrak{h} = \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_1} \oplus \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_2}$$

o własności

$$\forall \alpha\in R(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : \left(\alpha\in\mathfrak{h}_1 \;\underline{\vee}\; \alpha\in\mathfrak{h}_2\right).$$

$\boxed{\Rightarrow}$

D: Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ nie jest proste, więc też – w świetle Tw. 9 – $\mathfrak{k}$ nie jest proste. Istnieje zatem nietrywialny ideał $\mathfrak{k}_1 \subsetneq \mathfrak{k}$. W świetle adaptacji dowodu ⊛ Stw. 19 i przy dotych-czasowym wyborze iloczynu skalarnego na $\mathfrak{k}$ (Ad_K-niezmienniczego) stwierdzamy, że także $\mathfrak{k}_1^\perp$ jest ideałem w $\mathfrak{k}$, czyli

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \,, \quad \mathfrak{k}_2 \equiv \mathfrak{k}_1^\perp \,,$$

a zatem $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{k}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

⊛ Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ ideał $\iff [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}$
(dla $\mathbb{R}$-algebry Liego)

Oczywiście jako przestrzenie $\mathbb{R}$-lin.: $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.

Niech $X \in \mathfrak{h}^{\perp} \iff (X|\mathfrak{h}) = \{0\}$, ale wtedy

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}(X)|\mathfrak{h}) = -(X|\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})) \subset (X|\mathfrak{h}) = \{0\},$$

czyli $[\mathfrak{k}, \mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}^{\perp} \implies$

$$\begin{array}{ccc} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} & \subset & \mathfrak{h}^{\perp} \\ \| \text{ ale też} & & \cap \quad = \{0\}, \\ -[\mathfrak{h}^{\perp}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} & \subset & \mathfrak{h} \end{array}$$

czyli $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} = \{0\} \implies \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ jako A.L.

Niechaj $\mathfrak{t}$ będzie maksymalną podalgebrą (169)
przemienną w $\mathfrak{k}$. Pokażemy, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$,
gdzie $\mathfrak{t}_A \subset \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$. Przypuśćmy, że

$H = X_1 + X_2$, $\tilde{H} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 \in \mathfrak{t}$, gdzie $X_A, \tilde{X}_A \in \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$.

Wówczas
$$0 = [H, \tilde{H}]_{\mathfrak{k}} = \underbrace{[X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}}}_{\in \mathfrak{k}_1} + \underbrace{[X_2, \tilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}}_{\in \mathfrak{k}_2}$$
(wszak $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2]_{\mathfrak{k}} = 0$),

zatem $[X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}} = [X_2, \tilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}$, a w takim razie

$[X_1, \tilde{H}]_{\mathfrak{k}} = [X_1, \tilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, czyli $[X_1, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, co wobec maksymalności $\mathfrak{t}$ oznacza, że $X_1 \in \mathfrak{t}$. Analogicznie pokazujemy, że $X_2 \in \mathfrak{t}$.

To jednak oznacza, że $\mathfrak{t} = \underbrace{(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{k}_1)}_{\mathfrak{t}_1} \oplus \underbrace{(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{k}_2)}_{\mathfrak{t}_2}$,

a zatem także $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

Dla dowolnych $\alpha \in Q(\underset{\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{g}_1};\underset{\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{h}_1})$ i $X \in \mathfrak{g}_{1\alpha}$ oraz $\underset{\mathfrak{h}}{H} = \underset{\mathfrak{h}_1}{H_1} + \underset{\mathfrak{h}_2}{H_2}$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$) obliczamy

$$[H, X]_{\mathfrak{g}} = [H_1, X]_{\mathfrak{g}} + \overbrace{[\underset{\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2}{H_2}, \underset{\mathfrak{g}_1}{X}]_{\mathfrak{g}}}^{=0} = [H_1, X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1) \triangleright X \equiv (\alpha|H) \triangleright X \quad \begin{pmatrix} \text{wszak } \alpha \in \mathfrak{t}_1^* \otimes i \\ \alpha \perp \mathfrak{t}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{t}_2^* \otimes \mathbb{C}$$

a stąd wniosek, że także $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$.

Analogicznie dowodzimy, że każdy $\beta \in Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{t}_2)$ jest też w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$.

Pokażemy, że każdy $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ jest albo w $Q(\mathfrak{g}_1;\mathfrak{t}_1)$, albo w $Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{t}_2)$. Niech bowiem $X = \underset{\mathfrak{g}_1}{\underset{\cap}{X_1}} + \underset{\mathfrak{g}_2}{\underset{\cap}{X_2}} \in \mathfrak{g}_\alpha$ i niech $H_1 \in \mathfrak{t}_1$, a wtedy

$$\underset{\mathfrak{g}_1}{\underset{\cap}{[H_1,X_1]_{\mathfrak{g}}}} \equiv [H_1,X_1]_{\mathfrak{g}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{[H_1,X_2]_{\mathfrak{g}}}} = [H_1,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1)\triangleright X$$

$$\equiv \underset{\mathfrak{g}_1}{\underset{\cap}{(\alpha|H_1)\triangleright X_1}} + \underset{\mathfrak{g}_2}{\underset{\cap}{(\alpha|H_1)\triangleright X_2}},$$

przeto albo $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, albo $(\alpha|H_1) = 0$, co wobec dowolności H_1 oznacza $\alpha \perp \mathfrak{t}_1$. Jeśli $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, to $\forall H_2 \in \mathfrak{t}_2 : 0_{\mathfrak{g}} = [H_2,X_1]_{\mathfrak{g}} \overset{X_2=0_{\mathfrak{g}}}{\equiv} [H_2,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_2)\triangleright \underset{\neq}{X}$, czyli $\alpha \perp \mathfrak{t}_2$,

czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_1$, wtedy jednak $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_1;\mathfrak{t}_1)$.
W przeciwnym razie (gdy $X_2 \neq 0_{\mathfrak{g}}$), $\alpha \perp \mathfrak{t}_1$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_2$,
co implikuje $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{t}_2)$. ☑

$\boxed{\Leftarrow}$ Przyjmijmy teraz, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1^{*0} \oplus^{\perp} \mathfrak{t}_2^{*0}$ $\quad A \in \{1,2\}$
i $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (\alpha \in \mathfrak{t}_1 \,\underline{\vee}\, \alpha \in \mathfrak{t}_2)$. Oznaczmy $R_A = Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{t}_A^{*}$,
i zdefiniujmy $\mathfrak{g}_A := \mathfrak{t}_A \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_A} \mathfrak{g}_\alpha$, $A \in \{1,2\}$, a wtedy

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako przestrzeni $\mathbb{C}$-lin.!, ale też
$$\begin{cases} \forall \alpha \in R_2 : [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = \overset{0}{(\alpha|_{\mathfrak{t}_1})} \triangleright \mathfrak{g}_\alpha = 0_{\mathfrak{g}} \\ \forall \alpha \in R_1 : [\mathfrak{t}_2, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}} \end{cases}$$
i oczywiście $[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$. Ponadto $\forall \alpha_A \in R_A : [\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$, albowiem $\alpha_1 + \alpha_2 \notin R_1 \cup R_2 \equiv Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$. Ostatecznie więc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako algebry Liego. □

Przeprowadzimy obecnie studium abstrakcyjnego systemu pierwiastkowego... zaczniemy od elementarnego (173)

<u>Stw. 28.</u> Niechaj (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ będą systemami pierwiastkowymi. Wówczas $(E_1 \oplus E_2, R_1 \cup R_2)$, suma prosta przestrzeni $\boxplus$! czyli $\oplus = \textcircled{$\perp$}$

gdzie $R_A \equiv j_{R_A}(R_A)$, $j_{R_A} : R_A \hookrightarrow E_A$, $r_1 \equiv (r_1, 0)$, $r_2 \equiv (0, r_2)$, jest systemem pierwiastkowym, zwanym SUMĄ PROSTĄ systemów pierwiastkowych (E_A, R_A).

174

D: Jako że $E_A = \langle R_A \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto $\langle R_1 \cup R_2 \rangle_{\mathbb{R}} = E_1 \oplus E_2$, czyli (SP1) ✓.

(SP2) jest spełniony, gdyż R_A jest SP dla E_A.

Jeśli $\alpha, \beta \in R_A$, to $w_\alpha(\beta) \in R_A \subset R_1 \cup R_2$.

Jeśli natomiast $\alpha_A \in R_A$, to $w_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2$ i $w_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1$, bo $(\alpha_1 | \alpha_2) = 0$ w $E_1 \oplus E_2$.

W sumie więc (SP3) ✓.

Prawdziwość (SP4) wynika z całkowitości (175)

$$A^{E_1\oplus E_2}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} A^{E_A}_{\alpha,\beta}\in\mathbb{Z} & \text{dla } \alpha,\beta\in R_A \\ 0 & \text{dla } \alpha\in R_1,\ \beta\in R_2 . \end{cases} \qquad \square$$

Ważne dla rozważań klasyfikacyjnych:

Stw. 29. Niechaj $\alpha,\beta\in R$, przy czym $\beta\notin\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$, a ponadto $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$. Wówczas zachodzi dysjunkcja

$$\begin{aligned} & (1)\ \langle\alpha|\beta\rangle = 0 \\ \veebar\ & (2)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}\right\} \\ \veebar\ & (3)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 2\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{4},\tfrac{3\pi}{4}\right\} \\ \veebar\ & (4)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 3\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \measuredangle(\alpha,\beta)\in\left\{\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5\pi}{6}\right\} \end{aligned}$$

D: Oznaczmy $n_1 := 2\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$, $n_2 := 2\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$.

Wiemy, że $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Jest

wersory

$$n_1\cdot n_2 = 4\frac{\langle\alpha|\beta\rangle^2}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle} \equiv 4\langle\hat{\alpha}|\hat{\beta}\rangle^2 \equiv 4\cos^2\underbrace{\sphericalangle(\alpha,\beta)}_{\equiv\,\Theta}$$

oraz

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \geq 1,$$ o ile $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ (założenie).

p.p. $n_1 = 0 = n_2$

W takim razie $0 \leq \overset{\mathbb{Z}}{\overbrace{n_1\cdot n_2}} \leq 4$, czyli $n_1\cdot n_2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

Przy tym jeśli $n_1\cdot n_2 = 0$, to $\cos\Theta = 0$, czyli $\alpha\perp\beta$, a jeśli $n_1\cdot n_2 = 4$, to $\cos^2\Theta = 1$, czyli $\beta\in\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$.

Rozważymy pozostałe przypadki:

(*) $n_1 \cdot n_2 = 1 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{4} \iff \theta \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$,

ale $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, więc $(n_1, n_2) \in \{(1,1), (-1,-1)\}$.

$(n_1, n_2) = (1,1) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle > 0$, zatem $\theta = \frac{\pi}{3}$

$(n_1, n_2) = (-1,-1) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle < 0$, zatem $\theta = \frac{2\pi}{3}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 1$, czyli $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle$.

(**) $n_1 \cdot n_2 = 2 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{2} \iff \theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$, ale

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ i $|n_2| \geq |n_1|$ (bo $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq \langle \beta | \beta \rangle$), zatem

$(n_1, n_2) \in \{(1,2), (-1,-2)\}$, [...] czyli

$(n_1, n_2) = (1,2) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$(n_1, n_2) = (-1,-2) \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle < 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 2 \Leftrightarrow \langle \alpha | \alpha \rangle = 2 \langle \beta | \beta \rangle$.

(***) Analogicznie jak w przypadku (**). $\square$

Corollarium: Niech $\alpha, \beta \in R$.

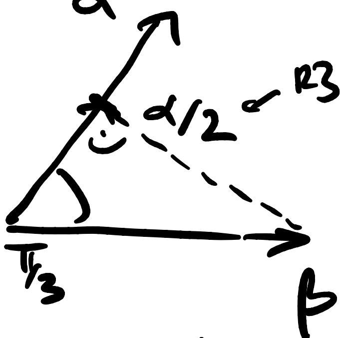
(i) $\sphericalangle(\alpha, \beta) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ (rozwarty) $\Rightarrow \alpha + \beta \in R$

(ii) $\sphericalangle(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (ostry) $\Longrightarrow \alpha - \beta, \beta - \alpha \in R$.

DC: Rozważamy po kolei możliwości (1)-(4) ze str. 29, zakładając $\langle \alpha | \alpha \rangle \geq \langle \beta | \beta \rangle$.

$\langle \alpha | \beta \rangle \neq 0 \implies$

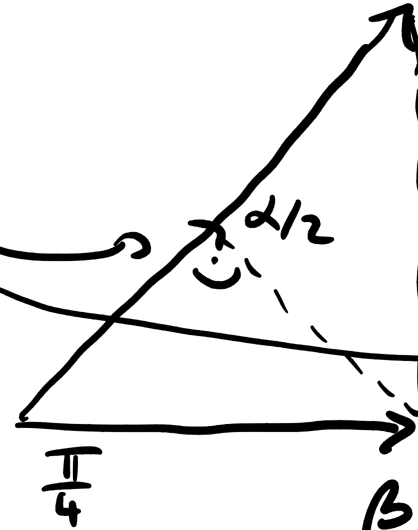
kąt ostry



$\|\alpha\| = \|\beta\|$

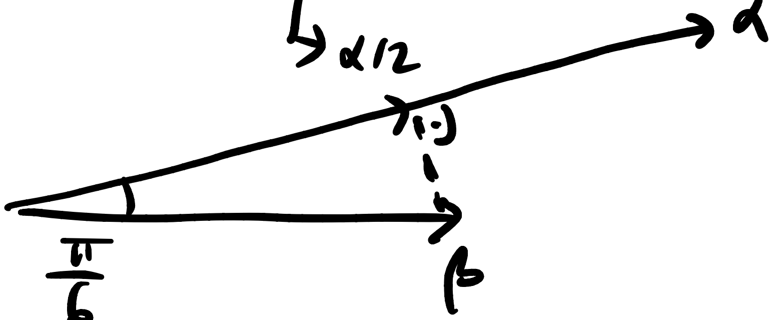
$\alpha/2$ – rzut β na α

$\vee$



$\|\alpha\| = \sqrt{2}\,\|\beta\|$

$\vee$



$\implies w_\alpha(\beta) = \beta - 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$

$\equiv \beta - \alpha \in R,$

a stąd także

$-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in R.$

Jeżeli $K(\alpha,\beta)$ rozwarty, jest $K(-\alpha,\beta)$ jest ostry i równy poprzednim wartościom, przeto 180

$$P^{\langle\alpha\rangle^\perp}_{\langle\alpha\rangle}(\beta) = -\frac{\alpha}{2},$$ a stąd $$w_\alpha(\beta) = \beta - 2\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha+\beta \in R.$$ $\square$

(POMINIĘTE!)

W naszych studiach systemów pierwiastkowych półprostych algebr Liego natrafiliśmy na obiekty „dualne", tj. kopierwiastki. Te wpiszą w nasze dalsze rozważania

<u>Stw. 30</u> Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym. Wówczas $(E,R^\vee)$, gdzie $R^\vee = \left\{\alpha^\vee = \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle}\cdot\alpha \;\middle|\; \alpha\in R\right\}$

także jest systemem pierwiastkowym, przy czym $W(E,R^\vee) = W(E,R)$ i $(R^\vee)^\vee = R$. System ten określamy mianem **DUALNEGO SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO**, a jego elementy nazywamy **KOPIERWIASTKAMI**.

181

D: obliczamy $\langle \alpha^\vee | \alpha^\vee \rangle = 4 \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle^2} = \frac{4}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$,

Zatem $(\alpha^\vee)^\vee \equiv \frac{2}{\langle \alpha^\vee | \alpha^\vee \rangle} \triangleright \alpha^\vee = \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{2} \cdot \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \triangleright \alpha = \alpha$.

Ponadto $A_{\alpha^\vee, \beta^\vee} \equiv 2 \frac{\langle \alpha^\vee | \beta^\vee \rangle}{\langle \alpha^\vee | \alpha^\vee \rangle} = \frac{\langle \alpha | \alpha \rangle}{2} \cdot \left\langle \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \triangleright \alpha \,\middle|\, \frac{2}{\langle \beta | \beta \rangle} \triangleright \beta \right\rangle$

$$= \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \equiv A_{\beta|\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

(182)

transpozycja w macierzy Cartana

Wobec $\alpha^\vee \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$ mamy też $W_{\alpha^\vee} \equiv W_\alpha$, a przy tym

$$W_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) \equiv W_\alpha\left(\frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta\right) = \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright W_\alpha(\beta)$$

$$= \frac{2}{\langle W_\alpha(\beta)|W_\alpha(\beta)\rangle} \triangleright W_\alpha(\beta) \equiv W_\alpha(\beta)^\vee,$$ co ma sens,

$W_\alpha \in O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

bo R jest zachowywana przez $W(E,R)$.

W takim razie $\forall\, w \in W(E,R^\vee) \equiv W(E,R)$:

$$w(R^\vee) \subset R^\vee .$$

Przy tym $\langle \alpha^\vee \mid \alpha^\vee \in R^\vee \rangle \equiv \langle \alpha \mid \alpha \in R \rangle = E$.

Wreszcie jej jedyne krotności $\alpha^\vee$ to te, które pochodzą od krotności α, czyli

$$(\pm\alpha)^\vee = \pm\alpha^\vee . \qquad \square$$

<u>N.B.</u> $\forall\, \alpha,\beta \in R : \|\alpha\| = \|\beta\| \Rightarrow R^\vee \cong R$.

Izomorfizm taki może mieć miejsce
nawet gdy wśród jednakiej długości
pierwiastków nie jest spełniony (morfizmy nie muszą być izometriami)