Wykład XIV

2021/22

Pojęcie porządkujące wasze rozważania wprowadza 184

<u>Def.</u> <u>23.</u> Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym.

<u>BAZA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO</u> to podzbiór $\Delta\subset R$

o własnościach: (BSP1) Δ jest bazą E

wykład jest jednoznaczny (BSP2) $R = \langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^{\setminus\{0\}} \cup \langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}^{\setminus\{0\}}$

Pierwiastki $\alpha\in \underbrace{\langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\setminus\{0\}}_{R_+}$ dzielimy mianem <u>DODATNICH</u>.

Pierwiastki $\alpha\in \underbrace{\langle\Delta\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\setminus\{0\}}_{R_-}$ dzielimy mianem <u>UJEMNYCH</u>.

Elementy Δ nazywamy <u>DODATNIMI PIERWIASTKAMI PROSTYMI</u>.

W dalszej części wykładu zbadamy geometrię kątów...
oraz E i R w relacji do Δ ...

Str. 31. $\forall \alpha, \beta \in \Delta : \left(\alpha \neq \beta \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle \leq 0 \right)$.

(czyli $\measuredangle(\alpha, \beta) \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$).

D: A.a. Niech $\langle \alpha | \beta \rangle > 0$, a wtedy $\measuredangle(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

więc na mocy Corollari_ $\alpha - \beta$ i $\beta - \alpha \in R$.

Jednoznaczny rozkład $\alpha - \beta$ w bazie Δ byłby jednak niezgodny z (BSP2). ↯ $\square$

Następnie dowodzimy

Pomocniczo rozważymy...

Stw. 32. $\exists\, \Pi \subset E$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1 : \Pi \cap R = \emptyset$.

(86)

D: Niechaj $\alpha \in R$ i niech $\Pi_\alpha := \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \equiv \operatorname{Ker}\langle \alpha | \cdot \rangle$

$(\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\langle \alpha | \cdot \rangle \equiv \dim_{\mathbb{R}} E - 1)$.

$|R| < \infty \implies \exists\, h \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \Pi_\alpha$ (intuicja:

$\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} \cup \langle e_2 \rangle_{\mathbb{R}} \neq \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ dla e_1, e_2 LNZ).

Niechaj teraz $\Pi_h = \langle h \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, a wtedy

$\alpha \in \Pi_h$ oznacza $h \in \Pi_\alpha$, co nie może zachodzić

dla $\alpha \in R$. Π_h jest poszukiwaną hiperpłaszczyzną. $\square$

Możemy użyć poniższego w

Def. 24. Niech (E, R) będzie systemem pierwiastkowym i niech $\Pi \subset E$ jak w str. 32, a wówczas $R = R^{\Pi}_{+} \sqcup R^{\Pi}_{-}$, gdzie $R^{\Pi}_{\pm}$ jest zawarty w spójnej składowej $E^{\Pi}_{\pm}$ rozkładu $E \setminus \Pi = E^{\Pi}_{+} \sqcup E^{\Pi}_{-}$.
Pierwiastek $\alpha \in R^{\Pi}_{\pm}$ nazywamy ROZKŁADALNYM, jeżeli $\exists\, \beta, \gamma \in R^{\Pi}_{\pm} : \beta + \gamma = \alpha$. W przeciwnym razie mówimy, że α jest NIEROZKŁADALNY.
Mamy ulepszone...

Tw. 11. Niechaj (E,R) będzie SP, a $\Pi \subset E$ jak w Stw. 32, R_+^Π zaś – jak w Def. 24.

Wówczas zbiór nierozkładalnych elementów R_+^Π jest bazą R. I odwrotnie, dla dowolnej bazy $\Delta \subset R$ istnieje $\Pi_\Delta \subset E$: Δ jest podzbiorem nierozkładalnych elementów $R_+^{\Pi_\Delta}$ („nowy” Π_Δ).

D: $|\Rightarrow|$ Niechaj $\Delta_\Pi \subset R_+^\Pi$ będzie zbiorem elementów nierozkładalnych. Wybierzmy $h_{\neq 0} \perp \Pi$, mamy

$$E_+^\Pi = \{ v \in E \mid \langle h | v \rangle > 0 \}.$$

Po pierwsze zauważamy, że (czyli: Δ_Π generuje R_+^Π nad $\mathbb{N}$) 189

* $\forall \alpha \in R_+^\Pi \ \exists \{n_\delta\}_{\delta\in\Delta_\Pi} \subset \mathbb{N} : \ \alpha = \sum_{\delta\in\Delta_\Pi} n_\delta \cdot \delta.$

Załóżmy przeciwnie i wybierzmy pośród elementów R_+^Π (– oznaczmy je $N\Delta_\Pi$), dla których nie istnieje taki rozkład, taki $\alpha \in R_+^\Pi$ ($\exists$, bo $|R|<\infty$), który ma minimalny rzut $\langle h|\alpha\rangle$. Oczywiście $\alpha \notin \Delta_\Pi$ (bo elementy Δ_Π mają takie (trywialne) rozkłady), przeto α jest rozkładalny, $\exists\, \beta_1, \beta_2 \in R_+^\Pi : \ \alpha = \beta_1 + \beta_2$. Przy tym gdyby oba pierwiastki β_1 i β_2 były kombinacjami elementów Δ_Π ze współczynnikami z $\mathbb{N}$, to mamy własność rozkładu α.

W takim jednak razie jeden z nich, np. β_1, należy do $N\Delta_\Pi$. Ale

$$\underset{\displaystyle 0}{\overset{\vee}{\langle h|\alpha\rangle}} = \underset{\displaystyle 0}{\overset{\vee}{\langle h|\beta_1\rangle}} + \underset{\displaystyle 0}{\overset{\vee}{\langle h|\beta_2\rangle}}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle h|\beta_1\rangle < \langle h|\alpha\rangle \quad ↯$$

(wszak α ma minimalny wynik na h!)

** Jeśli teraz $\alpha, \beta \in \Delta_\Pi$ i $\alpha \neq \beta$, to $\langle \alpha|\beta\rangle \leq 0$ (co nie jest oczywiste na obecnym etapie, bo nie pokazaliśmy, że Δ_Π jest bazą). Istotnie, gdyby było $\langle\alpha|\beta\rangle > 0$, to $\alpha-\beta, -(\alpha-\beta) \in R$, ale dokładnie! jeden $\exists$ nie należy do R^{Π}_{+}.

$\alpha-\beta\in R^{\Pi}_{+} \Rightarrow \alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ – rozkładalny ↯

$\beta-\alpha\in R^{\Pi}_{+} \Rightarrow \beta=(\beta-\alpha)+\alpha$ – – | — ↯

Ponadto zbiór Δ_{Π} jest LNZ. ***

Istotnie, niech $\sum_{\alpha\in\Delta_{\Pi}} \lambda_{\alpha} \triangleright \alpha = 0$ przy czym

zakładamy $\alpha \ \exists \ \lambda_{\alpha} \neq 0$

$\left(\Delta^1_{\Pi}\cap\Delta^2_{\Pi}=\emptyset\right) \longrightarrow \ = \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_{\Pi}} \underbrace{|\lambda_{\alpha_1}|}_{\geq 0} \triangleright \alpha_1 - \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_{\Pi}} \underbrace{|\lambda_{\alpha_2}|}_{\geq 0} \triangleright \alpha_2$ z zał.

czyli $\underbrace{\sum_{\alpha_1\in\Delta^1_{\Pi}} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1}_{= v} = \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_{\Pi}} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2$, a wtedy

$$\langle v|v\rangle \equiv \Big\langle \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \Big| \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2 \Big\rangle \qquad (192)$$

$$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_1}|\cdot|\lambda_{\alpha_2}|\cdot\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle \underset{**}{\leq} 0 \text{, zatem}$$

$v=0$, tj. $\sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 = 0 = \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2$,

wtedy jednak $0 = \Big\langle h \Big| \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \Big\rangle$

$$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \cdot \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\langle h|\alpha_1\rangle} \text{ daje } \quad (\text{bo } \alpha_i\in R^n_{\pm})$$

czyli $|\lambda_{\alpha_1}|=0$; analogicznie $|\lambda_{\alpha_2}|=0$.

$\lightning$ (wszystkie $\lambda_{\alpha_i}\neq 0$) $\qquad \lightning$

Skoro jednak $R^\Pi_+ \subset \langle \Delta_\Pi \rangle_{\mathbb{N}}$, to także (193)

$\alpha \mapsto -\alpha$ zachowuje R i zmienia znak iloczynu $\langle \alpha | h \rangle \mapsto -\langle \alpha | h \rangle$

$$R^\Pi_- \equiv -R^\Pi_+ \subset \langle \Delta_\Pi \rangle_{-\mathbb{N}},$$ a ponieważ

$E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto $E = \langle \Delta_\Pi \rangle_{\mathbb{R}}$, co dowodzi, że Δ_Π jest bazą E. ■

$\boxed{\Leftarrow}$ Niechaj teraz $\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ będzie bazą R, czyli tej bazą E. Ustalmy (dowolnie) liczby $\lambda_i > 0$, $i \in \overline{1,r}$ i odpowiadający im (jednozn.) element $\gamma \in E$: $\forall_{i \in \overline{1,r}} : \langle \gamma | \alpha_i \rangle = \lambda_i$.

Komentarz: Niech $\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ baza V, $\{\lambda_i\}_{i\in\overline{1,r}}\subset\mathbb{K}$ (dow.)

Szukamy $\varphi\in V^*$: $\forall i\in\overline{1,r} : \varphi(\alpha_i)=\lambda_i$.

Jest $\varphi=\lambda_i \triangleright a^i$, gdzie $a^i(\alpha_j)=\delta^i{}_j$.

Niezwyrodnienie $\langle\cdot|\cdot\rangle$ pozwala przypisać φ jedyny wektor γ : $\varphi\equiv\langle\gamma|\cdot\rangle$.

Mając γ, stwierdzamy, że

na $R_+ \equiv R \cap \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}} \ni \alpha$ jest $\langle \gamma | \alpha \rangle > 0$,

czyli $R_+ \subset E_+^{\Pi_\gamma}$, gdzie $\Pi_\gamma = \langle \gamma \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \subset E$.

(str. 187)

Niechaj teraz $\alpha \in \Delta^{\mathrm{c}\, R_+}$ i załóżmy, że

α rozkładalny na co najmniej dwa

elementy R_+ (oczywiście ze współczynnikami z $\mathbb{N}^\times$).

Oba elementy nie mogą być z $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$,

bo $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}} \cap R = \{\pm \alpha\}$, zatem $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i $\underset{(\text{np.})}{\beta_1 \neq \alpha}$, czyli w rozkładzie bazowego! α występuje $\neq \alpha$ pierwiastek $\tilde{\alpha} \in \Delta$ (z $\neq 0$ współczynnikiem) – wszak β_1 rozkładalny w bazie Δ. verte

To jednak oznacza, że Δ nie jest LNZ. ↯

Każdy zatem $\alpha \in \Delta$ jest nierozkładalny.

W takim razie na mocy udowodnionej części $\boxed{\Rightarrow}$ twierdzenia $\Delta \subset \Delta_{\Pi_\gamma}$. Ale Δ_{Π_γ} jest bazą E, zatem $|\Delta_{\Pi_\gamma}| = \dim_{\mathbb{R}} E \equiv |\Delta|$, czyli $\Delta \equiv \Delta_{\Pi_\gamma}$. □

Gdyby było: $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i składowa $\sim \alpha_i$ w β_1

znak inny niż składowej $\sim \alpha_i$ w β_2

(tym razem: α nie ma takiej składowej),

to jeden z β_1, β_2 byłby z $R_- := R \cap \langle \Delta \rangle_{-\mathbb{N}}$!

Założyliśmy tymczasem, że oba $\in R_+$.

Zachodzi też

Str. 33. Niech Δ będzie bazą R.

Wówczas $\{\alpha^\vee\}_{\alpha\in\Delta}$ jest bazą $R^\vee$.

D: Zaczniemy od

Lemat: Niech Δ będzie bazą R, a $R_+ \equiv R \cap \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$ – zbiorem pierwiastków dodatnich.

$$\forall_{\alpha\in\Delta} : \alpha \notin \langle R_+ \setminus \{\alpha\} \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

Dl: A.a. Oznaczmy dla wygody $\alpha_1 = \alpha$ i $\Delta \setminus \{\alpha\} = \{\alpha_j\}_{j\in\overline{2,r}}$.

Przyjmijmy, że $\alpha_1 = \sum_{\beta\in R_+\setminus\{\alpha\}} \lambda_\beta \rhd \beta$, $\lambda_\beta \in \mathbb{R}$.

Skoro $R_+ \subset \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$, to dostajemy relację

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \triangleright \alpha_i \quad , \quad \mu_i \geq 0$$ (197)

Wobec liniowej niezależności $\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ musi być $\mu_i = \delta_{i1}$, ale każdy $\beta \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$ w rozkładzie (≥ 0),

zatem to implikuje $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta \in \langle \alpha_1 \rangle_{\mathbb{R}}$!

czyli $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta = \alpha_1$ (innych $\mathbb{R}$-krotności nie ma w R_+). $\lightning$ (wszakże $\beta \in R_+ \setminus \{\alpha_1\}$) $\boxtimes$

Wracamy do dowodu twierdzenia...

Ustalmy $\Pi_\Delta \subset R$, $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_\Delta = 1$ w relacji z Δ

jako w Tw. 11 (str. 188), oznaczając przy tym jako E_+

podzbiór E zawierający Δ, tj. R_+ są pierwiastkami dodatnimi wzgl. Δ.

Wtedy także $\{\alpha^\vee\}_{\alpha\in R_+} \subset E_+$ i $\{\beta^\vee\}_{\beta\in R_-} \subset E_-$.

Na mocy Tw. 11 : $\exists\, \Delta^\vee$ bazą $R^\vee$: $R^\vee_+ \equiv \{\alpha^\vee\}_{\alpha\in R_+}$

to pierwiastki dodatnie wzgl. $\Delta^\vee$

Jeśli teraz $\alpha \in R_+ \setminus \Delta$, to $\alpha \in \bigoplus_{i=1}^{r} \langle \alpha_i \rangle_{\mathbb{N}}$ i przy czym przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie w bazie $\neq 0$. Wówczas $\alpha^\vee \in \bigoplus_{i=1}^{r} \langle \alpha_i^\vee \rangle_{\mathbb{R}\geq 0}$ i przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie są $\neq 0$. Ale

$\forall i \in \overline{1,r}: \quad \alpha_i^\vee \in R_+^\vee \ \wedge\ \alpha_i^\vee \neq \alpha^\vee$, gdyż $\alpha^\vee$ nie jest jednym z $\alpha_i^\vee$, a dał się rozpisać na nich (+)

byłoby $(\alpha^\vee)^\vee = (\alpha_i^\vee)^\vee \equiv \alpha_i$ (str. 181). Możemy

$\equiv \alpha$

zatem przywołać tego Lematu, nie jest bazą $\Delta^\vee$

by stwierdzić, że $\alpha^\vee \notin \Delta^\vee$. W takim razie $\Delta^\vee \subset \{\alpha_i^\vee\}_{i\in\overline{1,r}}$, a ponieważ $\Delta^\vee$ jest bazą E, przeto $|\Delta^\vee| = |\Delta| = r$, czyli $\Delta^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i\in\overline{1,r}}$. $\square$

Dotychczasowe rozważania odpowiadają coś do

200

Def. 25. Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym i niech $\Pi_\alpha = \mathrm{Ker}\,\langle\alpha|\cdot\rangle$, $\alpha\in R$. (OTWARTA) KOMNATA WEYLA systemu pierwiastkowego (E,R) to spójna składowa $E\setminus\bigcup_{\alpha\in R}\Pi_\alpha$. (OTWARTA) FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA s.p. (E,R) wzgl. bazy $\Delta=\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ to zbiór

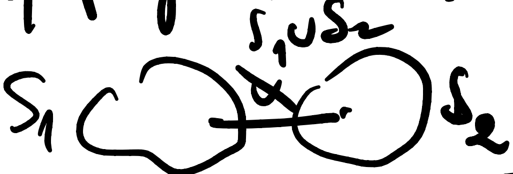
$$\mathcal{C}(E,R;\Delta)=\{\,v\in E \mid \forall_{i\in\overline{1,r}}: \langle\alpha_i|v\rangle>0\,\}.$$

Pokażemy, że $\mathfrak{C}$ jest komorą Weyla...

NB: $\forall v_1, v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)\ \forall t \in [0,1]$:

$$v := t \triangleright v_1 + (1-t) \triangleright v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$$

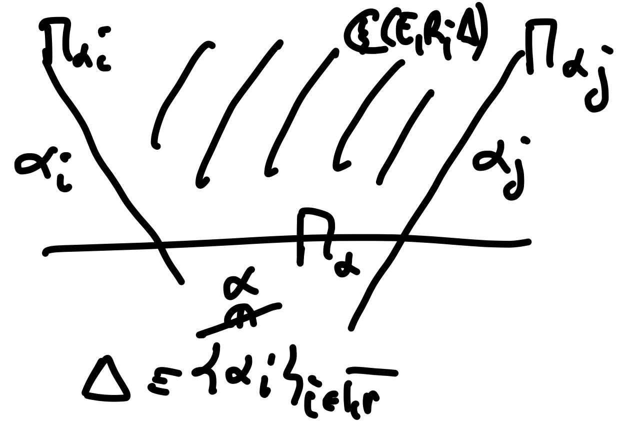
W rzeczy samej $t, 1-t \geq 0$ i przynajmniej jedna z liczb $t, 1-t$ jest > 0, co jednak oznacza, że $\forall i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle > 0$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest zbiorem wypukłym, więc też spójnym, a ponieważ istnieje 1-forma φ na E : verte 1° $\varphi(\alpha_i) = 1,\ i \in \overline{1,r}$, przeto istnieje wektor v : $\langle \alpha_i | v \rangle = 1,\ i \in \overline{1,r}$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta) \neq \emptyset$. Wreszcie też



$\partial \mathfrak{C}(E,R;\Delta) = \{ v \in E \mid \exists i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \}$ verte 2°, zatem $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest komorą Weyla verte 3°

1° Chcemy $\forall i \in \overline{1,r} : \varphi(e_i) = 1$. Bierzemy $\{\varphi^i\}_{i\in\overline{1,r}} : \varphi^i(e_j) = \delta^i_j$ i kładziemy $\varphi := \sum_{i=1}^{r} \varphi^i$.

2° Dodatnie, nie może być



,

bo wtedy opuszczenie Σ przez Π_α <u>nie</u> wiązałoby się ze złamaniem żadnego z warunków $\langle \alpha_i(v) \rangle > 0$, $i \in \overline{1,r}$!

3° Niech $v \in \mathfrak{C} \cap \Pi_\alpha$, $\alpha \in R$, czyli $\langle v|\alpha\rangle = 0$, ale $\underset{(i)}{\alpha \in \langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}} \,\underline{\vee}\, \underset{(ii)}{\alpha \in \langle\Delta\rangle_{-\mathbb{N}}}$

(i) $\Rightarrow$ $0 = \langle v|\alpha\rangle = \sum_i |n^i| \cdot \underbrace{\langle v|\alpha_i\rangle}_{}^{>0} \overset{!}{\Rightarrow} \forall i : n_i = 0$ $\lightning$

(ii) $\Rightarrow$ $0 = \langle v|\alpha\rangle = -\sum_i |n^i| \cdot \overset{>0\,!}{\langle v|\alpha_i\rangle} \Rightarrow \forall i : n_i = 0$ $\lightning$

OBSERWACJE :

1) $\forall v \in \mathcal{C}(E,R;\Delta)\ \forall \alpha \in R_+ : \langle \alpha | v \rangle > 0$

$(\Leftarrow \alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}})$

2) $\forall \chi \in W(E,R) : \chi(R) = R \ \wedge\ \chi \in O(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

bo $\chi(\Pi_\alpha) = \{\chi(v) \mid \langle v | \alpha \rangle = 0\}$

$\Rightarrow \chi(\{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}) = \{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}$ $\quad \equiv \{\chi(v) \mid \langle \chi(v) | \chi(\alpha) \rangle = 0\}$

$\equiv \Pi_{\chi(\alpha) \in R}$; χ odwracalne!

$\Rightarrow \forall C$ - otwarta komora Weyla : $\chi(\bar{C})$ - otwarta komora Weyla

Okazuje się, że związek pomiędzy bazami i (fundamentalnymi) komorami Weyla jest 1:1...

Str. 34. $\forall C$ - otwarta komora Weyla (E,R) $\exists!\,\Delta_C$ - baza R: (203)

$$C \equiv \mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) \wedge R_+^{(\Delta_C)} \equiv \{\alpha \in R \mid \forall v \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) : \langle \alpha | v \rangle > 0\}$$

Istnieje zatem jedno-jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy bazami R i otwartymi komorami Weyla.

D: Niechaj $v \in C$ i rozważmy $\Pi_v = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Wprost z definicji C: v nie jest $\perp$ do żadnego pierwiastka α, zatem $\Pi_v \subset E \setminus R$ (nie zawiera pierwiastków). Na mocy Tw. 11 (1. część) istnieje baza $\Delta_C = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ w części $E \setminus \Pi_v$ zawierającej v.

$v \in$ DOPEŁNIENIE $\bigcup \Pi_\alpha$, α - t.że $v \perp \alpha$

bo $\Pi_v \ni \alpha \Rightarrow v \in \Pi_\alpha$!

Jeśli jest $\mathrm{sign}\langle \alpha_i, \cdot \rangle|_C = \mathrm{const}$ (w p.p. przecięlibyśmy

któryś z $\Pi_{\alpha_i} \in \{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}$), przeto – wobec wyboru $v \in C$ tak, by mieć

położenie Δ_C – $\forall w \in C \; \forall i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | w \rangle > 0$,

czyli też $\forall w \in C \; \forall \alpha \in R_+^{\Pi_v} : \langle w | \alpha \rangle > 0$, bo $R_+^{\Pi_v} \hat{\subset} \langle \Delta_C \rangle_{\mathbb{N}}$

a ponieważ $R_\pm^{\Pi_v} \subset \langle \Delta_C \rangle_{\pm\mathbb{N}}$, więc $R_+^{\Pi_v}$ składa się

z tych i tylko tych (czyli zawiera wszystkie i tylko te) pierwiastków, które mają dodatni

iloczyn skalarny z elementami C.

Oczywiście $C \equiv \mathfrak{C}(E, R; \Delta_C)$. Pozostaje upewnić się co do jedyności Δ_C.

Niechaj Δ'_c będzie dowolną bazą o fundamentalnej komorze Weyla $C \equiv \mathbb{C}(E, R; \Delta'_c)$. Wówczas

$\forall \alpha \in \Delta'_c \ \forall v \in C : \langle \alpha | v \rangle > 0$, czyli $\Delta'_c \subset R_+^{\Pi r}$,

tj. w tej samej części co Δ_c. W konsekwencji

$R_+^{(\Delta'_c)} \equiv R_+^{(\Delta_c)} \implies$ mają te same nierozkładalne pierwiastki dodatnie, tj. $\Delta'_c \equiv \Delta_c$. $\square$

vete !

Bez trudu dowodzimy zatem

<u>Stw. 35.</u> $\forall \alpha \in R \ \exists \Delta\text{-baza } E : \alpha \in \Delta$.

Trochę później: Δ_C są nierozkładalne (tak jak wykazaliśmy), ale Δ_C' jest bazą E (z zał.), więc elementy Δ_C rozkładają się w tejże bazie Δ_C'. Gdyby te rozkłady NIE były trywialne (z jednym tylko $n^i \neq 0$, co właśnie daje $\Delta_C = \Delta_C'$), to oznaczałoby rozkładalność odnośnych elementów Δ_C (na sumy innych pierwiastków z dodatniej pół-przestrzeni). ↯

D: Zauważmy, że ściany $\partial \mathcal{C}(E, R; \Delta \equiv \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}})$ 206

są fragmentami hiperpłaszczyzn Π_{α_i}, $i \in \overline{1,r}$.
(PATRZ: 201½)

Wystarczy zatem pokazać, że $\forall \alpha \in R$:

Π_α ma przecięcie $\Pi_\alpha \cap \partial C$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}(\Pi_\alpha \cap \partial C) = 1$

z brzegiem pewnej komory Weyla C.

Rozważmy zatem $\alpha \in R$ i odnośną Π_α.

Ta ostatnia jest przestrzenią $\mathbb{R}$-liniową wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} E - 1$. Jej przecięcie z hiperpłaszczyznami Π_β, $\beta \in R\setminus\{\pm\alpha\}$

są podprzestrzeniami w Π_α wymiaru

← bo $\beta \notin \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$

co najwyżej $\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha - 1$, zatem ich

suma <u>mnogościowa</u>, $\bigcup_{\beta\in R\setminus\{\pm\alpha\}} (\Pi_\beta\cap\Pi_\alpha)$ $\quad |R\setminus\{\pm\alpha\}|<\infty$!

jest <u>właściwym</u> podzbiorem Π_α,

$$\bigcup_{\beta\in R\setminus\{\pm\alpha\}} (\Pi_\beta\cap\Pi_\alpha) \subsetneq \Pi_\alpha \quad \begin{pmatrix}\text{elementarna}\\ \text{algebra}\\ \text{liniowa}\end{pmatrix},$$

↓

patrz: str. 186

czyli $\exists\, v \in \Pi_\alpha \setminus \bigcup_{\beta\in R\setminus\{\pm\alpha\}} \Pi_\beta$.

Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zachodzi (208)

wówczas $v_\varepsilon \equiv v + \varepsilon \triangleright \alpha \in C$ dla pewnej otwartej komory Weyla C (wszak $v_\varepsilon \in E \setminus \bigcup_{\beta \in R} \Pi_\beta$).

Pokażemy, że $\alpha \in \Delta_C$, gdzie Δ_C jest bazą, o której mówi Stw. 34. $\quad \Delta_C = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$

Zważywszy $\langle \alpha | v_\varepsilon \rangle = \langle \alpha | \varepsilon \triangleright \alpha \rangle = \varepsilon \langle \alpha | \alpha \rangle > 0$, jest z konieczności $\alpha \in R_+^{\Delta_C}$. Zapiszmy przeto

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n^i \triangleright \alpha_i \,, \quad n^i \in \mathbb{N} \,,$$ a wtedy

bo $v_\varepsilon \in C$ (patrz: Stw. 34)

$0 = \langle \alpha | v \rangle = \sum_{i=1}^{r} n^i \cdot \langle \alpha_i | v \rangle$, a ponieważ

209

$v \in \partial C$, przeto $\langle \alpha_i | v \rangle \geq 0$, czyli

$\forall i \in \overline{1,r} : \left(n^i > 0 \Rightarrow \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \right)$. Jednakowoż

bo $v \perp \beta \Leftrightarrow v \in \Pi_\beta$ {patrz: Def. 207}

$\forall \beta \notin \{\pm \alpha\} : v \not\perp \beta$, przeto $\exists! \, i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle = 0$,

czyli też $\exists! \, i \in \overline{1,r} : n^i > 0$, co oznacza, że

Verte $\quad \alpha = \alpha_i \in \Delta_C$. $\square$

Trochę czytelniej: Jeśli α <u>nie</u> jest w bazie,

to ma rozkład w tejże,

$$\alpha = \sum n^i \alpha_i \quad \ni \quad n^i \geq 0 \text{ i co najmniej dwa } n^i \neq 0 \neq n^j, \ i \neq j$$

(nie jedyny!),

ale wtedy $\langle \alpha_i | v \rangle = 0 = \langle \alpha_j | v \rangle$,

tymczasem $\alpha_i, \alpha_j \notin \{\pm\alpha\}$, zatem $\alpha_i, \alpha_j \not\perp \beta$,

więc sprzeczność.