# Wykład XV

2021/22

## Rekapitulacja:

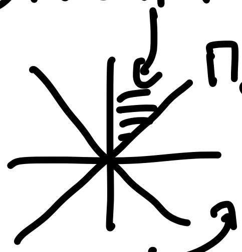
- SYSTEM $\Gamma$ $\supset$ BAZA SYSTEMU $\Gamma$ $\leftarrow$ elementy NIEROZKŁADALNE

  wtw. $\Pi \cap R = \emptyset$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1$

- wektory bazowe $\uparrow\uparrow$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, 1:1

- KOMNATY WEYLA $\ni$ FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA

  $\Pi_\alpha$, $\alpha \in R$ $\qquad$ BAZA $\partial \mathcal{C} = \bigcup_i \tilde{\Pi}_{\alpha_i}$



W(E,R) działa na nich

- $\Gamma$: każdy może być bazowym!

W następnej kolejności zbadamy działanie $W(E,R)$ na zbiorze komnat Weyla (patrz: obserwacja 2) ze str. 202), co doprowadzi nas do diagramatycznej reprezentacji systemów pierwiastkowych...



__Str. 36.__ Niechaj $(E,R)$ będzie systemem pierwiastkowym.

$$\forall \Delta\text{-baza } (E,R) : \ W(E,R) = \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle .$$

Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komnat Weyla jest przechodnie.

D: Ustalmy bazę $\Delta$ i rozważmy podgrupę $W_\Delta \equiv \langle w_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset W(E,R)$. (211)

Niech $C$ będzie dowolną otwartą komorą Weyla. Wybierzmy $v \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $w \in C$. Pokażemy, że $\exists\, \chi \in W_\Delta : \chi(w) \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$. W tym celu wybierzmy $\chi_* \in W_\Delta$ spełniające warunek

$$\|\chi_*(w) - v\|_E = \min_{\chi \in W_\Delta} \|\chi(w) - v\|_E$$

(jest dobrze określone, gdyż $|W_\Delta| \leq |W(E,R)| < \infty$).

Załóżmy, że $\chi_*(w) \notin \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$, a wtedy

212

$\exists\, \alpha \in \Delta : \langle \alpha \mid \chi_*(w) \rangle < 0$, co jednak oznacza, że

($\bigcap \Pi_\alpha, \alpha\in\Delta$ ograniczają $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ (warunki $\langle v|\alpha\rangle>0$)) wobec $\langle v|\alpha\rangle > 0$ –

$$\| \chi_*(w) - v \|_E^2 - \| w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \|_E^2$$

$$= \left( \chi_*(w) - v \,\middle|\, \chi_*(w) - v \right) - \left( w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \,\middle|\, w_\alpha \circ \chi_*(w) - v \right)$$

$$= \cancel{(w|w)} - 2\left(\chi_*(w) \,|\, v\right) + \cancel{(v|v)}$$

$$- \cancel{(w|w)} + 2\left(w_\alpha \circ \chi_*(w) \,|\, v\right) - \cancel{(v|v)}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \wedge \end{matrix}$$

$$= 2\left( \cancel{\chi_*(w)} - 2\,\frac{(\chi_*(w)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha - \cancel{\chi_*(w)} \,\middle|\, v \right) = -4\,\frac{(\chi_*(w)|\alpha)\cdot(\alpha|v)}{(\alpha|\alpha)},$$

czyli $\quad \| w_\Delta \circ X_*(w) - v \| < \min\limits_{X \in W_\Delta} \| X(w) - v \| \quad \lightning$

(wszak $w_\Delta \circ X_* \in W_\Delta$).

Zatem $X_*(w) \in \mathfrak{C}(E, R; \Delta)$, co wobec dowolności $w$ oznacza, że $C$ można odwzorować w $\mathfrak{C}(E, R; \Delta)$ używając $W_\Delta$, a ponieważ $X_* \in W_\Delta$ zachowuje kąty, jest pewne, że $X_*$ przeprowadza całą komnatę $C$ w $\mathfrak{C}(E, R; \Delta)$ — a ściany w ściany!, czyli $X_*(C) = \mathfrak{C}(E, R; \Delta)$.

W takim razie ...

$\forall\, C_1, C_2$ – otwarte komory Weyla

$\exists\, \chi \in W_\Delta : \ \chi(C_1) = C_2$, co oznacza,

że $W_\Delta$ – tym bardziej wobec $W$ – działa

przechodnio na zbiorze komór.

Pozostaje przekonać się, że $W_\Delta = W$.

Rozważmy $\alpha \in R$. W świetle Stw. 35 $\left(\begin{smallmatrix}\forall \alpha \in R \\ \exists \text{ baza } \Delta \ni \alpha\end{smallmatrix}\right)$

$\exists\, \Delta_{(\alpha)}$ – baza $: \alpha \in \Delta_{(\alpha)}$, więc też – $\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})$.

Ustalmy $\chi \in W_\Delta : \ \chi(\mathfrak{C}(E, R; \Delta_{(\alpha)})) = \mathfrak{C}(E, R; \Delta)$.

Potrzebujemy...

**Lemat:** $\forall \alpha \in R \ \forall \chi \in W(E,R)$ :



$$w_{\chi(\alpha)} = \chi \circ w_\alpha \circ \chi^{-1}.$$

**DL:** $\forall v \in E$ : $w_{\chi(\alpha)}(v) \equiv v - 2\,\frac{(v|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$

$$= \chi(\chi^{-1}(v)) - 2\,\frac{(\chi(\chi^{-1}(v))|\chi(\alpha))}{(\chi(\alpha)|\chi(\alpha))} \triangleright \chi(\alpha)$$

$$= \chi\left(\chi^{-1}(v) - 2\,\frac{(\chi^{-1}(v)|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right)$$

$\mathbb{R}$-liniowość i izometryczność $\chi$

$$\equiv \chi\left(w_\alpha\left(\chi^{-1}(v)\right)\right). \qquad \square$$

To kończy dowód, bo skoro $\chi(\alpha) \in \Delta$, (215 1/2)

co wynika z $\chi\big(\partial\mathcal{E}(E,R;\Delta_{(\alpha)})\big) = \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta)$,

to zarówno $\chi$ (z zał.), jak i $w_{\chi(\alpha)}$ należą

do $W_\Delta$, wtedy jednak — wobec poprzedniego —

$$w_\alpha = \chi^{-1}\circ w_{\chi(\alpha)}\circ\chi \in W_\Delta^{-1}\cdot W_\Delta\cdot W_\Delta \subset W_\Delta,$$

ale $\alpha \in R$ dowolne i $w_\alpha, \alpha \in R$ generują

$W(E,R)$. $\square$

Pójdziemy teraz w kier. dowodu swobody działania $W(E,R)$ na zbiorze komnat...

W następnej kolejności dowodzimy – pominięgo – str. 37. 216

$\forall C$ – otwarta komora Weyla

$$\forall v, w \in \overline{C} \ \forall \chi \in W(E,R) : \left( w = \chi(v) \implies w = v \right).$$

D: Zaczniemy od

Lemat: Niechaj $\Delta$ będzie bazą $R$ i niech $\chi \in W(E,R) \setminus \{ id_E \}$. Ustalmy ROZKŁAD MINIMALNY $\chi = W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_M}$, $\alpha_i \in \Delta$, tj. taki, w którym $M$ jest najmniejsze z możliwych. Wówczas $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $\chi(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżą po przeciwległych stronach $\Pi_{\alpha_1}$.

(indukcyjny wzgl. M)

Dł: Słowo $X \neq id_E$, to $M \geq 1$. Jeśli $M=1$, (217)

to $X = W_{\alpha_1}$, a wtedy $X(\mathfrak{E}(E;R;\Delta)) \equiv W_{\alpha_1}(\mathfrak{E}(E;R;\Delta))$

jest odbiciem $\mathfrak{E}(E;R;\Delta)$ w hiperpłaszczyźnie $\Pi_{\alpha_1}$,

zgodnie z tezą.

Załóżmy, że teza jest słuszna dla $X$

o rozkładach minimalnych o długości $< M$.

Niech $X = W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_M}$ i rozważmy $\underline{X} := W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_2} \circ \ldots \circ W_{\alpha_{M-1}}$.

Rozkład $\underline{X}$ jest minimalny, gdyby bowiem

nie był, rozkład $X$ nie byłby minimalny,

wbrew założeniu. Na mocy założenia indukcyjnego
$\underline{\chi}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ i $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ leżą po przeciwnych 218
stronach $\Pi_{\alpha_1}$. Gdyby zatem $\chi(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$
leżał po tej samej stronie $\Pi_{\alpha_1}$ co $\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$,
to również $\underline{\chi}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ i $\chi(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ leżałyby
po przeciwnych stronach $\Pi_{\alpha_1}$, $\underline{\chi}(w_{\alpha_1}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta)))$
czyli tej – wobec odwracalności $\underline{\chi}$ –
$\mathfrak{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_1}(\mathfrak{E}(E,R;\Delta))$ leżałyby po przeciwnych
stronach $\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$.

Okazuje się jednak, że istnieje dokładnie jedna hiperpłaszczyzna $\Pi_\beta$, $\beta \in R$ o tej własności, że $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ są po przeciwnych stronach $\Pi_\beta$ — jest to $\Pi_{\alpha_M}$. Istotnie, $\mathcal{E}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta))$ ~~są~~ leżą po przeciwnych stronach $\Pi_{\alpha_M}$, a gdyby był $\Pi_{\alpha_M} \cap \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta) \cap \partial w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E,R;\Delta)) \neq \emptyset$

rozsunięte … $\quad w_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M}) = \Pi_{\alpha_M}$

mielibyśmy więc $\sigma \in \partial\mathcal{E}(E,R;\Delta) \cap \Pi_{\alpha_M} \setminus \bigcup_{\beta \in R\setminus\{\pm\alpha_M\}} \Pi_\beta$, a wtedy odcinek $\{\sigma + t\cdot\alpha_M \mid t \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$ dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ zawiera pary wektorów

Istotnie, $\Pi_{\alpha_M} \cap \partial \mathcal{E}(E, R; \Delta) \neq \phi$, bo $\alpha_M \in \Delta$

$$\Downarrow$$

$$w_{\alpha_M}(\Pi_{\alpha_M}) \cap w_{\alpha_M}(\partial \mathcal{E}(E, R; \Delta))$$

$$\shortparallel$$

$$\Pi_{\alpha_M} \cap \partial w_{\alpha_M}(\mathcal{E}(E, R; \Delta))$$

z $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ i $w_{\alpha_M}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ i nie przecina żadnej $\Pi_\beta$, $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha_M\}$, czyli wszystkie pary wektorów

$(v + t\Delta\alpha_M, v - t\Delta\alpha_M)$ są po tej samej stronie (220)

wszystkich $\Pi_\beta$, $\beta \in R \setminus \{\pm\alpha_M\}$.

Wracając do wcześniejszego rozumowania konstatujemy, że gdyby $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$

i $w_{\alpha_M}(\mathfrak{C}(E,R;\Delta))$ leżały po przeciwnych stronach

$\underline{\chi}^{-1}(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)}$, to byłoby $\Pi_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} \equiv \Pi_{\alpha_M}$, czyli tej – w świetle Lematu ze str. 215 –

$$w_{\alpha_M} \equiv w_{\underline{\chi}^{-1}(\alpha_1)} = \underline{\chi}^{-1} \circ w_{\alpha_1} \circ \underline{\chi}\,,$$ a to dałoby (221)

$$\chi \equiv \underline{\chi} \circ w_{\alpha_M} = w_{\alpha_1} \circ \underline{\chi} = (w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_1}) \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_{M-1}}$$

$$= w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \ldots \circ w_{\alpha_{M-1}}\,,$$ czyli reprezentację

$\chi$ krótszą (o 2) od minimalnej. ↯ ☒

Możemy więc przystąpić do dowodu twierdzenia.

Przeprowadźmy go metodą indukcji wzgl. długości $L$ rozkładu minimalnego $\chi$ na odbicia $w_\alpha, \alpha \in \Delta_c$ (2.2)

Jeśli $L = 0$, to $\chi = id_E$ i teza jest spełniona trywialnie. Załóżmy, że jest ona spełniona wtedy, gdy $L < M$. Niech teraz $\chi = w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_M}$ będzie rozkładem minimalnym. W świetle Lematu $\mathcal{E}(E, R; \Delta_c) \equiv C$ i $\chi(\mathcal{E}(E,R;\Delta_c))$ leżą po przeciwnych stronach $\Pi_{\alpha_1}$ i

$$\overline{\chi(\mathcal{E}(E,R;\Delta_c))} \cap \overline{\mathcal{E}(E,R;\Delta_c)} \subset \Pi_{\alpha_1},$$

co oznacza, że $\chi(v) \equiv w \in \Pi_{\alpha_1}$, skąd dalej

$$w_{\alpha_1} \circ \chi(v) = w_{\alpha_1}(w) = w$$

$$\stackrel{L}{=} \underbrace{w_{\alpha_2} \circ w_{\alpha_3} \circ \dots \circ w_{\alpha_M}}_{\underline{\chi}}(v) \quad \text{, czyli}$$

$$\underline{\chi}(v) = w \quad \text{dla} \quad v, w \in \mathcal{E}(E, R; \Delta_c) \equiv C \,,$$

ale rozkład $\underline{\chi}$ ma długość $M-1$, więc możemy zastosować założenie indukcyjne, aby stwierdzić, że w takim razie $v = w$.

$\square$

Dotychczasowe ustalenia dostarczyły narzędzi do teorii weryfikacji korzystających dalej. (224)

<u>Stw. 38.</u> Działanie $W(E,R)$ na zbiorze otwartych komnat Weyla jest <u>swobodne</u>. Ponadto

$\forall C$ – otwarta komnata Weyla $\forall v \in C \ \forall \chi \in W(E,R)$:

$$\chi(v) = v \implies \chi = \mathrm{id}_E.$$

punkt stały w zbiorze komnat

<u>D</u>: Niech $C$ będzie otwartą komnatą Weyla i niech $\chi \in W(E,R)$ takie, że $\chi(C) = C$, a wtedy $\forall v \in C$: $\chi(v) \in C$, więc na mocy

str. 37 zachodzi $\forall v \in C : \mathcal{X}(v) = v$, stąd też $\mathcal{X}\restriction_C = \mathrm{id}_C$, ale to oznacza, że $\mathcal{X} \equiv \mathrm{id}_E$, (225)

bo w świetle str. 34 $C$ zawiera bazę $\Delta_C$ przestrzeni $E$.

Ponadto, gdy dla pewnego $v \in C$ jest

$\mathcal{X}(v) = v$, to w świetle Obserwacji 2) ze str. 202 ($\mathcal{X}$ : komnaty $\to$ komnaty)

jest $\mathcal{X}(C) = C$, a to na mocy wyżej udowodnionej tezy implikuje $\mathcal{X} = \mathrm{id}_E$. $\square$

Mamy też

str. 39. $\forall \Delta_1, \Delta_2$ - bazy $R$ $\exists! X \in W(E,R)$: (226)

$$\Delta_2 = X(\Delta_1).$$

D: Baza $\Delta_A$, $A\in\{1,2\}$ wyznacza obszar komory Weyla — $\mathfrak{C}(E,R;\Delta_A)$. Wobec swobodnego i przechodniego działania grupy Weyla $W(E,R)$ na zbiorze obszarów komór Weyla (str. 38 i 36, odpowiednio) $\exists! X\in W(E,R)$:

$\mathfrak{C}(E,R;\Delta_2) = X(\mathfrak{C}(E,R;\Delta_1))$. Ale $X$ przeprowadza

$\chi(\partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta_1)) = \partial\mathfrak{C}(E,R;\Delta_2)$, więc

$\langle\alpha_1\rangle^{\perp}_{\mathbb{R}} = \Pi_{\alpha_1}, \alpha_1\in\Delta_1$ $\qquad$ $\Pi_{\alpha_2}, \alpha_2\in\Delta_2$

także $\chi(\Delta_1) = \Delta_2$. $\square$

$\chi(\Pi_{\alpha_1}) = \Pi_{\alpha_2} = \langle\alpha_2\rangle^{\perp}_{\mathbb{R}}$

$= \chi(\langle\alpha_1\rangle^{\perp}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\chi\in O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)} \chi(\langle\alpha_1\rangle_{\mathbb{R}}) = \langle\alpha_2\rangle_{\mathbb{R}}$

Doprecyzowujemy

str. 40. Niechaj $C$ – otwarta komora Weyla i niech $v\in E$. $\exists!\, \alpha\in \overline{C}\cap W(E,R)(v)$.

orbita

D: Niech $v\in E$, więc także $v\in\overline{C_v}$, gdzie $C_v$ jest pewną otwartą komorą Weyla. Na mocy str. 36 $\exists\, \chi\in W(E,R): C = \chi(C_v)$, a wtedy także $\chi(\overline{C_v}) = \overline{C}$, zatem $\chi(v)\in\overline{C}$, czyli $W(E,R)(v) \cap \overline{C} \neq \emptyset$.

(228)

Przy tym jeśli także $w \in W(E,R)(v) \cap \overline{C}$,

to $X(v)$ i $w$ są w tej samej orbicie $v$,

czyli $\exists\, \tilde{X} \in W(E,R)$ : $w = \tilde{X}(X(v))$,

a to oznacza — w świetle str. 37 —

$w \equiv X(v)$, bo $X(v), w \in \overline{C}$. $\square$

Na zakończenie tej części wszystkich rozważań dowodzimy ...

Str. 41. Niechaj $\Delta$ będzie bazą $R$ i niech $\alpha \in \Delta$. $\forall \beta \in R_+^\Delta : \left( \beta \neq \alpha \Rightarrow w_\alpha(\beta) \in R_+^\Delta \right)$, 229

czyli $w_\alpha$ jest permutacją pierwiastków dodatnich różnych od $\alpha$.

D: Niech $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} \overset{\circ}{n}{}^{\gamma} \triangleright \gamma$, przy czym $\beta \neq \alpha$ implikuje $\exists\, \gamma_* \in \Delta \setminus \{\alpha\} : n^{\gamma_*} > 0$.

Na mocy aksjomatu (SP3) $w_\alpha(\beta) = \beta - N \triangleright \alpha$ dla pewnej liczby $N \in \mathbb{Z}$, a wobec tego

$$w_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} \tilde{n}^\gamma \Delta\gamma \quad , \text{ gdzie } \tilde{n}^\gamma = \begin{cases} n^\alpha - N & \text{dla } \gamma = \alpha \\ n^\gamma & \text{w p.p.} \end{cases}$$

230

W szczególności $\tilde{n}^{\gamma*} = n^{\gamma*}$.

Ale $R = R_+^\Delta \cup R_-^\Delta$, skoro więc

$\tilde{n}^{\gamma*} > 0$, to także pozostałe $\tilde{n}^{\gamma\neq\gamma*} \geq 0$,

zatem $w_\alpha(\beta) \in R_+^\Delta$. $\square$

---

Dotychczasowe rozważania przygotowały nas do podjęcia wyzwania klasyfikacji systemów pierwiastkowych...

**Def. 26.** Niechaj $(E,R)$ będzie systemem pierwiastkowym o bazie $\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$. (231)

**DIAGRAM DYNKINA** s.p. $(E,R)$ to graf o $r$ wierzchołkach $\{v_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ połączonych krawędziami $e_{ij} = \overrightarrow{(v_i, v_j)}$, $i,j \in \overline{1,r}$ wedle przepisu: (patrz: str. 176)

(patrz: str. 29. i 31.)

- $\measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{\pi}{2} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ} \quad \underset{v_j}{\circ}$ $\quad n_1 : n_2$ linii
- $\measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{2\pi}{3} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{v_j}{\circ}$ : $\|v_i\| = \|v_j\|$
- $\measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{3\pi}{4} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ}\!\Longrightarrow\!\underset{v_j}{\circ}$ : $\|v_i\| = \sqrt{2}\,\|v_j\|$
- $\measuredangle(\alpha_i,\alpha_j) = \frac{5\pi}{6} \implies e_{ij} = \underset{v_i}{\circ}\!\Rrightarrow\!\underset{v_j}{\circ}$ : $\|v_i\| = \sqrt{3}\,\|v_j\|$

$n_1 \cdot \|\alpha_i\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$

$n_2 \cdot \|\alpha_j\|_E^2 = 2\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$

Dwa diagramy Dynkina nazywamy **RÓWNOWAŻNYMI** jeśli istnieje bijekcja między zbiorami ich wierzchołków zachowująca łączące je krawędzie (walencję i „zwrot"). (232)

$(\forall \Delta_1, \Delta_2 - \text{bazy } (E,R)\ \exists!\, \chi \in W(E,R) : \Delta_2 = \chi(\Delta_1))$

---

**OBSERWACJA**: W świetle str. 39. i w konsekwencji zachowywania przez $W(E,R)$ kątów i długości dowolne dwie bazy $(E,R)$ dają równoważne diagramy Dynkina, w tym zatem sensie diagram Dynkina jest stowarzyszony z systemem pierwiastkowym, nie zaś – z konkretną bazą.

Nowy klucz (?) 233

Tw. 12. System pierwiastkowy jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego diagram Dynkina jest spójny.

Ponadto diagramy Dynkina dwóch systemów pierwiastkowych są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy te systemy są izomorficzne.

D: Jeżeli $\boxed{\Rightarrow}$ system pierwiastkowy $(E,R)$ rozkłada się na podsystemy: 234

$$(E,R) = (E_1,R_1) \oplus (E_2,R_2),$$

wybieramy bazę $(E,R)$ w postaci $\Delta_1 \uplus \Delta_2$, gdzie $\Delta_A$ jest bazą $(E_A,R_A)$, $A \in \{1,2\}$. Wtedy pęduk krawędzie między wierzchołkami należącymi do dwóch różnych podbaz: $\Delta_1$ i $\Delta_2$ są puste, zatem diagram jest niespójny.

$\boxed{\Leftarrow}$ I odwrotnie, jeśli diagram Dynkina $(E,R)$ jest niespójny, baza $\Delta$ rozpada się na podzbiory

wzajem ortogonalne, $\Delta_1 \uplus \Delta_2 = \Delta$.
W takim jednak razie $E = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{R}}$
$\simeq \underbrace{\langle \Delta_1 \rangle_{\mathbb{R}}}_{= E_1} \oplus \underbrace{\langle \Delta_2 \rangle_{\mathbb{R}}}_{= E_2}$. Oznaczymy $R_A := R \cap E_A$.

Łatwo widać, że $(E_A, R_A)$, $A \in \{1,2\}$ są systemami pierwiastkowymi. Jedyna własność wymagająca sprawdzenia to (SP3), a ściślej: Musimy pokazać, że $\forall \alpha,\beta \in R_A : \underbrace{\beta - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha}_{= w_\alpha(\beta)} \in R_A$. Oczywiście $w_\alpha(\beta) \in R$, pozostaje zatem upewnić się, że

$w_\alpha(\beta) \perp R_{A'}$, gdzie $A'$ jest indeksem dopełniającym.

Ale $\forall \gamma \in R_{A'}$ : $\big(w_\alpha(\beta) \,|\, \gamma\big) = \underbrace{(\beta|\gamma)}_{=0,\ \text{bo } \beta\perp\gamma} - 2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \cdot \underbrace{(\alpha|\gamma)}_{=0,\ \text{bo } \alpha\perp\gamma}$

$\equiv 0$. ✓

Jest przy tym oczywiste, że $\Delta_A$ jest bazą $(E_A, R_A)$.

Pozostaje pokazać, że $\forall \alpha \in R$ : $\alpha \in R_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in R_2$.

W świetle str. 36 : $W(E,R) = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta_1 \ominus \Delta_2 \rangle$,

a ponieważ $\forall \alpha \in \Delta_A$ : $w_\alpha \restriction_{E_{A'}} = \mathrm{id}_{E_{A'}}$, przeto

$W(E,R) = W(E_1,R_1) \times W(E_2,R_2)$, przy czym $W(E_A,R_A) = \langle w_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta_A \rangle$ działa trywialnie na $E_{A'}$.

Skoro jednak $\forall \alpha \in R$ jest – na mocy str. 35 – elementem pewnej bazy, a $W(E,R)$ działa 237

– w świetle str. 34 i 35 – przechodnio na zbiorze baz $R$, to jest pewne, że $\exists\, X = (X_1, X_2) \in W(E,R)$:

$\alpha \in X(\Delta_1 \uplus \Delta_2) \equiv X_1(\Delta_1) \uplus X_2(\Delta_2)$ (wszak $X$ jest izometrią),

czyli $\alpha \in X_A(\Delta_A) < R_A$ dla $A=1 \vee A=2$. ☒

Przechodząc do drugiej części tezy Twierdzenia, konstatujemy trywialność wynikania $\boxed{\Leftarrow}$, po czym w przypadku $\boxed{\Rightarrow}$ ograniczamy się

Do sytuacji, w której oba diagramy Dynkina są spójne, więc tej – w świetle wcześniejszych ustaleń – oba systemy pierwiastkowe są nierozkładalne.

238

Rozważmy zatem systemy $(E_A, R_A)$ o odnośnych bazach $\mathcal{A}_A = \{\alpha_i^A\}_{i \in \overline{1,r}}$ uporządkowanych tak, że izomorfizm diagramów Dynkina przyporządkowuje $v_i^1 \longleftrightarrow v_i^2$, $i \in \overline{1,r}$.

Na $(E_2, R_2)$ skalujemy iloczyn skalarny wedle schematu: $\langle\cdot|\cdot\rangle_2 \longmapsto \dfrac{\langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2}\cdot\langle\cdot|\cdot\rangle_2 \equiv \langle\cdot|\cdot\rangle_2^{\sim}$,



uzyskując tym sposobem równość

(*) $\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2^{\sim} = \langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1$. Jako że krawędzie $e^1_{1j\neq 1}$ są identyczne z odnośnymi krawędziami $e^2_{1j\neq 1}$, przeto

$$(1)\quad \frac{\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^2}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2\cdot\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2} = \frac{\langle\alpha_1^1|\alpha_j^1\rangle_1^2}{\langle\alpha_1^1|\alpha_1^1\rangle_1\cdot\langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1}$$

$$\| $$

$$\frac{\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim 2}}{\langle\alpha_1^2|\alpha_1^2\rangle_2^{\sim}\cdot\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim}} : \text{równość kątów } \measuredangle(\alpha_1^2,\alpha_j^2) = \measuredangle(\alpha_1^1,\alpha_j^1)$$

(*) $\langle\alpha_1^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim 2} = \dfrac{\langle\alpha_j^2|\alpha_j^2\rangle_2^{\sim}}{\langle\alpha_j^1|\alpha_j^1\rangle_1}\cdot\langle\alpha_1^1|\alpha_j^1\rangle_1^2$

(2) $$\frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2} = \frac{\langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1}{\langle \alpha_1^1 | \alpha_1^1 \rangle_1} \overset{(*)}{\Longleftarrow} \underline{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1} \quad (240)$$

$$\equiv \frac{\langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim}}{\langle \alpha_1^2 | \alpha_1^2 \rangle_2^{\sim}}$$ : równość stosunków odpowiedni <u>dla wierzchołków</u> <u>połączonych</u> ($\times$)

z koniunkcji powyższych warunków otrzymujemy:

$$\begin{cases} \langle \alpha_1^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_1^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \\ \langle \alpha_j^2 | \alpha_j^2 \rangle_2^{\sim} = \langle \alpha_j^1 | \alpha_j^1 \rangle_1 \quad (\text{dla } j \neq 1) \end{cases}$$

Porządkując to rozumowanie w odpowiedni

do każdego z wierzchołków $\neq 1$ ustaliliśmy – wobec spójności obu diagramów – tożsamość wszystkich (odnośnych) kątów i długości w bazach obu systemów, stwierdzając tym samym, że jedyne $\mathbb{R}$-liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\alpha_i^1 \longmapsto \alpha_i^2$$

jest izometrią: $(E_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_1) \underset{L}{\cong} (E_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_2^{\sim})$, a zatem — w szczególności —



$$\forall\, i \in \overline{1,r} : \quad \iota \circ W_{\alpha_i^1} = W_{\alpha_i^2} \circ \iota$$

Istotnie, $\forall\, \beta \in E_1$ : $\quad \iota \circ W_{\alpha_i^1}(\beta) = \iota\left(\beta - 2\,\frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle_1}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle_1} \triangleright \alpha_i^1\right)$

$$= \iota(\beta) - 2\,\frac{\langle \beta | \alpha_i^1 \rangle_1}{\langle \alpha_i^1 | \alpha_i^1 \rangle_1} \triangleright \iota(\alpha_i^1) = \iota(\beta) - 2\,\frac{\langle \iota^{-1}\circ\iota(\beta) | \iota^{-1}(\alpha_i^2) \rangle_1}{\langle \iota^{-1}(\alpha_i^2) | \iota^{-1}(\alpha_i^2) \rangle_1} \triangleright \alpha_i^2$$

przenormowania w liczniku i mianowniku znoszą się

$$\doteq \iota(\beta) - 2\,\frac{\widetilde{\langle \iota(\beta) | \alpha_i^2 \rangle}_2}{\widetilde{\langle \alpha_i^2 | \alpha_i^2 \rangle}_2} \triangleright \alpha_i^2 \equiv W_{\alpha_i^2} \circ \iota(\beta) .$$

W tabeli str. 34 i 35 dozwolony pierwiastek $\alpha \in R_1$

możemy zapisać w postaci

$$\alpha = W_{\alpha^1_{i_1}} \circ W_{\alpha^1_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^1_{i_N}} (\alpha^1_j) \tag{243}$$

dla pewnych $j, i_1, i_2, \ldots, i_N \in \overline{1,r}$. W takim razie jednak

$$\ell(\alpha) = W_{\alpha^2_{i_1}} \circ W_{\alpha^2_{i_2}} \circ \ldots \circ W_{\alpha^2_{i_N}} (\alpha^2_j) \in R_2$$

(bowiem $W(E_2, R_2)$ zachowuje $R_2$). Analogicznie pokazujemy, że $\ell^{-1}(R_2) \subset R_1$, skąd ostatecznie wniosek

$$\ell|_{R_1} : R_1 \simeq R_2,$$

który kończy dowód. $\square$

Z połączenia Thr. 10 i 12. wyprowadzamy

istotne dla nas 

<u>Corollarium</u> Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprosta a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{t}$ będzie jej podalgebrą Cartana odpowiadającą wyborowi $\mathfrak{t}$ maksymalnej podalgebry przemiennej w $\mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy diagram Dynkina $(\mathfrak{t}\otimes i, Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}))$ jest spójny.