

Wykład xvi

2021/22



W podsumowaniu całej dotychczasowej
działalności naszej grupy robimy

(245)

Th. 13. [Klasyfikacja dla systemów pierwiastków]

Jedyną spójną dziedziną Dynkina to

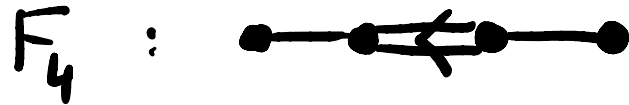
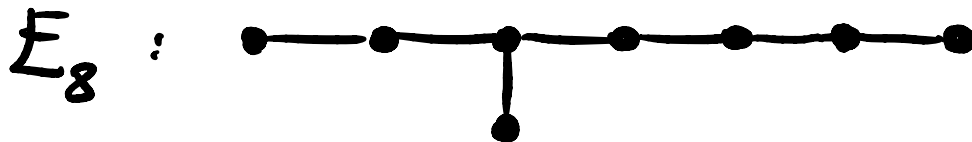
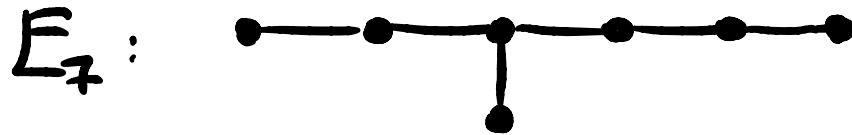
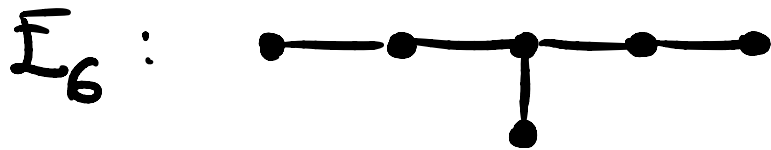
$$A_n : \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1 \quad n \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad su(n+1), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$B_n : \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1 \quad n \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad so(2n+1), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$C_n : \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1 \quad n \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad sp(n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$$

$$D_n : \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1 \quad n \quad n+1 \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad so(2n), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$$

ows



ALGEBRY
WYJĄTKOWE

246

NB. : Wygodnie
te diagramy
opisać systemem
licznościowym
(pt) jest d algebra
Liego!

D: Okazuje się, że zamiast klasyfikacji
Hagena Dynkin, w której występuje (247)
wielkość o rożnej dimensji, co znajduje
odzwierciedlenie w delonacji kwadratu
(podobnym)
o wartości > 1 , występują żółte na dobrych

Coxetera C, które dostajemy w wyniku
przekształcenia: $\alpha_i \mapsto \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$, co skutkuje
zbieżnością delonacji z kwadratu.

Abyśmy dobrze zrozumieć stopnie zjed namni
zadanie, zrelatyluujemy dotychczasowe
ustalenia: Mamy do zryniecia ze zbiorom wektorow
liniowo niezaleznych $\{a_i\}_{i \in I, r}$ czyli ciugugug niezchodli

preju. Mozliwe uszy iniedzy wektorami
idz wzajemne wzajemne to (Def. 26
ony th. 176-178)
KAT LCZBY CARDANA KRANOWCI

- 1° $\chi(a_i, a_j) = \frac{1}{2}$: $A_{ij} = 0 = A_{ji}$ $n_{ij} = A_{ij} A_{ji}$ 
- 2° $\chi(a_i, a_j) = \frac{1}{3}$: $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ 
- 3° $\chi(a_i, a_j) = \frac{1}{4}$: $A_{ij} = -1, A_{ji} = -2$ 
- 4° $\chi(a_i, a_j) = \frac{1}{6}$: $A_{ij} = -1, A_{ji} = -3$ 

Woliamy teraz zmienny:

(249)

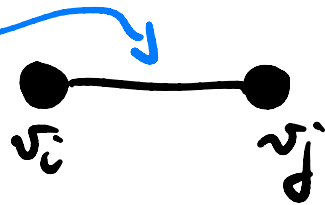
$$d_i \mapsto \frac{d_i}{\|d_i\|} \equiv \hat{d}_i, i \in \overline{1, r}$$

liczymy w poprzednim przypadku: $\hat{A}_{ij} \equiv 2 \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle$
(high to same!)

$$1^\circ \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle = 0 \quad \hat{A}_{ij} = 0 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 0$$

$$2^\circ \langle \hat{d}_i | \hat{d}_j \rangle = \frac{\langle d_i | d_j \rangle}{\|d_i\| \cdot \|d_j\|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \langle d_i | d_j \rangle}{\langle d_i | d_i \rangle} = \frac{1}{2} A_{ij} = -\frac{1}{2}$$

$$\hat{A}_{ij} = -1 = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 1$$

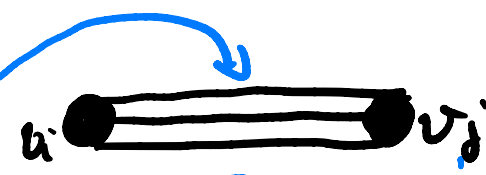


$$3^\circ \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \stackrel{\|\alpha_i\| = \sqrt{2} \|\alpha_j\|}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (250)$$

$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{2} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 2$$


BRAN DEKORACIJI!

$$4^\circ \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|} \stackrel{\|\alpha_i\| = \sqrt{3} \|\alpha_j\|}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{A}_{ij} = -\sqrt{3} = \hat{A}_{ji} \Rightarrow \hat{A}_{ij} \cdot \hat{A}_{ji} = 3$$


BRAN DEKORACIJI

W dużych ogólnościach będziemy używać
określenia DIAGRAM DOPUSZCZALNY w odniesieniu
do tych diagramów Costera, które spełniają
wzelleń między geometryczne implikacje
z liniowej niezależności i dopuszczalnych kątów
między wektorami $\{\vec{\alpha}_i\}$ i $\vec{r}$. Diagramy, które
nie są dopuszczalne, nazywamy NIEDOPUSZCZALNYMI
i odpowiadamy. Nasze starania sprowadzą się do zaleźności
wszystkich diagramów dopuszczalnych i sprawdzania, że

kojdy z nich po przyniesieniu do niego (252)
odpowiednie pierwsze systemy pierwiastkowe.

W istocie powiemy, że kojdy z nich odpowiadają
systemy pierwiastkowe grupy (10) postaci
algorytmu Liego.

Nasze rozumowanie zorganizujemy
w formie szeregu lematów, które zawrą
spektrum dopuszczalnych stopni Coxetera.

Lemma 0. Každý poddílagram diagramu
domuzovalnero je domuzovalny.

(253)

DL 0 : Ouzymite.



Lemat 1.: Jeśli $\mathcal{C}$ jest dopuszczający,
to $\mathcal{C}$ jest dygresyjny (tj. nie zawiera pętli). 254

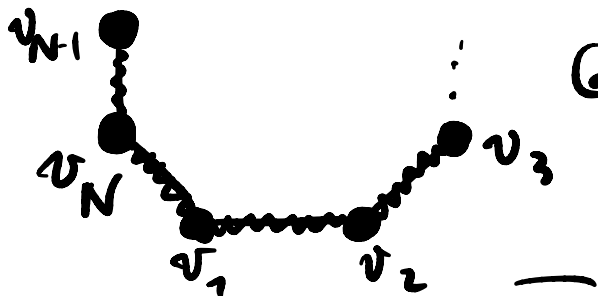
Dł 1: ^{A.a.} Niedługo nierówność $\langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_{i+1} \rangle \leq -1$ prowadzi do sprzeczności.

$$(1) \forall i \in \overline{1, N-1} : 2 \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_{i+1} \rangle \leq -1$$

$$(2) 2 \langle \hat{\alpha}_N | \hat{\alpha}_1 \rangle \leq -1$$

(3) dla parzystych (i, j) :

$$\langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle = 0$$



$\sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i = 0$ co niesumuje się

gdzie $\hat{\alpha}_i \in \{-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$

liczymy: $\| \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i \|^2 = \sum_{i=1}^N \| \hat{\alpha}_i \|^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^{N-1} \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_{i+1} \rangle + \langle \hat{\alpha}_N | \hat{\alpha}_1 \rangle + \sum_{\substack{i,j \in \overline{1,N} \\ i \neq j}} \langle \hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_j \rangle \right]$

$\leq N + (-1) + (-1) = N - 1$, gdzie $\sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i = 0$ (wzrost $\hat{\alpha}_i$ są LN3). $\square$

Lemma 2. : Jeśli C jest dopuszczalny, to C nie zawiera
wierzchołków o walencji > 3 . (255)

Dł2 : Rozważmy dowolny wierzchołek v_0 połączony
z wierzchołkami $v_i, i \in \overline{1, N}$ (i tylko tymi), przy czym
zakładamy, że każda linia łączy v_0 i v_i to L_i .

W dalsze Lemma 1. wierzchołki v_i i $v_j, i \neq j \in \overline{1, N}$



nie są połączone, czyli $\forall i \neq j \in \overline{1, N} : \langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle = 0$.

Na tej podstawie bierzemy, wykorzystując $\hat{a}_0 \notin \langle \hat{a}_i, i \in \overline{1, N} \rangle_{\mathbb{R}}$

$$1 = \|\hat{a}_0\|^2 > \sum_{i=1}^N \langle \hat{a}_0 | \hat{a}_i \rangle^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N L_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N L_i < 4$$

$$L_i = \hat{A}_{0i} \hat{A}_{i0} = 4 \langle \hat{a}_0 | \hat{a}_i \rangle^2$$

Liczba linii :

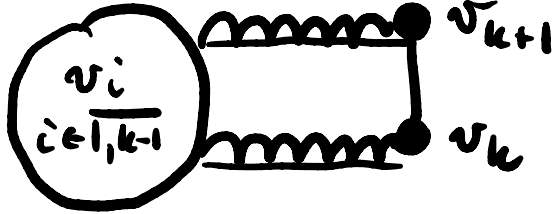


Lemma 3. Niech $\mathcal{C}$ będzie dopuszczalny i niech $v_k, v_{k+1} \in \mathcal{C}$ będą kolejno pierwszymi literami $e_{k,k+1}$.
 Wówczas diagram $\mathcal{C}_{k \times k+1}$ otrzymany z $\mathcal{C}$ poprzez usunięcie $e_{k,k+1}$ i ztożsamienie $v_k \equiv v_{k+1}$ jest dopuszczalny.

(256)

DL 3: Rozwijamy diagram $\mathcal{C}$:

(zawsze możemy
 tak numerować
 węzły)



Definiujemy:

$$\underline{\hat{a}}_k := \hat{a}_k + \hat{a}_{k+1}$$

$$\underline{\hat{a}}_i := \hat{a}_i, i \in \overline{1, k-1}$$

mm niedokładny typ,

kli $k > 1$, to dodaj
 jedno z nich miejsce!

Дійсно: $\|\hat{\underline{a}}_k\|^2 = \|\hat{a}_k\|^2 + \|\hat{a}_{k+1}\|^2 + 2\langle \hat{a}_k | \hat{a}_{k+1} \rangle \equiv \hat{A}_{k,k+1} = -1$
 $= 1 + 1 - 1 = 1 \quad \checkmark, \quad (257)$

а якщо

$\forall i \in \overline{1, k-1}: \langle \hat{\underline{a}}_i | \hat{\underline{a}}_k \rangle \equiv \langle \hat{a}_i | \hat{a}_k \rangle + \langle \hat{a}_i | \hat{a}_{k+1} \rangle$



$\rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} \text{якщо} \\ \text{інтегруємо} \end{array} \right\} = 0$

$\uparrow \quad \checkmark$
 $\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{k}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

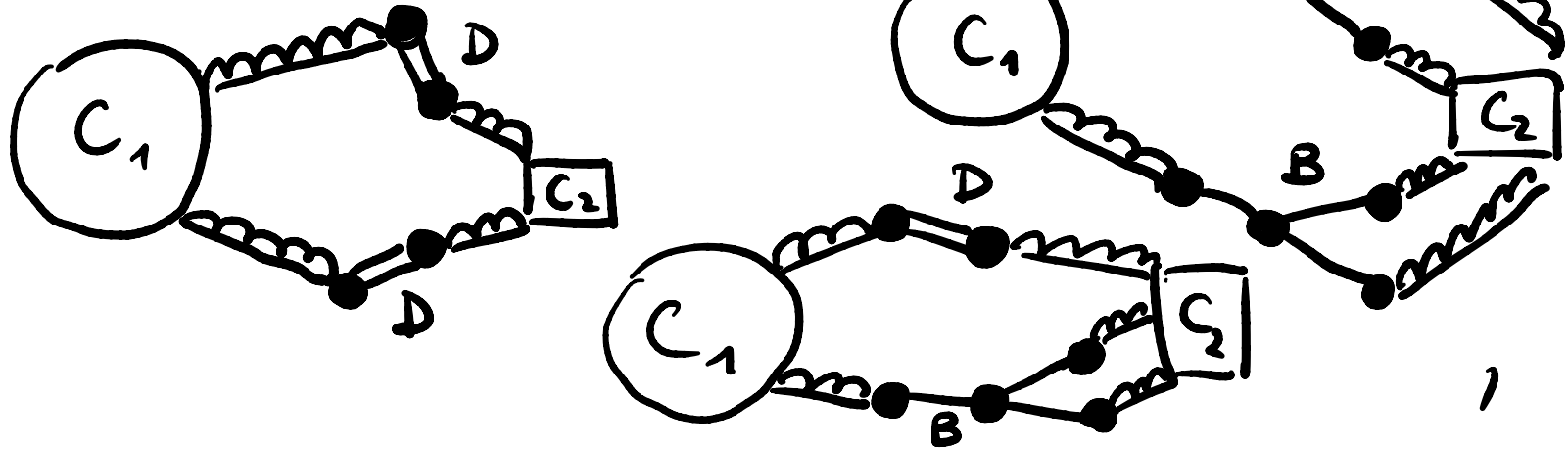
$\forall i, j \in \overline{1, k-1}: \langle \hat{\underline{a}}_i | \hat{\underline{a}}_j \rangle \equiv \langle \hat{a}_i | \hat{a}_j \rangle \quad \checkmark$

Висновок: $\{\hat{\underline{a}}_j\}_{j \in \overline{1, k}}$ — це деякий нормований систем ортонормованих. $\square$

Lemma 4. Jeśli C jest dopuszczalny, to C nie zawiera dwóch lub więcej podciągów postaci (258)



DL4. ^{A.e.} Rozważmy C z co najmniej dwoma podciągami i/w :

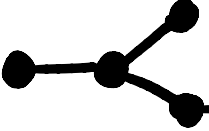
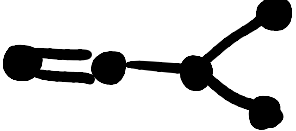


przy tym założeniu, że na ścieżce w kierunku
 z pomiędzy podzięrami nie ma (259)
 innych podzięrami tego typu (tj. wybieramy
 dwa podzięramy sąsiadujące), a wtedy
 Trasy jest pewien ciąg krawędzi postaci

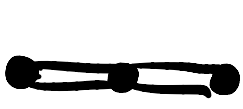
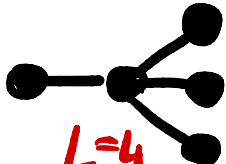
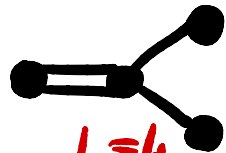


(krawędź prosta - wklęsła przez lewą 2,
 krawędź prosta - wklęsła przez prawo,
 krawędź prosta sąsiadująca - j/w).

Dokazując, że relacje międzychodów
 $\{v_i \hookrightarrow v_j \mid i, j \in \overline{N}\}$ otrzymujemy diagram dopuszczalny, 260

ale w nim: $\boxed{X|Y} \in \{$  ,  ,  ,
 $\}$,

co po większym relacjom daje

$\{$  ,  ,  $\}$

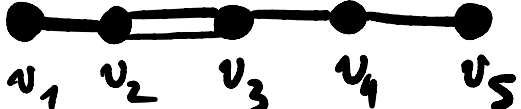
$L=4$

$L=4$

$L=4$



Lemma 5. Dwiegrum  jest
niedoprowadzalny, w szczególności żaden
 dwugum doprowadzalny nie zawiera go jako
 poddwugumu.

DŁS.: Oznaczmy , a wtedy
 $\langle \hat{\alpha}_2 | \hat{\alpha}_3 \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\langle \hat{\alpha}_1 | \hat{\alpha}_2 \rangle = \langle \hat{\alpha}_3 | \hat{\alpha}_4 \rangle = \langle \hat{\alpha}_4 | \hat{\alpha}_5 \rangle = -\frac{1}{2}$,
 natomiast pozostałe iloczyny skalarne = 0.
 Zdefiniujemy $\alpha := \hat{\alpha}_1 + 2\hat{\alpha}_2$ i $\beta := 3\hat{\alpha}_3 + 2\hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5$.

Zechodzi

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle 2\hat{a}_2 | 3\hat{a}_3 \rangle = 6 \langle \hat{a}_2 | \hat{a}_3 \rangle = -3\sqrt{2}, \quad (262)$$

a wtedy

$$\|\alpha\|^2 = \|\hat{a}_1\|^2 + \|2\hat{a}_2\|^2 + 2\langle \hat{a}_1 | 2\hat{a}_2 \rangle = 1 + 4 - 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \|\beta\|^2 &= \|3\hat{a}_3\|^2 + \|2\hat{a}_4\|^2 + \|\hat{a}_5\|^2 + 2(\langle 3\hat{a}_3 | 2\hat{a}_4 \rangle + \langle 2\hat{a}_4 | \hat{a}_5 \rangle) \\ &= 9 + 4 + 1 + 2(-3 - 1) = 6. \end{aligned}$$

Dostajemy zatem $|\langle \alpha | \beta \rangle| \equiv \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$,

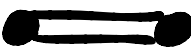
co - jak wiemy z lemmy algebry liniowej - oznacza,
że $\beta \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$.  (wszystkie wektory $\{\hat{a}_i\}_{i \in \overline{1,5}}$ są ortogonalne)


Wniosek 1.: Jeśli $\mathcal{C}$ jest dopuszczalny i zawiera
krawędź wielokrotną, to jest typu B_n, C_n, F_4 lub G_2 . (263)

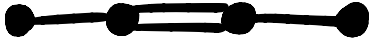
Uzasadnienie: W świetle Lemata 3 podany
diagram z linią podwójną jest

$$\text{---} \equiv G_2.$$

W przypadku linii podwójnej Lemat 4
zabrania wystąpienia dwóch lub więcej
krawędzi tego typu, a Lemat 5
dopuszcza jedynie kontynuację diagramu

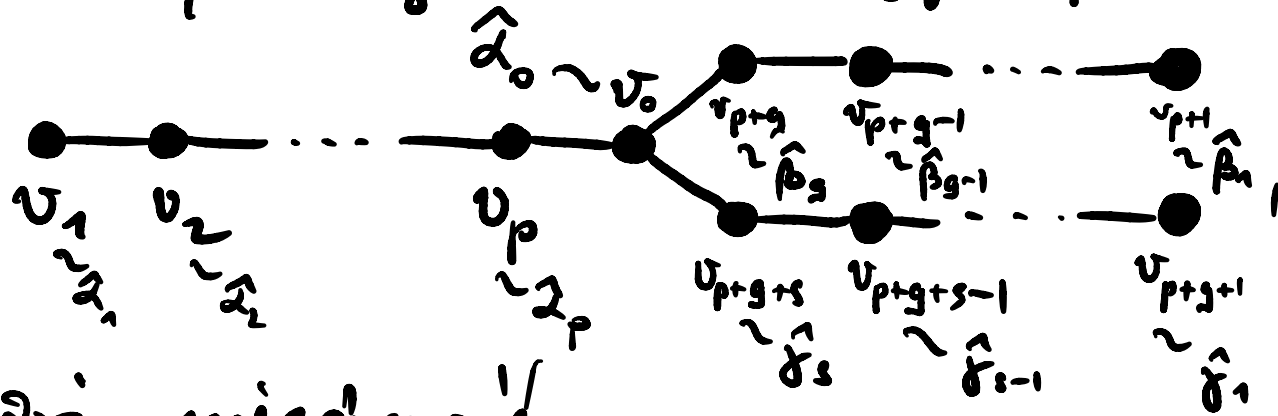
po jednej ze stron krawędzi , czyli

 B_n/C_n (mierzalność bez dekompozycji)

lub  $\equiv F_4$. □ (264)

Na obecnym etapie pozostałe sformułowania dotyczące drzew o krawędziach pojedynczych.

Lemat 6. Jeśli $\mathcal{C}$ jest doprzyszalonym
 diagramem o krawędziach połączonych (265)
 zamierzonym poddiagram $\textcircled{B}$, czyli jest
 postaci



to zachodzi nierówność

$$\frac{p}{1+p} + \frac{q}{1+q} + \frac{s}{1+s} < 2.$$

DL6: Definiierung

$$X := \sum_{k=1}^p k \hat{a}_k, \quad Y := \sum_{k=1}^q k \hat{b}_k, \quad Z := \sum_{n=1}^s n \hat{f}_n. \quad (266)$$

Obliegen

$$\begin{aligned} \langle X | X \rangle &= \sum_{k=1}^p \langle k \hat{a}_k | k \hat{a}_k \rangle + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \langle k \hat{a}_k | (k+1) \hat{a}_{k+1} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^p k^2 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} k(k+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^p k^2 - \sum_{k=1}^{p-1} (k^2 + k) \\ &= p^2 - \frac{(p-1) \cdot p}{2} = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2} \end{aligned}$$

analogicznie $\langle Y|Y \rangle = \frac{g(g+1)}{2}$, $\langle Z|Z \rangle = \frac{s(s+1)}{2}$.

Na tej podstawie wyznaczamy

$$\begin{aligned} \langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|X\|} X \rangle^2 &= \left(\sqrt{\frac{2}{p(p+1)}} \cdot \sum_{k=1}^p \langle \hat{\alpha}_0 | k \alpha_k \rangle \right)^2 \\ &= \frac{2}{p(p+1)} \cdot p^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{p}{2(p+1)} \end{aligned}$$

oraz - analogicznie -

$$\langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|Y\|} Y \rangle^2 = \frac{g}{2(g+1)}, \quad \langle \hat{\alpha}_0 | \frac{1}{\|Z\|} Z \rangle^2 = \frac{s}{2(s+1)}$$

(267)

Ponieważ $X \perp Y, X \perp Z, Y \perp Z$,

o nadto $\hat{\alpha}_0 \notin \langle X, Y, Z \rangle_{\mathbb{R}}$, mamy

(268)

$$1 = \|\hat{\alpha}_0\|^2 > \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|X\|} X \right. \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|Y\|} Y \right. \right\rangle^2 + \left\langle \hat{\alpha}_0 \left| \frac{1}{\|Z\|} Z \right. \right\rangle^2,$$

co jest ściśle górnym ograniczeniem.



Na tym etapie pozostałe już tylko rozpatrzyć wszystkie ewentualności przewidziane przez tę nierówność.

Wniosek 2.: Jeśli C jest dopuszczalną
i zawiera poddogram (B) , to jest typu (269)
 D_n, E_6, E_7 lub E_8 .

Uzasadnienie: Wobec pełnej symetrii pomysł
wybrać p, q i s ustalony: $p \geq q \geq s$.

Jeśli $s \geq 2$, to $\frac{s}{s+1} \geq \frac{2}{3}$, zatem należy

$$\frac{p}{p+1} \geq \frac{2}{3} \text{ i } \frac{q}{q+1} \geq \frac{2}{3}, \text{ a wtedy } \frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{s}{s+1} \geq \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{p}{p+1} \geq \frac{q}{q+1} \geq \frac{s}{s+1} \left(\geq \frac{2}{3} \right)$$



Wobec powyższego $s = 1$ ^(s=0 nie daje B!) a $\frac{1}{\log 2}$

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q}{q+1} < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad (270)$$

Jeśli $q \geq 3$, to $\frac{q}{q+1} \geq \frac{3}{4}$, a wtedy

$$\frac{p}{p+1} < \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow p < 3, \text{ ale } p \geq q \geq 3 \quad \text{⚡}$$

Pozostają zatem przypadki:

$$q=1 \Rightarrow p \geq 1 \quad (D_n)$$

$$q=2 \Rightarrow 2 \leq p < 5 \quad (D_5, E_6, E_7, E_8). \quad \square$$

(q=0 nie daje B!)

Dotychczasowe rozważanie wykazuje, że wszelkie
drzewany inne niż te, o których mowa (271)
w teście Thiersteina. Konstruktynego dowodu
na to, że każdy z nich jest drzewem
jennego systemu pierwiastkowego, którego
studium (w) postaci algebr tego (lub'go
zformalizowany się na drzewach). $\square$

(CECI N'EST PAS)

L A FIN ...
