TEORIA GRUP II 2021/22
WYKŁADY 2., 3. I 4.
LIE TO ME, CARTAN!

Spis treści

1. Grupy Liego i rachunek różniczkowy Cartana

Ostatni wykład dostarczył rzetelnej motywacji do studiowania grup, których elementy zależą w sposób ciągły lub zgoła gładki od (zbioru) parametrów. Naturalnego uogólnienia i formalizacji naszych rozważań dostarcza teoria grup Liego, tj. zbiorów wyposażonych w uzgodnione wzajem struktury: algebraiczną strukturę grupy (wprowadzoną na pierwszorocznym wykładzie z Algebry) i geometryczną strukturę rozmaitości różniczkowalnej (wprowadzoną na drugorocznym wykładzie z Geometrii różniczkowej). Uzgodnienie takie ma daleko idące konsekwencje dla stycznościowego rachunku różniczkowego na tych rozmaitościach, którego liczne *strukturalne* zastosowania w mechanice klasycznej (np. teoria odwzorowań momentowych w opisie symetrii i redukcji symplektycznych) i teorii pola (np. cechowanie symetrii sztywnych, zw. też globalnymi, ale także nieliniowe realizacje symetrii istotne w opisie zjawisk takich jak mechanizm Higgsa czy odwrotny mechanizm Higgsa) czynią studium jego podstawowych własności nieodzownym elementem niniejszego kursu. Z owego studium wyprowadzimy naturalnie pojęcie (stycznościowej) algebry Liego (grupy Liego), którego desygnat zostanie następnie poddany abstrakcji i klasyfikacji, co będzie stanowiło punkt wyjścia do dyskusji teorii reprezentacji o fundamentalnym znaczeniu fizycznym (w kontekście, m.in., klasycznej teorii oddziaływań fundamentalnych i kwantowomechanicznej klasyfikacji pól materii i nośników oddziaływań).

Zaczniemy od pojęć podstawowych

Definicja 1. **Grupa topologiczna** to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1, m_1, \mathrm{Inv}_1, \bullet_1 \longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2, m_2, \mathrm{Inv}_2, \bullet_2 \longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako grupę, której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Przykłady 1.
(1) $\mathbb{R}^{\times n}$
(2) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$
(3) $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$
(4) grupa Poincarégo z App. B

(5) Grupa liniowa główna $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym)

(6) wiele innych, które zostaną przedstawione na ćwiczeniach.

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj G będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ i dowolnego otoczenia otwartego $\mathcal{O}_e \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ elementu neutralnego $e \in \mathrm{G}$ istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_g \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ elementu g spełniające warunek

$$m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie $f \equiv m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ jest ciągłe (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ elementu g o własności $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$. Otwarte otoczenie $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$ spełnia pożądany warunek $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$. □

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ będzie grupą Liego. Czwórka

$$\big(\mathsf{T}\mathrm{G}, \mathsf{T}m, \mathsf{T}\mathrm{Inv}, (\bullet, 0) \longmapsto 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}} \in \mathsf{T}_e\mathrm{G}\big)$$

jest grupą Liego noszącą miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny $\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} : \mathsf{T}\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ oraz cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}$ są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację

$$\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \circ \mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}\,. \tag{1}$$

<u>*Dowód:*</u> Chwila zastanowienia uświadamia nam, że przyporządkowanie rozmaitości gładkiej jej wiązki stycznej ma charakter funktorialny (zrozumienie użytego tu niezwykle ekonomicznego skrótu pojęciowego umożliwia krótkie wprowadzenie do języka teorii kategorii, które załączam w oddzielnym pliku). Funktorialność T zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli struktury gładkiej i odwzorowań) grupy Liego G, ale także jej aksjomatyki – funktorialnym obrazem diagramów przemiennych wyrażających aksjomaty G są analogiczne diagramy dla $\mathsf{T}\mathrm{G}$. Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zacznijmy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych $(g,h) \in \mathrm{G}^{\times 2}$ jest

$$\mathsf{T}_{(g,h)}m \;:\; \mathsf{T}_{(g,h)}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \cong \mathsf{T}_g\mathrm{G} \oplus \mathsf{T}_h\mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{T}_{m(g,h)}\mathrm{G}\,,$$

zatem

$$\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \circ \mathsf{T}m = m \circ (\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \times \pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}})\,,$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości m także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę $\mathsf{T}_{(g,h)}m$. Dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ zdefiniujmy odwzorowania gładkie

$$\ell_g \;:\; \mathrm{G} \circlearrowleft \;:\; h \longmapsto m(g,h)\,, \qquad\qquad \wp_g \;:\; \mathrm{G} \circlearrowleft \;:\; h \longmapsto m(h,g)\,.$$

Wybierzmy lokalne mapy: $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n) \;:\; \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $n = \dim \mathrm{G}$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_g$ punktu g, $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \ldots, y^n) \;:\; \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_h$ punktu h oraz $\kappa_{g\cdot h} \equiv (z^1, z^2, \ldots, z^n) \;:\; \mathcal{O}_{g\cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g\cdot h} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_{g\cdot h}$ punktu $g \cdot h$, a wtedy – dla dowolnych $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \mathsf{T}_g\mathrm{G}$ i $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \mathsf{T}_h\mathrm{G}$ – dostajemy

$$\mathsf{T}_{(g,h)}m(V,W) \;\;=\;\; V^i\, \tfrac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}\big(\kappa_g(g), \kappa_h(h)\big)\, \tfrac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h)$$

$$+W^a\,\frac{\partial(z^\mu\circ m\circ(\kappa_g^{-1}\times\kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}\big(\kappa_g(g),\kappa_h(h)\big)\,\frac{\partial}{\partial z^\mu}(g\cdot h)\,.$$

W wyrażeniach $\frac{\partial(z^\mu\circ m\circ(\kappa_g^{-1}\times\kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g),\kappa_h(h))$ i $\frac{\partial(z^\mu\circ m\circ(\kappa_g^{-1}\times\kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g),\kappa_h(h))$ rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych $\mathsf{T}_g\wp_h$ i $\mathsf{T}_h\ell_g$, odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

$$\mathsf{T}_{(g,h)}m=\mathsf{T}_g\wp_h\circ\mathrm{pr}_1+\mathsf{T}_h\ell_g\circ\mathrm{pr}_2\,. \tag{2}$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned}\mathsf{T}m\circ(\mathbf{0}_{\mathsf{TG}}\times\mathbf{0}_{\mathsf{TG}})(g,h) &= \mathsf{T}_{(g,h)}m(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}},0_{\mathsf{T}_h\mathrm{G}})=\mathsf{T}_g\wp_h(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}})+\mathsf{T}_h\ell_g(0_{\mathsf{T}_h\mathrm{G}})\\ &= 0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}}+0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}}=0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}}\equiv\mathbf{0}_{\mathsf{TG}}\circ m(g,h)\,,\end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter $\mathbf{0}_{\mathsf{TG}}$, przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1) jest oczywista. □

Uwaga 1. Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu $\mathsf{T}\mathrm{Inv}$. W tym celu rozważymy tożsamości

$$m\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{Inv})\circ\Delta=\eta=m\circ(\mathrm{Inv}\times\mathrm{id}_{\mathrm{G}})\circ\Delta\,,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta\ :\ \mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\times\mathrm{G}\ :\ g\longmapsto(g,g)\,,\qquad\qquad \eta\ :\ \mathrm{G}\circlearrowleft\ :\ g\longmapsto e\,,$$

a których funktorialnym obrazem względem T jest

$$\mathsf{T}m\circ(\mathrm{id}_{\mathsf{TG}}\times\mathsf{T}\mathrm{Inv})\circ\mathsf{T}\Delta=0=\mathsf{T}m\circ(\mathsf{T}\mathrm{Inv}\times\mathrm{id}_{\mathsf{TG}})\circ\mathsf{T}\Delta\,.$$

Uwzględniając Równ. (2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych $g\in\mathrm{G}$ i $V\in\mathsf{T}_g\mathrm{G}$)

$$\mathsf{T}_g\wp_{g^{-1}}(V)+\mathsf{T}_{g^{-1}}\ell_g\circ\mathsf{T}_g\mathrm{Inv}(V)=0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}=\mathsf{T}_{g^{-1}}\wp_g\circ\mathsf{T}_g\mathrm{Inv}(V)+\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}(V)\,,$$

czyli

$$\mathsf{T}_g\mathrm{Inv}=-\mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_g\wp_{g^{-1}}=-\mathsf{T}_e\wp_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\,.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności ℓ_g i $\wp_h$ dla dowolnych $g,h\in\mathrm{G}$.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i zdefiniujmy **działanie dołączone**

$$\mathrm{Ad}_{\cdot}\ :\ \mathrm{G}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ (g,h)\longmapsto m\big(m(g,h),\mathrm{Inv}(g)\big)\equiv\mathrm{Ad}_g(h)\,.$$

Odwzorowanie

$$\mathsf{T}_e\ell_{\cdot}\ :\ \mathrm{G}\,{}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\cdot}}\!\ltimes\mathsf{T}_e\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{TG}\ :\ (g,X)\longmapsto\mathsf{T}_e\ell_g(X)$$

jest izomorfizmem grup Liego.

<u>*Dowód:*</u> Na podstawie Równ. (2) możemy przepisać

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{(g,e)}m\circ(\mathbf{0}_{\mathsf{TG}}\times\mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})(g,X) &= \mathsf{T}_{(g,e)}m(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}},X)=\mathsf{T}_g\wp_e(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}})+\mathsf{T}_e\ell_g(X)\\ &= \mathsf{T}_e\ell_g(X)\equiv\mathsf{T}_e\ell_{\cdot}(g,X)\,,\end{aligned} \tag{4}$$

czyli

$$\mathsf{T}_e\ell_{\cdot}=\mathsf{T}_{(g,e)}m\circ(\mathbf{0}_{\mathsf{TG}}\times\mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})\,,$$

co dowodzi gładkości $\mathsf{T}_e\ell_{\cdot}$. W połączeniu z obserwacją

$$\big(\mathsf{T}_e\ell_{\cdot}\big)^{-1}=\big(\pi_{\mathsf{TG}},\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{TG}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{TG}}(\cdot)}(\cdot)\big)\,,$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym $v\in\mathsf{TG}$):

$$\big(\pi_{\mathsf{TG}},\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{TG}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{TG}}(\cdot)}(\cdot)\big)\circ\mathsf{T}_e\ell_{\cdot}(g,X)$$

$$\begin{aligned}
&= \big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big) \circ \mathsf{T}_e\ell_g(X) = \big(g, \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_e\ell_g(X)\big) \\
&= \big(g, \mathsf{T}_e(\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g)(X)\big) = \big(g, \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}\cdot g}(X)\big) = \big(g, \mathsf{T}_e\ell_e(X)\big) = (g, X)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathsf{T}_e\ell_\cdot \circ \big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big)(v) \\
&= \mathsf{T}_e\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)} \circ \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)^{-1}}(v) = \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}\big(\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)} \circ \ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)^{-1}}\big)(v) \\
&= \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}(\ell_e)(v) = v\,,
\end{aligned}$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność $\big(\mathsf{T}_e\ell_\cdot\big)^{-1}$ od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych $X, Y \in \mathsf{T}_e\mathrm{G}$ oraz $g, h \in \mathrm{G}$, a w odwołaniu do Równ. (2) –

$$\begin{aligned}
& \mathsf{T}_e\ell_\cdot\big((g, X)\,{}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_\cdot}\!\cdot\,(h, Y)\big) = \mathsf{T}_e\ell_\cdot\big(g \cdot h, \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y\big) \\
&= \mathsf{T}_e\ell_{g\cdot h}\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y\big) = \mathsf{T}_e(\ell_{g\cdot h\cdot h^{-1}} \circ \wp_h)(X) + \mathsf{T}_h\ell_g \circ \mathsf{T}_e\ell_h(Y) \\
&= \mathsf{T}_e(\wp_h \circ \ell_g)(X) + \mathsf{T}_h\ell_g \circ \mathsf{T}_e\ell_h(Y) = \mathsf{T}_g\wp_h\big(\mathsf{T}_e\ell_g(X)\big) + \mathsf{T}_h\ell_g\big(\mathsf{T}_e\ell_h(Y)\big) \\
&\equiv \mathsf{T}_{(g,h)}m\big(\mathsf{T}_e\ell_g(X), \mathsf{T}_e\ell_h(Y)\big) \equiv \mathsf{T}_{(g,h)}m\big(\mathsf{T}_e\ell_\cdot(g, X), \mathsf{T}_e\ell_\cdot(h, Y)\big)\,.
\end{aligned}$$

Warto odnotować na marginesie, że $\mathsf{T}_e\ell_\cdot$ jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu $\ell_\cdot\restriction_{\mathrm{G}\times\{e\}} \,:\, \mathrm{G} \times \{e\} \longrightarrow \mathrm{G}$. □

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Pole wektorowe lewoniezmiennicze** na grupie Liego G to pole wektorowe $\mathcal{V}_L \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ o własności

$$\forall_{g\in\mathrm{G}} \;:\; \ell_{g\,*}\mathcal{V} = \mathcal{V}\,.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniezmiennicze** na G to pole wektorowe $\mathcal{V}_R \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ o własności

$$\forall_{g\in\mathrm{G}} \;:\; \wp_{g\,*}\mathcal{V} = \mathcal{V}\,.$$

Uwaga 2. Jako że powyższe wzory prowadzą czasami do nieporozumień, wypiszemy drugi z nich w jawnej postaci. Oto więc dla dowolnych $g, h \in \mathrm{G}$ zachodzi w ogólności

$$\big(\ell_{g\,*}\mathcal{V}\big)(h) \equiv \mathsf{T}_{\ell_g^{-1}(h)}\ell_g\big(\mathcal{V}\big(\ell_g^{-1}(h)\big)\big) = \mathsf{T}_{g^{-1}\cdot h}\ell_g\big(\mathcal{V}\big(g^{-1}\cdot h\big)\big)\,,$$

przeto warunek lewoniezmienniczości przyjmuje postać

$$\mathsf{T}_{g^{-1}\cdot h}\ell_g\big(\mathcal{V}\big(g^{-1}\cdot h\big)\big) = \mathcal{V}(h)\,.$$

Innymi słowy, przesuwając stycznościowo wzgl. lewej translacji ℓ_g na grupie wartość pola wektorowego w dowolnym punkcie otrzymujemy wektor w punkcie poddanym translacji tożsamy z wartością tegoż pola w tym punkcie.

Stwierdzenie 3. Zbiory

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) &:= \{\, \mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \;\mid\; \mathcal{V} \quad \text{lewoniezmiennicze}\,\}\,, \\
\mathfrak{X}_R(\mathrm{G}) &:= \{\, \mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \;\mid\; \mathcal{V} \quad \text{prawoniezmiennicze}\,\}
\end{aligned}$$

są podprzestrzeniami $\mathbb{R}$-liniowymi w $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$, a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}\big(\mathfrak{X}_H(\mathrm{G}) \times \mathfrak{X}_H(\mathrm{G})\big) \subset \mathfrak{X}_H(\mathrm{G})\,, \quad H \in \{L, R\}\,.$$

Parę

$$\big(\mathfrak{X}_L(\mathrm{G}),[\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}\restriction_{\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})\times\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})}\big)$$

nazywamy **algebrą pól lewoniezmienniczych na** G, a parę

$$\big(\mathfrak{X}_R(\mathrm{G}),[\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}\restriction_{\mathfrak{X}_R(\mathrm{G})\times\mathfrak{X}_R(\mathrm{G})}\big)$$

algebrą pól prawoniezmienniczych na G.

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z $\mathbb{R}$-liniowości warunku lewoniezmienniczości (wzgl. prawoniezmienniczości), a druga – z prostego rachunku (przeprowadzonego dla dowolnego elementu $g\in\mathrm{G}$ i dowolnych pól lewoniezmienniczych $\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2\in\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$):

$$\ell_{g\,*}[\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}}=[\ell_{g\,*}\mathcal{V}_1,\ell_{g\,*}\mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}}=[\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}}\,.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawoniezmienniczości komutatora dowolnej pary pól prawoniezmienniczych. □

Uwaga 3. Przywołane powyżej zachowanie komutatora pól wektorowych stanowi szczególny przypadek ogólniejszego mechanizmu, któremu podlegają tzw. **pary pól wektorowych w F-relacji** wyróżnione przez dowolne gładkie odwzorowanie $F\ :\ M\longrightarrow M$ między rozmaitościami różniczkowalnymi M,N. Przypomnijmy: elementy takiej pary $(\mathcal{V},\mathcal{W})\in\Gamma(\mathsf{T}M)\times\Gamma(\mathsf{T}N)$ spełniają tożsamość definiującą

$$\forall_{x\in M}\ :\ \mathcal{W}\big(F(x)\big)=\mathsf{T}_xF\big(\mathcal{V}(x)\big)\,.$$

Dla każdych dwóch takich par $(\mathcal{V}_A,\mathcal{W}_A)$, $A\in\{1,2\}$ dowodzimy tożsamości

$$\forall_{x\in M}\ :\ [\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_2]_{\Gamma(\mathsf{T}N)}\big(F(x)\big)=\mathsf{T}_xF\big([\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2](x)\big)\,,\tag{5}$$

wyrażającej prawidłowość: Komutator pierwszych składowych pary pól w F-relacji jest w F-relacji z komutatorem drugich składowych pary. W rozpatrywanym powyżej przypadku para $(\mathcal{V},\mathcal{V})$ jest w ℓ_g-relacji dla dowolnego elementu grupy $g\in\mathrm{G}$.

Definicja 3. Algebra Liego nad ciałem $\mathbb{K}$ to kolekcja $\big(\big((V,+_V,P_V,\bullet\longmapsto\mathbf{0}_V),\ell_V\big),[\cdot,\cdot]_V\big)$ złożona z przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\big((V,+_V,P_V,\bullet\longmapsto\mathbf{0}_V),\ell_V\big)$ oraz odwzorowania dwu-$\mathbb{K}$-liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot,\cdot]_V\ :\ V\times V\longrightarrow V\ :\ (v,w)\longmapsto[v,w]_V=-[w,v]_V\,,$$

zwanego **nawiasem Liego na** V, którego **jakobiator**

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}_V\quad &:\quad V\times V\times V\longrightarrow V\\ &:\quad (X_1,X_2,X_3)\longmapsto[[X_1,X_2]_V,X_3]_V+[[X_3,X_1]_V,X_2]_V+[[X_2,X_3]_V,X_1]_V\end{aligned}$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

Podalgebrą Liego algebry Liego $\big(\big((V,+_V,P_V,\bullet\longmapsto\mathbf{0}_V),\ell_V\big),[\cdot,\cdot]_V\big)$ nazwiemy algebrę Liego $\big(\big((W,+_V\restriction_{W\times W},P_V\restriction_W,\bullet\longmapsto\mathbf{0}_V),\ell_V\restriction_{\mathbb{K}\times W}\big),[\cdot,\cdot]_V\restriction_{W\times W}\big)$ o nośniku $W\subseteq V$ będącym podprzestrzenią $\mathbb{K}$-liniową V.

Homomorfizm algebr Liego między algebrami Liego $\big(\big((V_\alpha,+_\alpha,P_\alpha,\bullet\longmapsto\mathbf{0}_\alpha),\ell_\alpha\big),[\cdot,\cdot]_\alpha\big)$, $\alpha\in\{1,2\}$ to odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)$ o własności

$$[\cdot,\cdot]_2\circ(\chi\times\chi)=\chi\circ[\cdot,\cdot]_1\,.$$

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 3. Odwzorowanie

$$\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\ :\ \mathfrak{X}_R(\mathrm{G})\xrightarrow{\cong}\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})\ :\ \mathcal{V}\longmapsto\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewoniezmienniczych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych[1]

$$H. \ : \ \mathfrak{g} \equiv \mathrm{Der}_e\, C^1(\mathrm{G}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_H(\mathrm{G}), \quad H \in \{L, R\},$$

o własności

$$L. \circ (R.)^{-1} \equiv \mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\,. \tag{6}$$

Indukują one na przestrzeni $\mathfrak{g} \cong \mathsf{T}_e\mathrm{G}$ nawias Liego

$$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \ : \ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \ : \ (X_1, X_2) \longmapsto [L_{X_1}, L_{X_2}]_{\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})}(e)\,.$$

Algebra Liego

$$\big(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\big) \equiv \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$$

(w której zapisie $\mathfrak{g}$ jest traktowana jako przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego** G.

<u>*Dowód:*</u> Dla dowolnego pola prawoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_R(\mathrm{G})$ sprawdzamy lewoniezmienniczość jego obrazu względem (jawnie $\mathbb{R}$-liniowego i odwracalnego) $\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.$ w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych $g, h \in \mathrm{G}$ z uwzględnieniem prawoniezmienniczości $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} & \ell_{g\,*}\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big)(h) = \mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)}\ell_g\Big(\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big(\ell_{g^{-1}}(h)\big)\Big) \\ = \ & \mathsf{T}_{g^{-1}h}\ell_g\Big(\mathsf{T}_{g^{-1}h}\mathrm{Ad}_{g^{-1}h}\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big)\Big) = \mathsf{T}_{g^{-1}h}\big(\ell_h \circ \wp_{h^{-1}g}\big)\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big) \\ = \ & \mathsf{T}_e\ell_h \circ \mathsf{T}_{g^{-1}h}\wp_{h^{-1}g}\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big) = \mathsf{T}_e\ell_h\big(\mathcal{V}(e)\big) \equiv \mathsf{T}_e\ell_h \circ \mathsf{T}_h\wp_{h^{-1}}\big(\mathcal{V}(h)\big) \\ \equiv \ & \big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big)(h)\,. \end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu $L.$ zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniezmiennicze $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$ spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g) = (\ell_{g\,*}\mathcal{V})(g) \equiv \mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(g)}\ell_g\Big(\mathcal{V}\big(\ell_{g^{-1}}(g)\big)\Big) = \mathsf{T}_e\ell_g\big(\mathcal{V}(e)\big) \equiv \mathcal{V}(e) \circ \ell_g^*\,,$$

gdzie $\ell_g^*,\ g \in \mathrm{G}$ jest cofnięciem (funkcji), $\mathcal{V}(e)$ zaś jest różniczkowaniem algebry funkcji na grupie w jej elemencie neutralnym. Jako że $\mathcal{V}(e) \in \mathfrak{g}$, powyższa obserwacja podpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie $\mathbb{R}$-liniowe,

$$L. \ : \ \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \ : \ X \longmapsto X \circ \ell_\cdot^* \equiv L_X\,,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniezmienniczość pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned} \ell_{g\,*}L_X \ &= \ \mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\ell_g\big(L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)\big) \equiv \big(L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)\big) \circ \ell_g^* \equiv X \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* \circ \ell_g^* \\ &= \ X \circ \big(\ell_g \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\big)^* = X \circ \ell_{g\cdot\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* = X \circ \ell_\cdot^* \equiv L_X\,, \quad g \in \mathrm{G}\,. \end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność $L.$ w postaci, także jawnie $\mathbb{R}$-liniowej,

$$\mathrm{ev}_e \ : \ \mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathfrak{g} \ : \ \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}(e)\,,$$

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \mathrm{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell_\cdot^* \equiv L_{\mathrm{ev}_e(\mathcal{V})}\,.$$

Z drugiej strony obliczamy

$$\mathrm{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X\,,$$

więc w istocie

$$\mathrm{ev}_e = (L.)^{-1}\,.$$

[1] $\mathrm{Der}_e\, C^1(\mathrm{G}, \mathbb{R}) = \{\ V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^1(\mathrm{G}, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \ \mid \ \forall_{f,g \in C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})} \ : \ V(f \cdot_{C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})} g) = V(f) \cdot g(e) + f(e) \cdot V(g)\ \}$ jest przestrzenią różniczkowań algebry funkcji klasy C^1 w e.

Zastąpiwszy w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne $\ell_\cdot$ jego prawym odpowiednikiem $\wp_\cdot$, możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawoniezmienniczych, co daje nam izomorfizm

$$R_\cdot\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{X}_R(\mathrm{G})\ :\ X\longmapsto X\circ\wp_\cdot^*\equiv R_X\,,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R_\cdot)^{-1}=\mathrm{ev}_e\,.$$

Tożsamość (6) jest w oczywisty sposób spełniona, oto bowiem dla dowolnego wektora $X\in\mathfrak{g}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_\cdot\mathrm{Ad}_\cdot\circ R_\cdot(X) &= \mathsf{T}_\cdot\mathrm{Ad}_\cdot\big(X\circ\wp_\cdot^*\big)=X\circ\wp_\cdot^*\circ\ell_\cdot^*\circ\wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)}^*=X\circ\wp_\cdot^*\circ\wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)}^*\circ\ell_\cdot^*=X\circ\wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)\cdot\cdot}^*\circ\ell_\cdot^*\\ &= X\circ\wp_e^*\circ\ell_\cdot^*=X\circ\ell_\cdot^*\equiv L_\cdot(X)\,.\end{aligned}$$

Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu-$\mathbb{R}$-liniowego odwzorowania $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość (w której, tak jak w tych po niej następujących, opuszczamy znacznik $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ na komutatorze pól wektorowych)

$$L_{[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}}\equiv L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_1},L_{X_2}])}=[L_{X_1},L_{X_2}]\,.$$

Oto więc wyznaczamy

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3) &\equiv [[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}},X_3]_{\mathfrak{g}}+[[X_3,X_1]_{\mathfrak{g}},X_2]_{\mathfrak{g}}+[[X_2,X_3]_{\mathfrak{g}},X_1]_{\mathfrak{g}}\\ &= [\mathrm{ev}_e\big([L_{X_1},L_{X_2}]\big),X_3]_{\mathfrak{g}}+[\mathrm{ev}_e\big([L_{X_3},L_{X_1}]\big),X_2]_{\mathfrak{g}}+[\mathrm{ev}_e\big([L_{X_2},L_{X_3}]\big),X_1]_{\mathfrak{g}}\\ &= [L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_1},L_{X_2}])},L_{X_3}](e)+[L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_3},L_{X_1}])},L_{X_2}](e)+[L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_2},L_{X_3}])},L_{X_1}](e)\\ &= [[L_{X_1},L_{X_2}],L_{X_3}](e)+[[L_{X_3},L_{X_1}],L_{X_2}](e)+[[L_{X_2},L_{X_3}],L_{X_1}](e)\\ &\equiv \mathrm{Jac}_{\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})}(L_{X_1},L_{X_2},L_{X_3})(e)=0_{\mathfrak{g}}\,,\end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu, przy czym założymy dodatkowo, że $N:=\dim\mathrm{G}<\infty$. Wybierzmy w przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ dowolną bazę $\mathcal{T}:=\{t_A\}_{A\in\overline{1,N}}$, a wówczas **stałe struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ w bazie $\mathcal{T}$ to liczby $f_{ABC}=-f_{BAC}\in\mathbb{R},\ A,B,C\in\overline{1,N}$ zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$

$$[t_A,t_B]=f_{ABC}\triangleright t_C\,,\qquad A,B\in\overline{1,N}\,.$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ spełniają one tożsamościowo dwuliniowe relacje

$$f_{ABD}\,f_{DCE}+f_{CAD}\,f_{DBE}+f_{BCD}\,f_{DAE}=0\,,\qquad A,B,C,E\in\overline{1,N}\,,$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$. Elementy bazy $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ będącej $L_\cdot$- wzgl. $R_\cdot$-obrazem bazy $\mathcal{T}$ będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot)\equiv\mathsf{T}_e\ell_\cdot(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot)\equiv\mathsf{T}_e\wp_\cdot(t_A)\,.$$

Twierdzenie 1 (Funktorialność Lie)**.** Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 4. Przyporządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora

$$\mathrm{Lie}\ :\ \mathbf{LieGrp}\longrightarrow\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}\,.$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie} \quad &: \quad \mathrm{Mor}\,\mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} \\ &: \quad \big(\ \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\chi} \mathrm{G}_2\ \big) \longmapsto \big(\ \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_1 \xrightarrow{\mathsf{T}_{e_1}\chi} \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_2\ \big)\,. \end{aligned}$$

<u>*Dowód:*</u> Odwzorowanie $\mathsf{T}_{e_1}\chi$ jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu $g_1 \in \mathrm{G}$:

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}\,.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji $f \in C^1(\mathrm{G}_2;\mathbb{R})$ oraz wektora $X \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{g_1}\chi\big(L_X(g_1)\big)(f) \quad &\equiv \quad L_X(g_1) \circ \chi^*(f) \equiv X \circ \ell^*_{g_1} \circ \chi^*(f) = X \circ (\chi \circ \ell_{g_1})^*(f) \\ &= \quad X \circ (\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi)^*(f) = (X \circ \chi^*) \circ \ell^*_{\chi(g_1)}(f) \\ &\equiv \quad \mathsf{T}_{e_1}\chi(X) \circ \ell^*_{\chi(g_1)}(f) \equiv L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)}\big(\chi(g_1)\big)(f)\,, \end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że

$$\mathsf{T}.\chi\big(L_X(\cdot)\big) = L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)}\big(\chi(\cdot)\big)\,,$$

czyli że $(L_X, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)})$ jest parą pól w χ-relacji w rozumieniu Uwagi 3, a zatem w świetle wypisanego w niej Równ. (5) dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned} [\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1), \mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)]_{\mathfrak{g}_2} \quad &\equiv \quad [L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{\mathrm{G}_2}(e_2) = [L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{\mathrm{G}_2}\big(\chi(e_1)\big) \\ &= \quad \mathsf{T}_{e_1}\chi\big([L_{X_1}, L_{X_2}]_{\mathrm{G}_1}(e_1)\big) \equiv \mathsf{T}_{e_1}\chi\big([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}\big)\,. \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 5. Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy gładką krzywą całkową $\gamma\ :\ ]a,b[\longrightarrow \mathrm{G}$ przez $\gamma(t_0) = g_0 \in \mathrm{G}$ w $t_0 \in]a,b[$ pola lewoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$, tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\mathsf{D}\gamma(t) = \mathcal{V}\big(\gamma(t)\big)\,, \quad t \in]a,b[\,, \qquad\qquad \gamma(t_0) = g_0\,.$$

Wybierzmy (dowolnie) czasy pośrednie t_1, t_2 spełniające warunki $a < t_1 < t_2 < b$ i oznaczmy $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$. Krzywą γ będziemy teraz dowolnie przedłużać wykorzystując przechodniość działania lewego regularnego na G, która pozwala nam wskazać $g_{21} := \gamma(t_2)\cdot\gamma(t_1)^{-1}$. Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t}\ :\ ]a+\Delta t, b+\Delta t[\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ t \longmapsto \ell_{g_{21}} \circ \gamma(t-\Delta t)\,.$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\mathsf{D}\gamma_{\Delta t}(t) = \mathsf{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathsf{D}\gamma(t-\Delta t)\,, \quad t \in]a+\Delta t, b+\Delta t[\,, \qquad\qquad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2)\,,$$

a ponieważ $t-\Delta t \in]a,b[$ dla dowolnego czasu $t \in]a+\Delta t, b+\Delta t[$, przeto – wobec lewoniezmienniczości pola $\mathcal{V}$ –

$$\mathsf{D}\gamma_{\Delta t}(t) = \mathsf{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathcal{V}\big(\gamma(t-\Delta t)\big) = \mathcal{V}\big(\ell_{g_{21}} \circ \gamma(t-\Delta t)\big) \equiv \mathcal{V}\big(\gamma_{\Delta t}(t)\big)\,.$$

Widzimy więc, że także $\gamma_{\mathsf{D}t}$ jest gładką krzywą całkową pola $\mathcal{V}$, stąd też – na mocy Twierdzenia o Jednoznaczności Rozwiązania Zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności – na niepustym przedziale $\Delta I :=]a+\Delta t, b[\ni t_2$ zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t}\restriction_{\Delta I} = \gamma\restriction_{\Delta I}$$

i otrzymujemy gładkie przedłużenie $\widetilde{\gamma}$ krzywej γ do $]a,b+\Delta t[$ w postaci

$$\widetilde{\gamma}\ :\ ]a,b+\Delta t[\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t\in]a,b[\\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t\in]a+\Delta t,b+\Delta t[\end{cases}.$$

Dokonując iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału $]a,\infty[$. Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do $]-\infty,b[$, ostatecznie więc stwierdzamy, że γ przedłuża się gładko do $\mathbb{R}$, co wobec dowolności g_0 (wszak pole $\mathcal{V}$ jest określone na całej rozmaitości G) daje nam postulowaną tezę dla pól lewoniezmienniczych. Dowód w przypadku pól prawoniezmienniczych przebiega w pełni analogicznie. □

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $X\in\mathfrak{g}$. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego G stowarzyszone z polami: lewoniezmienniczym L_X,

$$\mathcal{L}^X_{\cdot_1}(\cdot_2)\equiv\Phi_{L_X}(\cdot_1,\cdot_2)\ :\ \mathbb{R}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ (t,g)\longmapsto\Phi_{L_X}(t,g)\equiv\mathcal{L}^X_t(g)\,,$$

oraz prawoniezmienniczym R_X,

$$\mathcal{R}^X_{\cdot_1}(\cdot_2)\equiv\Phi_{R_X}(\cdot_1,\cdot_2)\ :\ \mathbb{R}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ (t,g)\longmapsto\Phi_{R_X}(t,g)\equiv\mathcal{R}^X_t(g)\,,$$

przyjmują postać, odpowiednio,

$$\mathcal{L}^X_t=\wp_{\mathcal{L}^X_t(e)}\,,\qquad\qquad \mathcal{R}^X_t=\ell_{\mathcal{R}^X_t(e)}\,. \tag{7}$$

<u>*Dowód:*</u> To, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawoniezmienniczych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów G, wynika wprost z wiedzy zgromadzonej w trakcie I semestru. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (7). Obliczamy, dla dowolnego $g\in\mathrm{G}$,

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathcal{L}^X_t(g)=L_X(g)=\mathsf{T}_e\ell_g\big(L_X(e)\big)\equiv\mathsf{T}_e\ell_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathcal{L}^X_t(e)\big)=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\ell_g\circ\mathcal{L}^X_t(e)\,,$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z Reguły Łańcuchowej dla pochodnej funkcji złożonej. Ścieżki $\mathcal{L}^X_\cdot(g)$ i $\ell_g\circ\mathcal{L}^X_\cdot(e)$, przecinające się w chwili $t=0$,

$$\ell_g\circ\mathcal{L}^X_0(e)=\ell_g(e)=g\cdot e=g\equiv\mathcal{L}^X_0(g)\,,$$

są zatem współstyczne w tejże chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewoniezmienniczego L_X w g. Obie też są krzywymi całkowymi pola L_X, oto bowiem dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$ zachodzi – wprost z definicji –

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathcal{L}^X_t(g)=L_X\circ\mathcal{L}^X_t(g)\,,$$

a także – wobec lewoniezmienniczości L_X –

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\ell_g\circ\mathcal{L}^X_t(e)=\mathsf{T}_{\mathcal{L}^X_t(e)}\ell_g\big(L_X\circ\mathcal{L}^X_t(e)\big)=L_X\circ\ell_g\circ\mathcal{L}^X_t(e)\,.$$

Na mocy Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (7). □

W dalszej części zajmiemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami $\mathcal{L}^X_\cdot(e)$ oraz $\mathcal{R}^X_\cdot(e)$.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 6. Gładkie ścieżki

$$\lambda_X\equiv\mathcal{L}^X_\cdot(e)\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{G}\,,\qquad\qquad \rho_X\equiv\mathcal{R}^X_\cdot(e)\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{G}$$

spełniają tożsamości

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \big(\ \lambda_{t\triangleright X}(1)=\lambda_X(t)\quad\wedge\quad\rho_{t\triangleright X}(1)=\rho_X(t)\ \big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> W świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego krzywa λ_X jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0)=e\qquad\wedge\qquad\forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(t)=L_X\circ\lambda_X(t)\equiv\mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(t)}(X)\,.$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(st)}(X) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}(st)}\lambda_X(st) = \tfrac{1}{s}\cdot\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(st)\,,$$

czyli też równoważną jej (wobec $\mathbb{R}$-liniowości $\mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(st)}$)

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(st) = \mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X)\,,$$

Zdefiniujmy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G} \; : \; t \longmapsto \lambda_X(st)\,, \quad s\in\mathbb{R}\,,$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\gamma_s(t) = \mathsf{T}_e\ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X)\,,$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) \equiv \lambda_{s\triangleright X}(0) = e\,,$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall_{s\in\mathbb{R}} \; : \; \gamma_s = \lambda_{s\triangleright X}\,,$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s\triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st)\,,$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s\triangleright X}(1) = \lambda_X(s)\,.$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawoniezmiennicze przebiega w pełni analogicznie.

□

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Gładkie ścieżki λ_X i ρ_X są homomorfizmami addytywnej grupy Liego $\mathbb{R}$ (z naturalną strukturą różniczkową) w G, spełniającymi warunek początkowy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_X(t) = X = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\rho_X(t)\,.$$

I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego

$$\chi \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}$$

spełniający warunek początkowy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t) = X \in \mathfrak{g} \tag{8}$$

jest postaci

$$\lambda_X = \chi = \rho_X\,.$$

W szczególności więc ścieżki λ_X i ρ_X są tożsame.

Dowód: Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$, jest warunek homomorfizmu

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \gamma(s+t) = \gamma(s)\cdot\gamma(t)\,.$$

Zaczniemy od $\gamma = \lambda_X$. Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek λ_X i $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+\cdot)$ przy ustalonym (dowolnie) s. W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki γ oraz z lewoniezmienniczości L_X –

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\gamma_s(t) &= \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)}\ell_{\lambda_X(s)^{-1}}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(t+s)\big) \equiv \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)}\ell_{\lambda_X(s)^{-1}}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}(s+t)}\lambda_X(s+t)\big) \\
&= \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)}\ell_{\lambda_X(s)^{-1}}\big(L_X\big(\lambda_X(s+t)\big)\big) = L_X\big(\ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+t)\big) \\
&\equiv L_X\big(\gamma_s(t)\big)\,,
\end{aligned}$$

skąd wniosek, że ścieżka γ_s jest krzywą całkową pola L_X tak jak λ_X, a nadto

$$\gamma_s(0) = e = \gamma(0)\,,$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku $\gamma = \rho_X$ powtarzamy rozumowanie dla $\widetilde{\gamma}_s := \wp_{\rho_X(s)^{-1}} \circ \rho_X(s + \cdot)$.

Niechaj teraz χ będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (8). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność χ,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\chi(s) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi}\upharpoonright_{\xi=s}\chi(\xi) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\upharpoonright_{t=0}\chi(s+t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\upharpoonright_{t=0}\ell_{\chi(s)}\circ\chi(t)\\
&= \mathsf{T}_{\chi(0)}\ell_{\chi(s)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)\big) = \mathsf{T}_e\ell_{\chi(s)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)\big)\\
&\equiv L_{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)}\big(\chi(s)\big)\,,
\end{aligned}$$

stwierdzamy, że χ jest krzywą całkową przez $e = \chi(0)$ (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności χ) lewoniezmienniczego pola wektorowego będącego obrazem wektora $\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)$ względem izomorfizmu $L.$ ze Stw. 4. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\chi(t) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi}\upharpoonright_{\xi=t}\chi(\xi) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\upharpoonright_{s=0}\chi(s+t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\upharpoonright_{s=0}\wp_{\chi(t)}\circ\chi(s)\\
&= \mathsf{T}_{\chi(0)}\wp_{\chi(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)\big) = \mathsf{T}_e\wp_{\chi(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)\big)\\
&\equiv R_{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)}\big(\chi(t)\big)\,,
\end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy. □

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Odwzorowanie

$$\lambda.\ :\ \mathfrak{g}\times\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (X,t)\longmapsto \lambda_X(t)$$

jest gładkie.

Dowód: Gładkość zależności $\lambda.$ od drugiego argumentu wynika wprost z Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, oto bowiem dla ustalonego X ścieżka λ_X jest krzywą całkową gładkiego pola L_X. Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności $\lambda.$ od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy λ_X jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na $\mathfrak{g}\times\mathrm{G}$ o danych początkowych (X,e), co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Twierdzenia. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać $\mathrm{Der}_e\,C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})$ z $\mathsf{T}_e\mathrm{G}$. Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\ &:\ \mathfrak{g}\times\mathrm{G}\longrightarrow \mathsf{T}(\mathfrak{g}\times\mathrm{G})\\
&:\ (X,g)\longmapsto \big(0_{\mathfrak{g}},\mathsf{T}_e\ell_g(X)\big)\equiv\big(0_{\mathfrak{g}},L_X(g)\big)\in\mathfrak{g}\oplus\mathsf{T}_e\ell_g(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\oplus\mathsf{T}_g\mathrm{G}\\
&\qquad\qquad\equiv \mathsf{T}_{(X,g)}(\mathfrak{g}\times\mathrm{G})\,.
\end{aligned}$$

Jego potok $\Phi_{\mathcal{V}}$ spełnia równanie

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;t_0,(X_0,g_0)\big) = \mathcal{V}\big(\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;t_0,(X_0,g_0)\big)\big)\,,$$

w którego zapisie (X_0,g_0) jest warunkiem początkowym (w czasie t_0),

$$\Phi_{\mathcal{V}}\big(t_0;t_0,(X_0,g_0)\big) = (X_0,g_0)\,.$$

Ustalmy warunek początkowy $(X_0, g_0) := (X, e)$ dla $t_0 := 0$. Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na G), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big) &= \mathrm{pr}_2 \circ \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big) = \mathrm{pr}_2 \circ \mathcal{V}\big(\Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big)\big) \\ &= L_{\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t;0,(X,e))}\big(\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big)\big) \\ &= L_X\big(\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}\big(t; 0, (X, e)\big)\big)\,,\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji $\mathcal{V}$ (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola $\mathcal{V}$). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e))$ jako (jedyną) krzywą całkową pola L_X wychodzącą z punktu $g_0 = e$, czyli

$$\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e)) = \lambda_X(\cdot)\,,$$

co stanowi właśnie zapowiedzianą wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola L_X. □

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw. 9. Odwzorowanie

$$\exp \equiv \exp^{\mathrm{G}} := \lambda_{\cdot}(1) \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{G}$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na** G.

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 5. Istnieją otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{g}$ oraz $\mathcal{O}_e$ elementu e w G takie, że odwzorowanie $\exp\restriction_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$ jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ na $\mathcal{O}_e$.

<u>*Dowód:*</u> Obliczymy odwzorowanie styczne do exp w $0_{\mathfrak{g}}$ na dowolym wektorze $X \in \mathfrak{g} \equiv \mathsf{T}_{0_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}$, odwołując się po drodze do Stw. 7. Znajdujemy

$$\mathsf{T}_{0_{\mathfrak{g}}}\exp(X) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright X) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_{t \triangleright X}(1) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_X(t) = X\,,$$

czyli

$$\mathsf{T}_{0_{\mathfrak{g}}}\exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\,.$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika teraz wprost z Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. □

Stwierdzenie 11 (Naturalność odwzorowania eksponencjalnego)**.** Przyjmijmy zapis Def. 5 oraz Tw. 1 i niechaj $\chi : \mathrm{G}_1 \longrightarrow \mathrm{G}_2$ będzie homomorfizmem grup Liego między grupami Liego G_α, $\alpha \in \{1, 2\}$. Poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_1 \arrow[r, "\mathrm{Lie}\,\chi"] \arrow[d, "\exp^{\mathrm{G}_1}"'] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_2 \arrow[d, "\exp^{\mathrm{G}_2}"] \\ \mathrm{G}_1 \arrow[r, "\chi"'] & \mathrm{G}_2 \end{tikzcd}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy ścieżkę gładką

$$\gamma := \chi \circ \lambda_X \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}_2$$

przez

$$\gamma(0) \equiv \chi \circ \lambda_X(0) = \chi(e_1) = e_2\,.$$

Na podstawie bezpośredniego rachunku (wykorzystującego definicję ścieżki λ_X oraz lewoniezmienniczość L_X, jak również Regułę Łańcuchową)

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\gamma(t) = \mathsf{T}_{\lambda_X(t)}\chi\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(t)\big) = \mathsf{T}_{\lambda_X(t)}\chi\big(L_X\big(\lambda_X(t)\big)\big) = \mathsf{T}_{\lambda_X(t)}\chi \circ \mathsf{T}_{e_1}\ell^1_{\lambda_X(t)}(X)$$

$$= \mathsf{T}_{e_1}\big(\chi \circ \ell^1_{\lambda_X(t)}\big)(X) = \mathsf{T}_{e_1}\big(\ell^1_{\chi\circ\lambda_X(t)} \circ \chi\big)(X) = \mathsf{T}_{\chi(e_1)}\ell^1_{\chi\circ\lambda_X(t)}\big(\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)\big)$$

$$= \mathsf{T}_{e_2}\ell^1_{\chi\circ\lambda_X(t)}\big(\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)\big) \equiv \mathsf{T}_{e_2}\ell^1_{\gamma(t)}\big(\mathrm{Lie}\,\chi(X)\big) \equiv L_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)}\big(\gamma(t)\big)$$

i wreszcie

$$\gamma(0) = e_2 \equiv \lambda_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)}(0)\,,$$

konstatujemy na gruncie Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, że dla γ jest spełniona tożsamość

$$\chi \circ \lambda_X \equiv \gamma = \lambda_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)}\,,$$

co w chwili $t = 1$ daje pożądaną równość

$$\chi \circ \exp^{\mathrm{G}_1}(X) \equiv \chi \circ \lambda_X(1) = \lambda_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)}(1) \equiv \exp^{\mathrm{G}_2} \circ \mathrm{Lie}\,\chi(X)\,.$$

□

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niech $\big((\mathsf{T}_e\mathrm{Ad.})_A^{\ B}\big)_{A,B\in\overline{1,\dim\mathrm{G}}}$ o będzie macierzą o wartościach w $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$ określoną równaniami

$$\mathsf{T}_e\mathrm{Ad.}(t_A) =: \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad.}\big)_A^{\ B} \rhd t_B\,,\qquad A \in \overline{1,\dim\mathrm{G}}\,.$$

Pola wektorowe L_A i R_A, $A \in \overline{1,\dim\mathrm{G}}$ spełniają relacje (zapisane dla dowolnych $A, B \in \overline{1,\dim\mathrm{G}}$)

$$[L_A, L_B] = f_{ABC} \rhd L_C\,,\qquad [R_A, R_B] = -f_{ABC} \rhd R_C\,,\qquad [L_A, R_B] = 0\,.$$

Ponadto prawdziwe są tożsamości:

$$L_A(\cdot) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad.}\big)_A^{\ B} \rhd R_B(\cdot) \tag{9}$$

oraz

$$\mathrm{Inv}_* L_A = -R_A\,,\qquad \mathrm{Inv}_* R_A = -L_A\,,$$

a także – dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ –

$$\wp_{g\,*} L_A = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ B} \rhd L_B\,,\qquad \ell_{g\,*} R_A = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ B} \rhd R_B$$

Dowód: Pierwsza równość wynika wprost z definicji komutatora w $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$, oto bowiem wobec lewoniezmienniczości komutatora pól lewoniezmienniczych zachodzi

$$\begin{aligned} f_{ABC}\,L_C(\cdot) &= f_{ABC}\,\mathsf{T}_e\ell.\big(L_C(e)\big) \equiv f_{ABC}\,\mathsf{T}_e\ell.(t_C) = \mathsf{T}_e\ell.\big([t_A, t_B]\big) \\ &\equiv \mathsf{T}_e\ell.\big([L_A, L_B](e)\big) = [L_A, L_B](\cdot)\,. \end{aligned}$$

Komutator bazowego pola lewoniezmienniczego z takimż polem prawoniezmienniczym obliczamy na dowolnej funkcji $f \in C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})$ w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$, korzystając przy tym ze Stw. 6,

$$\begin{aligned} &[L_A, R_B](f)(g) \equiv L_A\big(R_B(f)\big)(g) - R_B\big(L_A(f)\big)(g) \\ \equiv\ & L_A\big(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\big)(g) - R_B\big(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\restriction_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\big)(g) \\ \equiv\ & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\restriction_{s=0}\big(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\big) \circ \mathcal{L}_s^{t_A}(g) - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0}\big(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\restriction_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\big) \circ \mathcal{R}_t^{t_B}(g) \\ =\ & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\restriction_{s=0} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0} f\big(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot \big(g \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e)\big)\big) - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0}\big(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\restriction_{s=0} f\big(\big(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot g\big) \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e)\big) \\ =\ & 0\,. \end{aligned}$$

Wreszcie też wyznaczamy wprost, w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$,

$$L_A(g) = \mathsf{T}_e\ell_g\big(L_A(e)\big) \equiv \mathsf{T}_e\ell_g(t_A) = \mathsf{T}_e\wp_g \circ \mathsf{T}_g\wp_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_e\ell_g(t_A)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{T}_e\wp_g \circ \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(t_A) \equiv \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)^{\ B}_{A} \triangleright \mathsf{T}_e\wp_g(t_B) \\
&\equiv \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)^{\ B}_{A} \triangleright \mathsf{T}_e\wp_g\big(R_B(e)\big) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)^{\ B}_{A} \triangleright R_B(g)\,.
\end{aligned}
$$

Jest też – w świetle Uwagi 1, a dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$ –

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Inv}_* L_A(g) &\equiv \mathsf{T}_{g^{-1}}\mathrm{Inv}\big(L_A(g^{-1})\big) = \mathsf{T}_{g^{-1}}\mathrm{Inv} \circ \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}(t_A) \\
&= -\mathsf{T}_e\wp_g \circ \mathsf{T}_{g^{-1}}\ell_g \circ \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}(t_A) = -\mathsf{T}_e\wp_g(t_A) \equiv -R_A(g)\,,
\end{aligned}
$$

a stąd już wprost wynika

$$
\mathrm{Inv}_* R_A = -\mathrm{Inv}_* \circ \mathrm{Inv}_* L_A = -(\mathrm{Inv} \circ \mathrm{Inv})_* L_A = -L_A\,.
$$

Pierwsza z tych tożsamości pozwala łatwo udowodnić drugą równość wypisaną w tezie stwierdzenia w odwołaniu do podstawowej własności komutatora pól wektorowych, jaką jest jego niezmienniczość względem pchnięć, oraz zweryfikowanej wcześniej równości pierwszej,

$$
-f_{ABC}\, R_C = f_{ABC}\, \mathrm{Inv}_* L_C = \mathrm{Inv}_*\big([L_A, L_B]\big) = [\mathrm{Inv}_* L_A, \mathrm{Inv}_* L_B] \equiv [R_A, R_B]\,.
$$

Sprawdzamy także – dla dowolnego $h \in \mathrm{G}$ –

$$
\begin{aligned}
(\wp_{g\,*} L_A)(h) &\equiv \mathsf{T}_{\wp_{g^{-1}}(h)}\wp_g\big(L_A \circ \wp_{g^{-1}}(h)\big) = \mathsf{T}_{hg^{-1}}\wp_g \circ \mathsf{T}_e\ell_{hg^{-1}}(t_A) \\
&= \mathsf{T}_e\ell_h \circ \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)^{\ B}_{A} \triangleright \mathsf{T}_e\ell_h(t_B) \\
&= \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)^{\ B}_{A} \triangleright L_B(h)
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
(\ell_{g\,*} R_A)(h) &\equiv \mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)}\ell_g\big(R_A \circ \ell_{g^{-1}}(h)\big) = \mathsf{T}_{g^{-1}h}\ell_g \circ \mathsf{T}_e\wp_{g^{-1}h}(t_A) \\
&= \mathsf{T}_e\big(\ell_g \circ \wp_h \circ \wp_{g^{-1}}\big)(t_A) = \mathsf{T}_e\big(\wp_h \circ \mathrm{Ad}_g\big)(t_A) \\
&= \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)^{\ B}_{A} \triangleright \mathsf{T}_e\wp_h(t_B) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)^{\ B}_{A} \triangleright R_B(h)\,.
\end{aligned}
$$

□

Uwaga 4. Powyższe stwierdzenie orzeka, że algebry pól lewo- i prawoniezmienniczych są wzajem antyizomorficznymi komutującymi podalgebrami Liego w algebrze Liego (gładkich) pól wektorowych na G, przy czym $\big(\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)^{\ B}_{A}\big)_{A,B\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$ jest macierzą przejścia pomiędzy lewo- i prawoniezmienniczą bazą stycznej do grupy w tym punkcie. Tożsamości, w których pojawia się pchnięcie wzdłuż Inv, stanowią stycznościowy (w e) wariant relacji między lewym i prawym działaniem regularnym w grupie i grupie przeciwnej. Ostatnie dwie tożsamości w tezie stwierdzenia określają własności współzmienniczości względem – odpowiednio – prawych i lewych translacji (pchnięć) pól lewo- i prawoniezmienniczych.

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj $\{\theta^A_{\mathrm{L}}\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ i $\{\theta^A_{\mathrm{R}}\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ będą bazami $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Omega^1(\mathrm{G})$ dualnymi do baz – odpowiednio – $\{L_A\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ i $\{R_A\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$,

$$
L_A \lrcorner\, \theta^B_{\mathrm{L}} = \delta^B_A = R_A \lrcorner\, \theta^B_{\mathrm{R}}\,, \qquad A, B \in \overline{1, \dim \mathrm{G}}\,.
$$

Pole 1-form o wartościach w $\mathfrak{g}$ postaci

$$
\theta_{\mathrm{L}} := \theta^A_{\mathrm{L}} \otimes_{\mathbb{R}} t_A
$$

nosi miano **kanonicznego pola 1-form lewoniezmienniczych** lub **lewoniezmienniczej formy Maurera–Cartana na** G. Analogicznie, pole 1-form

$$
\theta_{\mathrm{R}} := \theta^A_{\mathrm{R}} \otimes_{\mathbb{R}} t_A
$$

nazywamy **kanonicznym polem 1-form prawoniezmienniczych** lub **prawoniezmienniczą formą Maurera–Cartana na** G.

Uwaga 5. Warto odnotować, że formy Maurera–Cartana wraz z odnośnymi polami niezmienniczymi na grupie dają nam do ręki wygodną reprezentację operatora różniczki zewnętrznej (de Rhama), oto bowiem dla dowolnej funkcji $f \in C^1(\mathrm{G}, \mathbb{R})$ i w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$ zachodzą tożsamości:

$$\mathsf{d}f(g) = L_A(f)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{L}}^A(g) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \big(f \circ \mathcal{L}_t^{t_A}\big)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{L}}^A(g)$$

oraz

$$\mathsf{d}f(g) = R_A(f)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{R}}^A(g) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \big(f \circ \mathcal{R}_t^{t_A}\big)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{R}}^A(g)\,.$$

Formuły te należy odnieść do znanych formuł różniczkowych

$$\mathsf{d}f(x) = \partial_\mu f(x) \triangleright \mathsf{d}x^\mu$$

słusznych na dowolnej rozmaitości M w dziedzinie lokalnego układu współrzędnych $\{x^\mu\}^{\mu \in \overline{1, \dim M}}$. Należy przy tym podkreślić, że o ile ostatnia formuła jest słuszna *lokalnie*, o tyle wypisane wcześniej formuły na $M \equiv \mathrm{G}$ mają sens *globalnie*.

Stwierdzenie 13. Przyjmijmy zapis Def. 6 oraz Stw. 12. Formy Maurera–Cartana są – odpowiednio – lewo- i prawoniezmiennicze,

$$(\ell_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}} = \theta_{\mathrm{L}}\,, \qquad (\wp_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}} = \theta_{\mathrm{R}}\,,$$

a ponadto spełniają tożsamości:

$$\theta_{\mathrm{R}} = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_\cdot\big) \circ \theta_{\mathrm{L}} \tag{10}$$

i

$$(\mathrm{Inv}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}} = -\theta_{\mathrm{R}}\,, \qquad (\mathrm{Inv}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}} = -\theta_{\mathrm{L}} \tag{11}$$

oraz – dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ –

$$\big(\wp_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{L}} = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \theta_{\mathrm{L}}\,, \qquad \big(\ell_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{R}} = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big) \circ \theta_{\mathrm{R}}\,.$$

Dowód: W dowodach wszystkich relacji wykorzystujemy bazowy charakter układów $\{\theta_{\mathrm{H}}^A\}_{A \in \overline{1, \dim \mathrm{G}}}$, $H \in \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$ (w dowolnym punkcie G) oraz ich dualność względem odnośnego układu pól niezmienniczych. I tak z równości, słusznej dla dowolnych $g, h \in \mathrm{G}$,

$$(L_A \lrcorner\, \ell_g^* \theta_{\mathrm{L}}^B)(h) = \theta_{\mathrm{L}}^B\big(\ell_g(h)\big) \circ \mathsf{T}_h\ell_g\big(L_A(h)\big) = \theta_{\mathrm{L}}^B(gh)\big(L_A(gh)\big) = \delta_A^B$$

wywodzimy wniosek:

$$\ell_g^* \theta_{\mathrm{L}}^B(h) = \theta_{\mathrm{L}}^B(h)\,,$$

czyli

$$\ell_g^* \theta_{\mathrm{L}}^B = \theta_{\mathrm{L}}^B\,.$$

Analogicznie dowodzimy prawoniezmienniczości 1-form θ_{R}^B. W następnej kolejności przywołujemy Równ. (9) i na tej podstawie obliczamy

$$L_A \lrcorner\, \theta_{\mathrm{R}}^B = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_\cdot\big)_A^{\ C} \triangleright R_C \lrcorner\, \theta_{\mathrm{R}}^B = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_\cdot\big)_A^{\ C}\, \delta_C^B = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_\cdot\big)_A^{\ B}\,,$$

skąd odczytujemy Równ. (10). W dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$ jest też na mocy Uwagi 1 spełniona relacja

$$\begin{aligned} R_A \lrcorner\, \mathrm{Inv}^* \theta_{\mathrm{L}}^B(g) &= \theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1}) \circ \mathsf{T}_g\mathrm{Inv}\big(R_A(g)\big) = \theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1}) \circ \mathsf{T}_g\mathrm{Inv} \circ \mathsf{T}_e\wp_g(t_A) \\ &= -\theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1}) \circ \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}(t_A) \equiv -\theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1})\big(L_A(g^{-1})\big) = -\delta_A^B\,, \end{aligned}$$

zatem

$$\mathrm{Inv}^* \theta_{\mathrm{L}}^B = -\theta_{\mathrm{R}}^B\,,$$

czyli także

$$\mathrm{Inv}^*\theta_{\mathrm{R}}^B = -\theta_{\mathrm{L}}^B\,.$$

Wreszcie na koniec obliczamy – dla dowolnych $g,h \in \mathrm{G}$ –

$$\begin{aligned} & L_A \lrcorner \big(\wp_g^*\theta_{\mathrm{L}}^B\big)(h) = \theta_{\mathrm{L}}^B(hg)\circ \mathsf{T}_h\wp_g\big(L_A(h)\big) = \theta_{\mathrm{L}}^B(hg)\circ \mathsf{T}_h\wp_g\circ \mathsf{T}_e\ell_h(t_A) \\ = \; & \theta_{\mathrm{L}}^B(hg)\circ \mathsf{T}_e\ell_{hg}\circ \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ C}\,\theta_{\mathrm{L}}^B(hg)\circ \mathsf{T}_e\ell_{hg}(t_C) \\ = \; & \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ C}\,\theta_{\mathrm{L}}^B(hg)\big(L_C(hg)\big) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ C}\,\delta_C^{\ B} = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ B} \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\wp_g^*\theta_{\mathrm{L}}^B = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ B}\,\theta_{\mathrm{L}}^A\,.$$

Dowód ostatniej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. □

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $(M,\widehat{\mathscr{A}})$ będzie rozmaitością gładką, G zaś – grupą Liego. **Pochodna logarytmiczna lewostronna** na $C^\infty(M,\mathrm{G})$ to odwzorowanie

$$\delta_{\mathrm{L}}\log\;:\;C^\infty(M,\mathrm{G}) \longrightarrow \Omega^1(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$$

określone wzorem

$$\delta_{\mathrm{L}}\log f(x)(v_x) \coloneqq \mathsf{T}_{f(x)}\ell_{f(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_x f(v_x)\,,$$

słusznym dla dowolnych: punktu $x \in M$, wektora $v_x \in \mathsf{T}_x M$ oraz funkcji $f \in C^\infty(M,\mathrm{G})$. Podobnie, **pochodna logarytmiczna prawostronna** na $C^\infty(M,\mathrm{G})$ to odwzorowanie

$$\delta_{\mathrm{R}}\log\;:\;C^\infty(M,\mathrm{G}) \longrightarrow \Omega^1(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$$

zadane w postaci

$$\delta_{\mathrm{R}}\log f(x)(v_x) \coloneqq \mathsf{T}_{f(x)}\wp_{f(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_x f(v_x)\,.$$

Stwierdzenie 14. Przyjmijmy zapis Def. 7. Dla dowolnych $f_1,f_2 \in C^\infty(M,\mathrm{G})$ (wymnożonych punktowo) i w każdym punkcie $x \in M$ prawdziwe są następujące tożsamości

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{L}}\log(f_1\cdot f_2)(x) &= \delta_{\mathrm{L}}\log f_2(x) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}}\otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{f_2(x)^{-1}}\big)\big(\delta_{\mathrm{L}}\log f_1(x)\big)\,, \\ \delta_{\mathrm{R}}\log(f_1\cdot f_2)(x) &= \delta_{\mathrm{R}}\log f_1(x) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}}\otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{f_1(x)}\big)\big(\delta_{\mathrm{R}}\log f_2(x)\big)\,. \end{aligned}$$

Dowód: Dowodzimy pierwszej tożsamości. Dowód drugiej z nich przebiega analogicznie. Wprost na podstawie definicji, a w odwołaniu do Równ. (2), obliczamy

$$\begin{aligned} & \delta_{\mathrm{L}}\log(f_1\cdot f_2)(x) \\ = \; & \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}\cdot f_1(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_x(f_1\cdot f_2) \\ = \; & \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\big(\ell_{f_2(x)^{-1}}\circ \ell_{f_1(x)^{-1}}\big)\circ \mathsf{T}_x\big(m\circ(f_1,f_2)\big) \\ = \; & \mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\ell_{f_1(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_{(f_1(x),f_2(x))}m\circ \mathsf{T}_x(f_1,f_2) \\ = \; & \mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\ell_{f_1(x)^{-1}}\circ\big(\mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_1(x)}\circ \mathsf{T}_x f_2 + \mathsf{T}_{f_1(x)}\wp_{f_2(x)}\circ \mathsf{T}_x f_1\big) \\ = \; & \mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_x f_2 + (\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}}\otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{f_2(x)^{-1}})\circ \mathsf{T}_{f_1(x)}\ell_{f_1(x)^{-1}}\circ \mathsf{T}_x f_1\,. \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 15. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj $f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathrm{G})$, a wówczas prawdziwe są zdania:

$$\delta_\mathrm{L} \log f_1 = \delta_\mathrm{L} \log f_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{g \in \mathrm{G}} \; : \; f_2 = \ell_g \circ f_1$$

oraz

$$\delta_\mathrm{R} \log f_1 = \delta_\mathrm{R} \log f_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{g \in \mathrm{G}} \; : \; f_2 = \wp_g \circ f_1 \,.$$

<u>*Dowód:*</u> Wynikanie $\Longleftarrow$ jest oczywiste, a już z pewnością staje się takim po przeanalizowaniu dowodu wynikania przeciwnego. To udowodnimy dla pochodnej lewostronnej. Dowód dla pochodnej prawostronnej jest w pełni analogiczny. Oto więc, stosując pierwszą z tożsamości ze Stw. 14, otrzymujemy

$$\delta_\mathrm{L} \log(f_2 \cdot \mathrm{Inv} \circ f_1) = \delta_\mathrm{L} \log(\mathrm{Inv} \circ f_1) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{f_1}\big) \delta_\mathrm{L} \log f_2 \,,$$

a ponieważ na podstawie tej samej tożsamości stwierdzamy też równość

$$0 \equiv \delta_\mathrm{L} \log(f_1 \cdot \mathrm{Inv} \circ f_1) = \delta_\mathrm{L} \log(\mathrm{Inv} \circ f_1) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{f_1}\big) \delta_\mathrm{L} \log f_1 \,,$$

przeto wobec założonej równości obu pochodnych lewostronnych

$$\begin{aligned} \delta_\mathrm{L} \log(f_2 \cdot \mathrm{Inv} \circ f_1) &= -\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{f_1}\big) \delta_\mathrm{L} \log f_1 + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{f_1}\big) \delta_\mathrm{L} \log f_2 \\ &= -\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{f_1}\big) \delta_\mathrm{L} \log f_1 + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{f_1}\big) \delta_\mathrm{L} \log f_1 \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

Przywołując definicję pochodnej logarytmicznej, przepisujemy powyższe w postaci

$$0 = \delta_\mathrm{L} \log(f_2 \cdot \mathrm{Inv} \circ f_1) = \mathsf{T}_{f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}} \ell_{f_1(\cdot) \cdot f_2(\cdot)^{-1}} \circ \mathsf{T}_\cdot \big(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}\big) \,,$$

albo równoważnej

$$\mathsf{T}_\cdot \big(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}\big) = 0 \,,$$

która implikuje równość

$$\forall_{x \in M} \; \forall_{V \in \mathsf{T}_x M} \; : \; V\big(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}\big) = 0 \,,$$

czyli

$$\forall_{x \in M} \; : \; f_2(x) \cdot f_1(x)^{-1} = \mathrm{const} \in \mathrm{G} \,,$$

co jest właśnie postulowaną tezą. □

Stwierdzenie 16. W zapisie Def. 6 i 7 słuszne są tożsamości

$$\theta_\mathrm{L} \equiv \delta_\mathrm{L} \log \mathrm{id}_\mathrm{G} \,, \qquad \qquad \theta_\mathrm{R} = \delta_\mathrm{R} \log \mathrm{id}_\mathrm{G} \,.$$

<u>*Dowód:*</u> Bez trudu sprawdzamy, dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner\, \delta_\mathrm{L} \log \mathrm{id}_\mathrm{G}(g) &\equiv \mathsf{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_g \mathrm{id}_\mathrm{G}\big(L_A(g)\big) = \mathsf{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathrm{id}_{\mathsf{T}_g \mathrm{G}}\big(L_A(g)\big) \\ &= \mathsf{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_g \ell_g\big(L_A(e)\big) = L_A(e) \equiv t_A \,, \end{aligned}$$

co wobec bazowego charakteru układu $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim \mathrm{G}}}$ kończy dowód pierwszej części tezy stwierdzenia. Dowód w przypadku pochodnej prawostronnej przebiega analogicznie. □

Stwierdzenie 17. Przyjmijmy zapis Def. 6. Formy Maurera–Cartana spełniają – dla dowolnych elementów $g, h \in \mathrm{G}$ – tożsamości

$$m^*\theta_{\mathrm{L}}(g,h) \;=\; \theta_{\mathrm{L}}(h) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big) \circ \theta_{\mathrm{L}}(g)\,,$$

$$m^*\theta_{\mathrm{R}}(g,h) \;=\; \theta_{\mathrm{R}}(g) + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g}\big) \circ \theta_{\mathrm{R}}(h)\,.$$

Dowód: Na mocy Stw. 16 (odczytanego w połączeniu z Def. 7), a w odwołaniu do Równ. (2) stwierdzamy, co następuje:

$$\begin{aligned}
\theta_{\mathrm{L}}(g\cdot h) \;&\equiv\; m^*\theta_{\mathrm{L}}(g,h) = \mathsf{T}_{g\cdot h}\ell_{(g\cdot h)^{-1}} \circ \mathsf{T}_{(g,h)}m = \mathsf{T}_{gh}\big(\ell_{h^{-1}\cdot g^{-1}}\big) \circ \big(\mathsf{T}_g\wp_h \circ \mathrm{pr}_1 + \mathsf{T}_h\ell_g \circ \mathrm{pr}_2\big) \\
&\equiv\; \mathsf{T}_g\big(\mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}}\big) \circ \mathrm{pr}_1 + \mathsf{T}_h\ell_{h^{-1}} \circ \mathrm{pr}_2 = \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}} \circ \mathrm{pr}_1 + \mathsf{T}_h\ell_{h^{-1}} \circ \mathrm{pr}_2 \\
&\equiv\; \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big) \circ \theta_{\mathrm{L}}(g) + \theta_{\mathrm{L}}(h)\,.
\end{aligned}$$

Dowód drugiej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. □

Dodatek A. Odzworowania

Niechaj $X_A, Y_A,\ A \in \{1,2\}$ będą zbiorami, $f_A : X_A \longrightarrow Y_A$ zaś – odwzorowaniami. Definiujemy wówczas **produkt** odwzorowań f_A jako odwzorowanie

$$f_1 \times f_2 \;:\; X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2 \;:\; (x_1, x_2) \longmapsto \big(f_1(x_1), f_2(x_2)\big)\,.$$

Mając do dyspozycji zbiory X, Z_1, Z_2 i parę odwzorowań $F_\alpha : X \longrightarrow Z_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$, definiujemy także odwzorowanie

$$(F_1, F_2) \;:\; X \longrightarrow Z_1 \times Z_2 \;:\; x \longmapsto \big(F_1(x), F_2(x)\big)\,.$$

Relację pomiędzy tymi dwoma typami odwzorowań ustalmy wprowadzając odwzorowanie

$$\Delta \;:\; X \longrightarrow X \times X \;:\; x \longmapsto (x,x)\,,$$

wkładające zbiór X w jego kwadrat kartezjański w postaci jego przekątnej. Przy jego pomocy możemy zapisać tożsamość

$$(F_1, F_2) = (F_1 \times F_2) \circ \Delta\,.$$

Jest oczywiste, że ilekroć wszystkie zbiory objęte definicjami są wyposażone w strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞, względem której odnośne odwzorowania są gładkie, własność ta jest dziedziczona przez $f_1 \times f_2$ i (F_1, F_2).

Dodatek B. Iloczyn półprosty grup

Niechaj $\mathrm{G}_A,\ A \in \{1,2\}$ będą grupami i niech

$$\alpha. \;:\; \mathrm{G}_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(\mathrm{G}_2) \;:\; g \longmapsto \alpha_g$$

będzie homomorfizmem grup przyporządkowującym dowolnemu elementowi G_1 odnośny automorfizm (tj. odwracalny endomorfizm – te tworzą grupę z superpozycją jako operacją binarną, odwrotnością jako operacją unarną i automorfizmem identycznościowym jako elementem neutralnym) G_2. Wówczas produkt kartezjański $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ nośników struktury grupy możemy wyposażyć w *odmienną od produktowej* strukturę grupy definiując operację binarną

$$\big(\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2\big) \times \big(\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2\big) \longrightarrow \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \;:\; \big((g_1, g_2), (h_1, h_2)\big) \longmapsto \big(g_1 \cdot_{\mathrm{G}_1} h_1, \alpha_{h_1^{-1}}(g_2) \cdot_{\mathrm{G}_2} h_2\big)$$

oraz odwrotność

$$\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \circlearrowleft \;:\; (g_1, g_2) \longmapsto \big(g_1^{-1}, \alpha_{g_1}\big(g_2^{-1}\big)\big)\,,$$

dla których para elementów neutralnych $(e_{\mathrm{G}_1}, e_{\mathrm{G}_2})$ jest elementem neutralnym. Tak zadaną strukturę grupy określamy mianem **produktu półprostego grup** i oznaczamy symbolem

$$\mathrm{G}_1 {}_{\alpha.}\!\ltimes \mathrm{G}_2\,.$$

Przykładem takiej struktury jest grupa Poincarégo symetrii przestrzeni Minkowskiego $\mathbb{R}^{3,1}$, będąca produktem półprostym grupy Lorentza i przemiennej grupy translacji w $\mathbb{R}^4$,

$$\mathrm{ISO}(3,1) = \mathrm{SO}(3,1)\,{}_{\Lambda.}\!\ltimes \mathbb{R}^4\,,$$

zdefiniowana przez standardową reprezentację wektorową

$$\Lambda.\;:\;\mathrm{SO}(3,1) \longrightarrow \mathrm{GL}\big(\mathbb{R}^{3+1}\big) \cong \mathrm{GL}(4;\mathbb{R})\,.$$