TEORIA GRUP II
WYKŁADY 5. I 6.
UN TOUT PETIT PEU DE KOHOMOLOGIA I QU'EST-CE QUE Z TEGO WYNIKA

Spis treści

1. Wprowadzenie

Na poprzednich wykładach wprowadziliśmy rachunek różniczkowy Cartana na grupie Liego G, więc

- pola wektorowe LI $\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$,
$$L. \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) \;:\; X \longmapsto \mathsf{T}_e\ell.(X)\,,$$
określające globalną trywializację wiązki stycznej $\mathsf{T}\mathrm{G} \cong \mathrm{G}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}}\ltimes\mathfrak{g}$ poprzez zadanie globalnej bazy $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Gamma(\mathrm{G})$,
$$\{L_A \equiv L_{t_A}\}_{A\in\overline{1,D}}\,, \qquad D \equiv \dim \mathrm{G}\,,$$
stowarzyszonej z dowolną bazą $\{t_A\}_{A\in\overline{1,D}}$ algebry Liego $\mathsf{T}_e\mathrm{G} \equiv \mathfrak{g}$, oraz
- dualną 1-formy LI $\Omega^1_L(\mathrm{G})$ rozpięte (nad $\mathbb{R}$) na bazie dualnej
$$\{\theta^A_{\mathrm{L}}\}_{A\in\overline{1,D}}\,, \qquad\qquad L_A \lrcorner\, \theta^B_{\mathrm{L}} = \delta_A^{\ B}\,.$$

Te ostatnie generują (nad $\mathbb{R}$ a wzgl. iloczynu zewnętrznego $\wedge$) podprzestrzenie k-form LI,
$$\Omega^k_L(\mathrm{G}) = \{\ \omega \in \Omega^k(\mathrm{G}) \quad | \quad \forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \ell_g^*\omega = \omega\ \}\,,$$
otrzymujemy zatem
$$\Omega^\bullet_L(\mathrm{G}) \equiv \big\langle \theta^A_{\mathrm{L}}\,|\, A \in \overline{1,D}\big\rangle_{\wedge,\mathbb{R}} \subset \Omega^\bullet(\mathrm{G})\,.$$
Powstaje naturalne pytanie o to, czy także operator de Rhama $\mathsf{d}_{\mathrm{dR}} \equiv \mathsf{d}$ (pochodnej zewnętrznej) ogranicza się do tak zdefiniowanej **algebry form lewoniezmienniczych**. Odpowiedzi na nie dostarcza

Stwierdzenie 1. Operator de Rhama ogranicza się do algebry form lewoniezmienniczych na grupie Liego G, tj. zachodzi
$$\mathsf{d}\Omega^\bullet_L(\mathrm{G}) \subset \Omega^\bullet_L(\mathrm{G})\,.$$
W szczególności są spełnione równania Maurera–Cartana
$$\mathsf{d}\theta^A_{\mathrm{L}} = -\tfrac{1}{2}\, f_{BC}^{\ \ \ A}\, \theta^B_{\mathrm{L}} \wedge \theta^C_{\mathrm{L}}\,,$$
w których współczynniki $f_{BC}^{\ \ \ A}$ są stałymi struktury $\mathfrak{g}$ w bazie $\{t_A\}_{A\in\overline{1,D}}$,
$$[t_B, t_C]_{\mathfrak{g}} = f_{BC}^{\ \ \ A}\, t_A\,.$$

Dowód: Istnienie ograniczenia operatora de Rhama do $\Omega_L^\bullet(\mathrm{G})$ jest natychmiastową konsekwencją przemienności tego operatora z operatorem cofnięcia,

$$\ell_g^*\omega = \omega \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_g^*\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}\ell_g^*\omega = \mathsf{d}\omega\,.$$

Pozostaje zatem zająć się drugą częścią tezy, wykorzystując dodatkowo to, że 2-forma $\mathsf{d}\theta_{\mathrm{L}}^A$ jest w pełni określona przez wartości przyjmowane przez nią na bazie LI modułu $\Gamma(\mathrm{G})$. Biorąc pod uwagę fundamentalną tożsamość (Cartana)

$$\mathsf{d}\omega(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_k) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\,\mathcal{V}_l \lrcorner\, \mathsf{d}\big(\omega(\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1,\underset{\widehat{l}}{\ldots},\mathcal{V}_k)\big) + \sum_{m<n=1}^{k}(-1)^{m+n}\,\omega\big([\mathcal{V}_m,\mathcal{V}_n],\mathcal{V}_0,\mathcal{V}_1,\underset{\widehat{m,n}}{\ldots},\mathcal{V}_k\big)\,,$$

słuszną dla dowolnej k-formy $\omega \in \Omega^k(M)$ (na rozmaitości M) i dowolnych pól wektorowych $\mathcal{V}_l \in \Gamma(\mathsf{T}M)$, $l \in \overline{0,k}$ (na tejże), obliczamy

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\theta_{\mathrm{L}}^A(L_B,L_C) &= L_B \lrcorner\, \mathsf{d}\big(L_C \lrcorner\, \theta_{\mathrm{L}}^A\big) - L_C \lrcorner\, \mathsf{d}\big(L_B \lrcorner\, \theta_{\mathrm{L}}^A\big) - \theta_{\mathrm{L}}^A\big([L_B,L_C]\big)\\
&= L_B \lrcorner\, \mathsf{d}\delta_C{}^A - L_C \lrcorner\, \mathsf{d}\delta_B{}^A - \theta_{\mathrm{L}}^A\big(f_{BC}{}^D\,L_D\big) = -f_{BC}{}^D\,L_D \lrcorner\, \theta_{\mathrm{L}}^A = -f_{BC}{}^A\\
&\equiv -\tfrac{1}{2}\,f_{DE}{}^A\,\theta_{\mathrm{L}}^D \wedge \theta_{\mathrm{L}}^E(L_B,L_C)\,.
\end{aligned}$$

□

Formy różniczkowe na rozmaitości M wymiaru $\dim M = d$ tworzą wraz z (ograniczeniami) d_{dR} **kompleks (ko)łańcuchowy de Rhama**

$$\big(\Omega^\bullet(M),\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(\bullet)}\big)\ :\ \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(0)}\equiv\mathsf{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(1)}\equiv\mathsf{d}} \cdots \xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(d-1)}\equiv\mathsf{d}} \Omega^d(M) \xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(d)}\equiv 0} \mathbf{0}\,,$$

$$\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k+1)}\circ\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k)} = 0\,,\qquad k \in \overline{0,d-1}\,.$$

Jak wiemy z kursu Geometrii różniczkowej, grupy homologii tego kompleksu,

$$H^0(M,\mathbb{R}) \equiv \mathrm{Ker}\,\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(0)}\,,\qquad\qquad H_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R}) \equiv Z_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R})/B_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R})\,,\quad k \in \overline{0,d-1}\,,$$

zwane **grupami kohomologii de Rhama rozmaitości** M, w których zapisie

$$Z_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R}) \equiv \mathrm{Ker}\,\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k+1)}$$

to **grupa $(k+1)$-kocykli de Rhama** (czyli grupa $(k+1)$-form zamkniętych), a

$$B_{\mathrm{dR}}^{k+1}(M,\mathbb{R}) \equiv \mathrm{Im}\,\mathsf{d}_{\mathrm{dR}}^{(k)}$$

to **grupa $(k+1)$-kobrzegów de Rhama na** M (czyli grupa $(k+1)$-form dokładnych), kodują istotną informację topologiczną dotyczącą M. Szczegółowa dyskusja natury tej informacji wykracza istotnie poza zakres niniejszego wykładu, pozostaje nam przeto zilustrować ją na poglądowym przykładzie. Oto więc z jednej strony mamy Lemat Poincarégo, który stwierdza trywialność rzeczonej informacji w przypadku obszarów ściągalnych, zatem pozbawionych „defektów" topologicznych, tj., mówiąc obrazowo, rozmaitych „dziur", których obecność każdorazowo skutkuje pojawieniem się nieściągalnych cykli (homologicznych), czyli podrozmaitości bez brzegu niebędących brzegami. O słuszności tej identyfikacji informacji topologicznej zapisanej w kohomologii de Rhama rozmaitości przekonujemy się bez trudu zestawiając parę rozmaitości różniących się obecnością „defektu" właśnie: ściągalną płaszczyznę $\mathbb{R}^{\times 2}$ oraz nieściągalną „płaszczyznę z dziurą" (tj. pierścień) $\mathbb{R}^{\times 2} \smallsetminus \{0\}$. Jak stwierdziliśmy wcześniej, w tym pierwszym przypadku mamy

$$H_{\mathrm{dR}}^k\big(\mathbb{R}^{\times 2}\big) = \delta^{k,0}\,\mathbb{R}$$

(zerowa grupa kohomologii „zlicza" lokalne stałe, czyli spójne składowe rozmaitości – ich liczba określa potęgę ciała bazowego po prawej stronie powyższej formuły). Tymczasem w przypadku drugim pojawia się nietrywialny 1-kocykl de Rhama odpowiadający nieściągalnej pętli obiegającej wyjęty punkt 0, a mianowicie

$$\eta(x,y) = \tfrac{x\,\mathsf{d}y - y\,\mathsf{d}x}{x^2+y^2}\,,$$

który we współrzędnych biegunowych (dobrze określonych na $\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\}$ właśnie) przybiera postać

$$\eta(r\cos\phi, r\sin\phi) = \mathsf{d}\phi\,,$$

w jawny sposób dokumentującą jego naturalny związek z wyróżnioną pętlą, a zarazem – zamkniętość,

$$\mathsf{d}\eta = 0\,.$$

Nietrywialność 1-kocyklu η wynika wprost z nieistnienia *globalnie gładkiej* 0-formy (czyli funkcji) pierwotnej ϕ (współrzędna ta ma nieciągłość na półprostej $\mathbb{R}_{>0}\times\{0\}$). 1-kocykl η reprezentuje zatem klasę kohomologii w $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\})$. Podkreślmy: definicja η ma sens jedynie na płaszczyźnie z wyjętym punktem 0, w którym 1-forma ta (gdy potraktować ją jako 1-formę na $\mathbb{R}^{\times 2}$) ma osobliwość, co wyjaśnia jej nieobecność wśród 1-form na ściągalnej płaszczyźnie. W istocie nietrudno pokazać, że

$$H^k_{\mathrm{dR}}\big(\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\}\big) = \big(\delta^{k,0}+\delta^{k,1}\big)\,\mathbb{R}\,,$$

co odpowiada wiernie sytuacji topologicznej (grupa $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^{\times 2}\setminus\{0\})$ jest generowana przez klasę $[\eta]$). Opisana tu odpowiedniość uogólnia się w postaci dwoistości pomiędzy kohomologią de Rhama i homologią (singularną), patrz: Ref. [BT82].

Powyższe rozważania prowadzą nas do zadania naturalnego pytania o informację kodowaną przez homologię podkompleksu form lewoniezmienniczych

$$\big(\Omega^\bullet_{\mathrm{L}}(\mathrm{G}), \mathsf{d}^{(\bullet)}_{\mathrm{CaE}} \equiv \mathsf{d}^{(\bullet)}_{\mathrm{dR}}\restriction_{\Omega^\bullet_{\mathrm{L}}(\mathrm{G})}\big)\ :\ \Omega^0_{\mathrm{L}}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathsf{d}^{(0)}_{\mathrm{CaE}}\equiv\mathsf{d}} \Omega^1_{\mathrm{L}}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathsf{d}^{(1)}_{\mathrm{CaE}}\equiv\mathsf{d}} \cdots \xrightarrow{\mathsf{d}^{(D-1)}_{\mathrm{CaE}}\equiv\mathsf{d}} \Omega^D_{\mathrm{L}}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathsf{d}^{(d)}_{\mathrm{CaE}}\equiv 0} \mathbf{0}\,,$$

zwaną **kohomologią Cartana–Eilenberga grupy Liego** G,

$$\mathrm{CaE}^\bullet(\mathrm{G}) \equiv H^\bullet_{\mathrm{dR,L}}(\mathrm{G},\mathbb{R})\,.$$

Kohomologia ta odgrywa istotną rolę w konstrukcji teorii pola z nieliniowo zrealizowaną symetrią wprowadzonej przed laty przez Weinberga i Schwingera w kontekście efektywnej teorii pola (np. w układach ze spontanicznie naruszoną symetrią), a rozwiniętej przez Salama, Strathdee'ego, Colemana, Callana, Wessa, Ishama i wielu innych.

2. Kohomologia Cartana–Eilenberga a rozszerzenia algebr Liego

Ażeby odpowiedzieć sobie na zadane pytanie, przeformułujemy to ostatnie w terminach czysto algebraicznych, przeszedłszy do stycznej $\mathsf{T}_e\mathrm{G}$. Zanim to jednak uczynimy, poddamy nasze dotychczasowe rozważania kohomologiczne, odniesione bezpośrednio do geometrii rozmaitości, więc intuicyjne, prostej abstrakcji, która poddaje się naturalnemu uogólnieniu. Oto więc mamy do czynienia z odwzorowaniem $\mathbb{R}$-liniowym

$$D.\ :\ \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{Der}\big(C^\infty(M;\mathbb{R})\big)\ :\ \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V} \lrcorner\, \mathsf{d} \equiv \mathscr{L}_{\mathcal{V}} =: D_{\mathcal{V}}$$

(stopień gładkości w zapisie przestrzeni różniczkowań nie ma znaczenia, o ile tylko jest ≥ 1) spełniającym strukturalną tożsamość

$$\big[D_{\mathcal{V}_1}, D_{\mathcal{V}_2}\big] \equiv \mathscr{L}_{\mathcal{V}_1}\circ\mathscr{L}_{\mathcal{V}_2} - \mathscr{L}_{\mathcal{V}_2}\circ\mathscr{L}_{\mathcal{V}_1} = \mathscr{L}_{[\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2]_{\mathfrak{X}(M)}} \equiv D_{[\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2]_{\mathfrak{X}(M)}}\,,$$

która czyni zeń homomorfizm $\mathbb{R}$-algebr Liego. W tym języku k-formy różniczkowe traktujemy jako odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe

$$\Omega^k(M)\ :\ \bigwedge^k \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M;\mathbb{R})\,, \tag{1}$$

a operator kobrzegu de Rhama (różniczki zewnętrznej) zadający odnośną kohomologię możemy *zdefiniować* określając wprost jego działanie na przestrzeni funkcji gładkich (czyli 0-form)

$$\mathsf{d}^{(0)}_{\mathrm{dR}}\ :\ C^\infty(M;\mathbb{R}) \equiv \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M)\ :\ f \longmapsto D.(f)\,,$$

$$D.(f) \;:\; \bigwedge^1 \mathfrak{X}(M) \equiv \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M;\mathbb{R}) \;:\; \mathcal{V} \longmapsto D_{\mathcal{V}}(f)\,,$$

a następnie *rozszerzając jego definicję* na formy wyższego stopnia przy użyciu tożsamości Cartana, w której obok powyższego homomorfizmu $D.$ pojawia się nawias Liego na $\mathfrak{X}(M)$. Takie nieco bardziej abstrakcyjne spojrzenie na dobrze już zrozumiane struktury algebraiczno-różniczkowe pozwala nam uczynić pierwszy krok w kierunku interpretacji kohomologii niezmienniczej (Cartana–Eilenberga) w dwóch poniższych definicjach.

Definicja 1. Niechaj $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ będzie $\mathbb{K}$-algebrą Liego wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} \equiv D$. **$\mathfrak{g}$-moduł** to para $(V, \rho.)$ złożona z przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V oraz homomorfizmu algebr Liego[1]

$$\rho. \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \;:\; X \longmapsto \rho_X\,,$$

tj. odwzorowania spełniającego warunek

$$\forall_{X,Y\in\mathfrak{g}} \;:\; [\rho_X, \rho_Y] \equiv \rho_X \circ \rho_Y - \rho_Y \circ \rho_X = \rho_{[X,Y]}\,,$$

które zadaje **realizację algebry Liego $\mathfrak{g}$ na przestrzeni wektorowej** V (zwyczajowo oznaczaną tym samym symbolem)

$$\rho. \;:\; \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V \;:\; (X, v) \longmapsto \rho_X(v) \equiv X \triangleright v\,.$$

Nawias Liego na $\mathfrak{g}$ można też rozumieć jako odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\mathrm{ad}. \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \;:\; X \longmapsto [X,\cdot]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}_X\,,$$

które indukuje na $\mathfrak{g}$ rodzinę **różniczkowań**[2] skośnego iloczynu $\mathrm{m}_{\mathfrak{g}} \equiv [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \;:\; \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ indeksowaną przez $\mathfrak{g} \ni X$, o czym zaświadcza tożsamość Leibniza (w tej roli objawia się nam tożsamość Jacobiego)

$$\forall_{Y,Z\in\mathfrak{g}} \;:\; \mathrm{ad}_X\big(\mathrm{m}_{\mathfrak{g}}(Y,Z)\big) = \mathrm{m}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{ad}_X(Y), Z\big) + \mathrm{m}_{\mathfrak{g}}\big(Y, \mathrm{ad}_X(Z)\big)\,.$$

Istotnie, jeśli także przestrzeń $\mathbb{R}$-liniową $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ potraktujemy jako $\mathbb{R}$-algebrę z iloczynem skośnym $\mathrm{m}_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})} \equiv [\cdot,\cdot] \;:\; \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, to stwierdzimy nilpotentność (stopnia 2) operatorów różniczkowania,

$$\mathrm{m}_{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_X) = \mathrm{ad}_{[X,X]_{\mathfrak{g}}} = 0\,.$$

Powyższe pozwala stowarzyszyć z parą $(V, \rho.)$ naturalny kompleks (ko)łańcuchów i kohomologię, o których mówi

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowe oznaczenia i niechaj $(V, \rho.)$ będzie $\mathfrak{g}$-modułem w sensie Def. 1. **p-kołańcuch na $\mathfrak{g}$ o wartościach w** V to odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\underset{p}{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}^{\times p}, V)$, które jest całkowicie skośne

$$\forall_{X_1, X_2, \ldots, X_p \in\mathfrak{g},\ \sigma\in\mathfrak{S}_p} \;:\; \underset{p}{\varphi}\big(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}\big) = \mathrm{sign}(\sigma)\, \underset{p}{\varphi}(X_1, X_2, \ldots, X_p)\,.$$

Zbiór[3]

$$C^p(\mathfrak{g}; V) \equiv \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathbb{K}} V$$

takich odwzorowań jest grupą przemienną (z operacją binarną zdefiniowaną punktowo), zwaną **grupą p-kołańcuchów na $\mathfrak{g}$ o wartościach w** V, przy czym przyjmujemy konwencję, w

[1] Struktura algebry (Liego) na $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, do której odnosi się definicja, jest współokreślana przez komutator endomorfizmów.

[2] Warto przy tej okazji odnotować, że nawias Liego bywa różniczkowaniem zasadniczo *różnych* struktur algebry na danej przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej. Jest tak np. w fizykalnie nader istotnym przypadku przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $C^\infty(P,\mathbb{R})$ funkcji gładkich na przestrzeni stanów P układu fizycznego, wyposażonej w dwie struktury $\mathbb{R}$-algebry: z iloczynem punktowym jako operacją binarną oraz z nawiasem Poissona w tej samej roli. Tenże nawias Poissona jest różniczkowaniem $\mathbb{R}$-algebry $C^\infty(P,\mathbb{R})$ względem *obu* struktur, przy czym zazwyczaj podkreśla się tę jego własność w odniesieniu do pierwszej z nich, odróżniając spełnianą przezeń tożsamość Leibniza od tożsamości Jacobiego. W świetle naszych obserwacji obie tożsamości mają ten sam status – są tożsamościami Leibniza.

[3] Patrz: (1), przy czym należy pamiętać o konsekwencjach nieskończonego wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $\mathfrak{X}(M)$.

której $C^0(\mathfrak{g};V) \equiv V$. Indeksowana przez $\overline{0,D} \ni p$ rodzina grup kołańcuchów tworzy kompleks (ko)łańcuchowy

$$\left(C^\bullet(\mathfrak{g};V),\delta_{\mathfrak{g}}^{(\bullet)}\right) \,:\, C^0(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(0)}} C^1(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(1)}} \cdots \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(D-1)}} C^D(\mathfrak{g};V) \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{g}}^{(D)}\equiv 0} \mathbf{0}$$

o **operatorach kobrzegu**

$$\delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} \,:\, C^p(\mathfrak{g};V) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g};V)\,, \qquad \delta_{\mathfrak{g}}^{(p+1)} \circ \delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} = 0\,, \quad p \in \overline{0,D-1}$$

danych wzorami (zapisanymi dla dowolnych $X_i \in \mathfrak{g}$, $i \in \overline{0,p}$ i $\underset{k}{\varphi} \in C^k(\mathfrak{g};V)$, $k \in \{0, p>0\}$)

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathfrak{g}}^{(0)} \underset{0}{\varphi}(X_0) &= X_0 \triangleright \underset{0}{\varphi}\,,\\
\delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} \underset{p}{\varphi}(X_0,X_1,\ldots,X_p) &= \sum_{l=0}^{p} (-1)^l\, X_l \triangleright \underset{p}{\varphi}(X_0,X_1,\underset{\widehat{l}}{\ldots},X_p)\\
&\quad + \sum_{m<n=1}^{p} (-1)^{m+n}\, \underset{p}{\varphi}([X_m,X_n]_{\mathfrak{g}},X_0,X_1,\underset{\widehat{m,n}}{\ldots},X_p)\,.
\end{aligned}$$

Grupa homologii powyższego kompleksu

$$H^0(\mathfrak{g};V) = Z^0(\mathfrak{g};V)\,, \qquad H^{p+1}(\mathfrak{g};V) \equiv Z^{p+1}(\mathfrak{g};V)/B^{p+1}(\mathfrak{g};V)\,, \quad p \in \overline{0,\dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{g}-1}\,,$$

w której zapisie

$$Z^{p+1}(\mathfrak{g};V) \equiv \operatorname{Ker}\delta_{\mathfrak{g}}^{(p+1)}$$

to **grupa $(p+1)$-kocykli na algebrze $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{g}$-module** V, a

$$B^{p+1}(\mathfrak{g};V) \equiv \operatorname{Im}\delta_{\mathfrak{g}}^{(p)}$$

to **grupa $(p+1)$-kobrzegów na algebrze $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{g}$-module** V, nosi miano **$(p+1)$-tej grupy kohomologii algebry Liego $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{g}$-module** V. Suma prosta

$$H^\bullet(\mathfrak{g};V) = \bigoplus_{p=0}^{\dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{g}} H^p(\mathfrak{g};V)$$

tych grup określa **kohomologię algebry Liego $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{g}$-module** V.

W szczególnym przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i trywialnego działania $\rho_{\cdot} \equiv 0$ mówimy o (**grupach**) **kohomologii Chevalleya–Eilenberga algebry Liego** $\mathfrak{g}$,

$$\mathrm{CE}^\bullet(\mathfrak{g}) \equiv H^\bullet_{(\rho_{\cdot}=0)}(\mathfrak{g};\mathbb{R})\,.$$

Uwzględniwszy wszystkie nasze dotychczasowe ustalenia, bez trudu stwierdzamy

Stwierdzenie 2. Istnieje kanoniczny izomorfizm

$$\mathrm{CaE}^\bullet(\mathrm{G}) \cong \mathrm{CE}^\bullet(\mathfrak{g})\,.$$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że każda forma LI na grupie Liego G jest w pełni określona przez swą wartość w e, w którym to punkcie staje się elementem $\bigwedge^p \mathsf{T}_e^*\mathrm{G} \equiv \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ właśnie. □

W powyższym stwierdzeniu dokonuje się transkrypcja struktury różniczkowo-geometrycznej, jaką jest niezmiennicza wersja kohomologii de Rhama, na język czysto algebraiczny, w którym wyraża się kohomologia algebry Liego. Transkrypcja ta prowadzi do strukturalnej (algebraicznej) interpretacji kohomologii Cartana–Eilenberga w terminach struktur rozszerzających – w sposób, który zilustrujemy poniżej na przykładzie $\mathrm{CaE}^2(\mathrm{G})$ – wyjściowy obiekt algebraiczny $\mathfrak{g}$. Po jej wyprowadzeniu pojawia się naturalne pytanie o „wersję odcałkowaną" do poziomu stosownego „rozszerzenia grupy" G. Okazuje się, że taka transkrypcja odwrotna jest co do zasady możliwa na gruncie Trzeciego Twierdzenia Liego oraz konstrukcji wiązki głownej o grupie strukturalnej U(1) (wzgl. ich strukturalnych uogólnień). Nie bedzięmy jej rozpatrywać w ogólności, w dalszej zaś części wykładu skupimy się na nader często w rozważaniach fizykalnych napotykanej grupie $\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g})$. W jej przypadku odcałkowanie – ilekroć jest możliwe – prowadzi do tzw. rozszerzeń centralnych grupy G, z którymi Czytelnik mógł się spotkać w kontekście podnoszenia symetrii sztywnych teorii klasycznej do jej przestrzeni Hilberta, a które są opisywane przez **krótkie ciągi dokładne grup Liego**

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{A} \xrightarrow{I_{\mathrm{A}}} \widetilde{\mathrm{G}} \xrightarrow{\Pi_{\mathrm{G}}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathbf{1}$$

zapisywane w terminach wyjściowej grupy G, będącej jej rozszerzeniem grupy $\widetilde{\mathrm{G}}$ (odwzorowywanej na tę pierwszą przez *epi*morfizm Π_{G}) oraz grupy *przemiennej* A (odwzorowywanej w **centrum grupy** $\mathscr{Z}(\widetilde{\mathrm{G}}) = \{\ g \in \mathrm{G} \ \mid\ \forall_{h \in \mathrm{G}}\ :\ g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} = e\ \}$ przez *mono*morfizm I_{A}) występującej w roli włókna rozszerzenia ($\mathrm{Ker}\,\Pi_{\mathrm{G}} = \mathrm{Im}\,I_{\mathrm{A}}$). Zrozumienie informacji algebraicznej zakodowanej w tej grupie wymaga zastąpienia struktur grupowych ich infinitezymalnymi (stycznościowymi) odpowiednikami, przy czym (Lie-)grupowa operacja binarna przechodzi w (Lie-)algebraiczną operację binarną, czyli nawias Liego. Precyzyjnej formalizacji tego schematu dostarcza

Definicja 3. Niechaj $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ będzie algebrą Liego (nad $\mathbb{R}$) i niech $(\mathfrak{a}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{a}} \equiv 0)$ będzie *komutatywną* algebrą Liego (nad $\mathbb{R}$). **Rozszerzenie centralne algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$** to trójka $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \jmath_{\mathfrak{a}}, \pi_{\mathfrak{g}})$ złożona z

- algebry Liego $(\widetilde{\mathfrak{g}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$;
- homomorfizmów algebr Liego: $\jmath_{\mathfrak{a}}\ :\ \mathfrak{a} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ oraz $\pi_{\mathfrak{g}}\ :\ \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g}$

tworzących krótki ciąg dokładny algebr Liego

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\jmath_{\mathfrak{a}}} \widetilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbf{0} \tag{2}$$

i takich, że $\jmath_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, gdzie

$$\mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}}) = \{\ X \in \widetilde{\mathfrak{g}} \ \mid\ \forall_{Y \in \widetilde{\mathfrak{g}}}\ :\ [X, Y]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = 0\ \}$$

jest **centrum algebry Liego**[4] $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Rozszerzenie nazywamy **rozszczepionym**, ilekroć epimorfizm $\pi_{\mathfrak{g}}$ ma cięcie w $\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}$, tj. istnieje homomorfizm algebr Liego

$$\sigma\ :\ \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$$

o własności

$$\pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\,. \tag{3}$$

Mówimy wówczas także, że krótki ciąg dokładny stowarzyszony z rozszerzeniem **rozszczepia się**.

Równoważność między rozszerzeniami $(\widetilde{\mathfrak{g}}_A, \jmath^A_{\mathfrak{a}}, \pi^A_{\mathfrak{g}})$, $A \in \{1, 2\}$ **algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez** $\mathfrak{a}$ to izomorfizm algebr Liego

$$\iota\ :\ \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathfrak{g}}_2$$

domykający diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{a} \arrow[r, "\jmath^1_{\mathfrak{a}}"] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \arrow[r, "\pi^1_{\mathfrak{g}}"] \arrow[d, "\iota"', "\cong"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{0} \arrow[d, equal] \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "\jmath^2_{\mathfrak{a}}"'] & \widetilde{\mathfrak{g}}_2 \arrow[r, "\pi^2_{\mathfrak{g}}"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}\,.$$

który będziemy zapisywać w postaci

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \arrow[dd, "\iota"', "\cong"] \arrow[dr, "\pi^1_{\mathfrak{g}}"] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \widehat{\mathfrak{a}} \arrow[ur, "\jmath^1_{\mathfrak{a}}"] \arrow[dr, "\jmath^2_{\mathfrak{a}}"'] & & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & & \widetilde{\mathfrak{g}}_2 \arrow[ur, "\pi^2_{\mathfrak{g}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

dla zaoszczędzenia e-inkaustu.

[4] Odpowiedniość między $\mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ i $\mathscr{Z}(\widetilde{\mathrm{G}})$ daje się łatwo uchwycić przy pomocy odwzorowania $\exp^{\widetilde{\mathrm{G}}}$.

Ostatnia definicja daje nam do ręki wygodne narzędzia do badania algebraicznego sensu kohomologii Cartana–Eilenberga. Odczytamy go z dwóch stwierdzeń, które ustalają zapowiadaną wcześniej odpowiedniość między klasami $H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ i rozszerzeniami centralnymi $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$. Podajemy je wraz z dość technicznymi dowodami, których wartość zasadza się na prostocie i konstruktywności, ta ostatnia zaś wytycza naturalny szlak ku „wersji odcałkowanej" – patrz: Uwaga 1. Zaczynamy od

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 3. Klasa równoważności rozszerzenia centralnego $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$ kanonicznie wyznacza klasę[5] w $H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$. Klasa ta jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy krótki ciąg dokładny stowarzyszony z rozszerzeniem rozszczepia się.

Dowód: Istnienie krótkiego ciągu dokładnego (2) implikuje istnienie odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego $\sigma\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}}$ spełniającego relację (3) (podprzestrzeń $\jmath_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})\subset\widetilde{\mathfrak{g}}$ ma dopełnienie proste), z czego wywodzimy istnienie (kanonicznego) izomorfizmu przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych

$$\iota\ :\ \widetilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\cong}\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}\ :\ \widetilde{X}\longmapsto\big(\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big(\widetilde{X}-\sigma\circ\pi_{\mathfrak{g}}(\widetilde{X})\big),\pi_{\mathfrak{g}}(\widetilde{X})\big)\,.$$

(Podkreślmy: Przeciwdziedzina ι *nie* jest *a priori* sumą prostą algebr Liego, tylko sumą prostą przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych.) W rzeczy samej, odwzorowanie to jest dobrze określone, jako że $\widetilde{X}-\sigma\circ\pi_{\mathfrak{g}}(\widetilde{X})\in\ker\pi_{\mathfrak{g}}=\mathrm{im}\,\jmath_{\mathfrak{a}}$, a $\jmath_{\mathfrak{a}}$ jest izomorfizmem na swój obraz. Odwrotność powyższego odwzorowania przyjmuje jawną postać

$$\iota^{-1}\ :\ \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}}\ :\ (A,X)\longmapsto\jmath_{\mathfrak{a}}(A)+\sigma(X)\,.$$

Możemy następnie podnieść ι do rangi izomorfizmu algebr Liego definiując na podprzestrzeni wektorowej $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}$ nawias Liego w terminach tych z $\widetilde{\mathfrak{g}}$ i $\mathfrak{g}$ wedle schematu

$$\begin{aligned}[(A_1,X_1),(A_2,X_2)]_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}} &:= \iota\big([\iota^{-1}(A_1,X_1),\iota^{-1}(A_2,X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)=\iota\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)\\ &= \Big(\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\circ\pi_{\mathfrak{g}}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)\big),\pi_{\mathfrak{g}}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big)\Big)\\ &= \Big(\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\big),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\Big)\,.\end{aligned}$$

Sensowność tej definicji jest zapewniona przez własności odwzorowania p-liniowego

$$\Theta_\sigma\ :\ \mathfrak{g}^{\times 2}\longrightarrow\mathfrak{a}\ :\ (X_1,X_2)\longmapsto\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\big([\sigma(X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\big)\,.$$

Oto bowiem ilekroć obliczymy je na parze elementów $\mathfrak{g}$, spełniona jest relacja

$$\Theta_\sigma(X_2,X_1)=-\Theta_\sigma(X_1,X_2)\,,$$

jest to zatem 2-kołańcuch na $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{a}$, przy czym ta ostatnia algebra objawia się tutaj w roli trywialnego $\mathfrak{g}$-modułu. Kobrzeg tego kołańcucha znika,

$$\begin{aligned}&\delta^{(2)}_{\mathfrak{g}}\Theta_\sigma(X_1,X_2,X_3)=-\Theta_\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}},X_3\big)-\Theta_\sigma\big([X_3,X_1]_{\mathfrak{g}},X_2\big)-\Theta_\sigma\big([X_2,X_3]_{\mathfrak{g}},X_1\big)\\ &=-\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\Big([\sigma\big([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big),\sigma(X_3)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\sigma\big([X_3,X_1]_{\mathfrak{g}}\big),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\sigma\big([X_2,X_3]_{\mathfrak{g}}\big),\sigma(X_1)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}-\sigma\circ\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\Big)\\ &=\jmath_{\mathfrak{a}}^{-1}\Big([\jmath_{\mathfrak{a}}\circ\Theta_\sigma(X_1,X_2),\sigma(X_3)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\jmath_{\mathfrak{a}}\circ\Theta_\sigma(X_3,X_1),\sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}+[\jmath_{\mathfrak{a}}\circ\Theta_\sigma(X_2,X_3),\sigma(X_1)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\\ &\qquad-\mathrm{Jac}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big(\sigma(X_1),\sigma(X_2),\sigma(X_3)\big)+\sigma\circ\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\Big)=0\,,\end{aligned}$$

gdzie to w ostatnim kroku przywołaliśmy inkluzję $\mathrm{im}\jmath_{\mathfrak{a}}\subset\mathfrak{z}(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Bez trudu weryfikujemy oczekiwaną własność indukowanego nawiasu Liego:

$$\mathrm{Jac}_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}}\big((A_1,X_1),(A_2,X_2),(A_3,X_3)\big)=\big(-\delta^{(2)}_{\mathfrak{g}}\Theta_\sigma(X_1,X_2,X_3),\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\big)=(0,0)\,,$$

stwierdzając na tej podstawie, że rozszerzenie centralne w istocie kanonicznie wyznacza 2-kocykl na $\mathfrak{g}$ o wartościach w $\mathfrak{a}$.

[5] W zapisie 2. grupy kohomologii algebra komutatywna algebra Liego $\mathfrak{a}$ występuje w roli przestrzeni wektorowej – formalnie rzecz ujmując, utożsamiamy $\mathfrak{a}$ z jej obrazem w kategorii $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ względem **funktora zapominania**. Taka dwoista rola $\mathfrak{a}$ jest nieunikniona – wszak z jednej strony krótki ciąg dokładny opisujący rozszerzenie jest diagramem w kategorii $\mathbf{LiaAlg}_{\mathbb{K}}$, z drugiej zaś – kohomologia przyjmuje wartości w przestrzeni wektorowej.

W następnej kolejności zbadamy, jak 2-kocykl ów zmienia się przy przejściu do równoważnego rozszerzenia centralnego. Mamy w tym wypadku do dyspozycji dwa monomorfizmy algebr Liego: $\jmath_{\mathfrak{a}}^A : \mathfrak{a} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}_A$, $A \in \{1,2\}$ i dwa epimorfizmy algebr Liego: $\pi_{\mathfrak{g}}^A : \widetilde{\mathfrak{g}}_A \longrightarrow \mathfrak{g}$ wraz z odnośnymi cięciami $\mathbb{K}$-liniowymi $\sigma_A : \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}_A$. Biorąc pod uwagę przemienność diagramu

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{\mathfrak{g}}_1 \arrow[dd, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathfrak{g}}^1"] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[ur, "\jmath_{\mathfrak{a}}^1"] \arrow[dr, "\jmath_{\mathfrak{a}}^2"'] & & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[ul, dashed, bend right, "\sigma_1"'] \arrow[dl, dashed, bend left, "\sigma_2"] & \mathbf{0} \\
 & & \widetilde{\mathfrak{g}}_2 \arrow[ur, "\pi_{\mathfrak{g}}^2"'] & &
\end{tikzcd} ,$$

wraz z tożsamością

$$\pi_{\mathfrak{g}}^1 \circ \left(\varepsilon^{-1} \circ \sigma_2 - \sigma_1 \right) = \pi_{\mathfrak{g}}^2 \circ \sigma_2 - \pi_{\mathfrak{g}}^1 \circ \sigma_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = 0 \,,$$

która przesądza o istnieniu odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego $\mu_\varepsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ o własności

$$\varepsilon^{-1} \circ \sigma_2 - \sigma_1 = \jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \mu_\varepsilon \,,$$

bez trudu stwierdzamy, dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ (\Theta_{\sigma_2} - \Theta_{\sigma_1})(X_1, X_2) &= \left(\varepsilon^{-1} \circ \jmath_{\mathfrak{a}}^2 \circ \Theta_{\sigma_2} - \jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \Theta_{\sigma_1} \right)(X_1, X_2) \\
= [\varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_1), \varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} &- [\sigma_1(X_1), \sigma_1(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} - \jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \\
= [\jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \mu_\varepsilon(X_1), \varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} &+ [\sigma_1(X_1), \varepsilon^{-1} \circ \sigma_2(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} - [\sigma_1(X_1), \sigma_1(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} \\
-\jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) &= [\sigma_1(X_1), \jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \mu_\varepsilon(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}_1} - \jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \\
&= -\jmath_{\mathfrak{a}}^1 \circ \mu_\varepsilon([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \,,
\end{aligned}$$

a stąd już wprost

$$\Theta_{\sigma_2} - \Theta_{\sigma_1} = \delta_{\mathfrak{g}}^{(1)} \mu_\varepsilon \,, \qquad \text{czyli} \qquad [\Theta_{\sigma_2}]_{\mathfrak{g}} = [\Theta_{\sigma_1}]_{\mathfrak{g}} \,.$$

Na zakończenie dowodzimy ostatniej części tezy. Znikanie (klasy) 2-kocyklu Θ_σ w przypadku, gdy σ jest cięciem w kategorii algebr Liego (a nie tylko w kategorii przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych), jest oczywiste, pozostaje zatem pokazać, że kohomologiczna trywialność Θ_σ implikuje istnienie cięcia w kategorii algebr Liego. Warunek trywialności 2-kocyklu Θ_σ możemy zgrabnie przepisać w postaci

$$[\sigma(X_1), \sigma(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = \sigma_\mu([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}) \,, \qquad \sigma_\mu := \sigma - \jmath_{\mathfrak{a}} \circ \mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{g}}) \,.$$

W świetle komutatywności $\jmath_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})$ to daje nam relację

$$[\sigma_\mu(X_1), \sigma_\mu(X_2)]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = \sigma_\mu\left([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}\right) ,$$

możemy zatem podnieść σ_μ do rangi homomorfizmu algebr Liego. Jako że ponadto spełniona jest tożsamość

$$\pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_\mu = \pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma - \pi_{\mathfrak{g}} \circ \jmath_{\mathfrak{a}} \circ \mu = \pi_{\mathfrak{g}} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \,,$$

rozpoznajemy w nim poszukiwane cięcie $\pi_{\mathfrak{g}}$. □

W następnym kroku zajmiemy się przyporządkowaniem odwrotnym.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3. Klasa w $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$ kanonicznie zadaje klasę równoważności rozszerzeń centralnych $(\widetilde{\mathfrak{g}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$. Rozszerzenia te rozszczepiają się wtedy i tylko wtedy, gdy klasa ta znika.

Dowód: Mając dany dowolny 2-kocykl $\Theta \in Z^2(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$, wyposażamy przestrzeń $\mathbb{K}$-liniową $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g} =: \widetilde{\mathfrak{g}}$ w jawnie skośne odwzorowanie dwuliniowe

$$[\cdot,\cdot]_\Theta \;:\; \widetilde{\mathfrak{g}}^{\times 2} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; \big((A_1,X_1),(A_2,X_2)\big) \longmapsto \big(\Theta(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\,.$$

Bez trudu sprawdzamy, że mamy do czynienia z nawiasem Liego,

$$\mathrm{Jac}_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big((A_1,X_1),(A_2,X_2),(A_3,X_3)\big) = \big(-\delta^{(2)}_{\mathfrak{g}}\Theta(X_1,X_2,X_3),\mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1,X_2,X_3)\big) = (0,0)\,,$$

przeto $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_\Theta)$ jest algebrą Liego.

Komutatywność $\mathfrak{a}$ przesądza o tym, że kanoniczna injekcja $\jmath_{\mathfrak{a}} \;:\; \mathfrak{a}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; A\longmapsto (A,0)$ jest monomorfizmem algebr Liego dla tak określonej struktury na $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Z kolei kanoniczny $\mathbb{K}$-liniowy rzut $\pi_{\mathfrak{g}} \;:\; \widetilde{\mathfrak{g}}\longrightarrow\mathfrak{g} \;:\; (A,X)\longmapsto X$ zyskuje teraz status epimorfizmu algebr Liego, o oczywistej własności $\ker\pi_{\mathfrak{g}} = \mathrm{im}\,\jmath_{\mathfrak{a}}$, na koniec więc otrzymujemy krótki ciąg dokładny algebr Liego

$$\mathbf{0}\longrightarrow\mathfrak{a}\xrightarrow{\jmath_{\mathfrak{a}}}\widetilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\pi_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbf{0}$$

który pozwala nam zidentyfikować $\widetilde{\mathfrak{g}}$ jako rozszerzenie centralne $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$.

W obecności dwóch kohomologicznych 2-kocykli: $\Theta_2 = \Theta_1 + \delta^{(1)}_{\mathfrak{g}}\mu$, $\mu\in C^1(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$, opisany powyżej schemat daje dwa nawiasy Liego na $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{g}$, czyli dwa rozszerzenia centralne algebry Liego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$, przy czym łatwo widać, że $\mathbb{K}$-liniowy automorfizm

$$\varepsilon_\mu \;:\; \widetilde{\mathfrak{g}}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; (A,X)\longmapsto\big(A-\mu(X),X\big)$$

izomorficznie odwzorowuje $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_{\Theta_1})$ w $(\widetilde{\mathfrak{g}},[\cdot,\cdot]_{\Theta_2})$,

$$\begin{aligned}[\varepsilon_\mu(A_1,X_1),\varepsilon_\mu(A_2,X_2)]_{\Theta_2} &= \big(\Theta_2(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big) = \big(\Theta_1(X_1,X_2)-\mu([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\\ &\equiv \varepsilon_\mu\big([(A_1,X_1),(A_2,X_2)]_{\Theta_1}\big)\,.\end{aligned}$$

Ilekroć Θ jest 2-kobrzegiem, $\Theta = \delta^{(1)}_{\mathfrak{g}}\mu$, $\mu\in C^1_0(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$, możemy włożyć $\mathfrak{g}$ w $\widetilde{\mathfrak{g}}$ przy użyciu odwzorowania $\mathbb{K}$-liniowego

$$\sigma_\mu \;:\; \mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; X\longmapsto\big(-\mu(X),X\big)$$

w oczywisty sposób będące $\mathbb{K}$-liniowym cięciem $\pi_{\mathfrak{g}}$ i podnoszące się do monomorfizmu algebr Liego,

$$\begin{aligned}[\sigma_\mu(X_1),\sigma_\mu(X_2)]_\Theta &= [(-\mu(X_1),X_1),(-\mu(X_2),X_2)]_\Theta = \big(\Theta(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\\ &= \big(-\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big) \equiv \sigma_\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right)\,.\end{aligned}$$

Krótki ciąg dokładny algebr Liego stowarzyszony z opisanym rozszerzeniem rozszczepia się.

I odwrotnie, dowolne cięcie $\pi_{\mathfrak{g}}$ w kategorii algebr Liego jest nieodzownie postaci

$$\sigma_\mu \;:\; \mathfrak{g}\longrightarrow\widetilde{\mathfrak{g}} \;:\; X\longmapsto\big(-\mu(X),X\big)$$

dla pewnego $\mu\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ o własności

$$\big(\Theta(X_1,X_2),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big) = [\sigma_\mu(X_1),\sigma_\mu(X_2)]_\Theta = \sigma_\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right) = \big(-\mu\left([X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\right),[X_1,X_2]_{\mathfrak{g}}\big)\,,$$

zatem $\Theta = \delta^{(1)}_{\mathfrak{g}}\mu$, zgodnie z tezą dowodzonego stwierdzenia. □

Nasze studium podsumowuje

Twierdzenie 1. Niechaj $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ będzie algebrą Liego. Istnieje kanoniczna bijekcja między $\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g})$ i zbiorem klas równoważności rozszerzeń centralnych $\mathfrak{g}$ przez $\mathbb{R}$. W obrazie tej bijekcji klasa trywialna $\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g})$ odpowiada klasie równoważności rozszerzenia rozszczepionego.

Przed przystąpieniem do egzemplifikacji powyższych abstrakcyjnych rozważań i ich umieszczeniem w kontekście fizykalnym poddamy nasz ostatni wynik reinterpretacji pozwalającej na wyrobienie sobie w odniesieniu do niego przydatnej intuicji (o istotnych konsekwencjach geometrycznych).

Uwaga 1. Istnienie rozszerzenia centralnego $\mathfrak{g}$ przez $\mathfrak{a}$ wyznaczanego przez Θ implikuje trywializację cofnięcia 2-kocyklu

$$\widetilde{\Theta} := \pi_{\mathfrak{g}}^* \Theta \ : \ \widetilde{\mathfrak{g}}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{a} \ : \ \big((A_1, X_1), (A_2, X_2)\big) \longmapsto \Theta(X_1, X_2)$$

opisaną wzorem

$$\widetilde{\Theta} = \delta_{\widetilde{\mathfrak{g}}}^{(1)} \widetilde{\mu}\,, \qquad \widetilde{\mu} := -\pi_{\mathfrak{a}} \ : \ \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{a} \ : \ (A, X) \longmapsto -A\,. \tag{4}$$

Tym sposobem nietrywialny 2-kocykl na wyjściowej algebrze $\mathfrak{g}$ znajduje swoją (kohomologiczną) trywializację na jej rozszerzeniu $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Skojarzenie z trywializacją 2-kocyklu de Rhama[6] (czyli 2-formy zamkniętej), takiego jak np. 2-forma Maxwella opisująca (w formacie jawnie lorentzowsko współzmienniczym) natężenie pola elektromagnetycznego, na przestrzeni totalnej wiązki liniowej (lub głównej) z powiązaniem o krzywiźnie tożsamej z tymże 2-kocyklem, jest w pełni usprawiedliwione i wiedzie wprost do systematycznego studium „całkowania" rozszerzeń centralnych algebr Liego, patrz: praca Tuynmana i Wiegenrincka [TW87].

3. Przykład poglądowy

Na pierwszy rzut oka rozszerzenia algebr mogą się wydawać strukturami dość egzotycznymi i ezoterycznymi. O ich powszechności i naturalności w ramach kanonicznego opisu symetrii ciągłych w mechanice klasycznej i teorii pola w terminach odnośnych ładunków Noether oraz w operatorowym opisie tychże symetrii w teorii kwantowej przekona uważnego Czytelnika każdy rzetelny kurs z tych dziedzin, w którym będą omawiane anomalie algebr ładunków i prądów symetrii w obecności – np. – ładunku topologicznego na obiektach elementarnych teorii fizycznej (naładowanych cząstkach punktowych, pętlach itp.), wzgl. rzutowych realizacji symetrii klasycznych na przestrzeni Hilberta układu fizycznego. Prostej ilustracji takiego fizykalnego scenariusza dostarcza poniższa dyskusja szczegółowa.

Przedmiotem naszego zainteresowania w niniejszym przykładzie są realizacje symetrii translacyjnej w prostych układach mechanicznych – zarówno w reżymie klasycznym, jak i kwantowym – w kontekście rozszerzeń centralnych algebr i grup Liego. Tytułem przygotowania do ich omówienia rozważmy komutatywną algebrę Liego o 4 generatorach

$$\mathfrak{t}(3) = \bigoplus_{\mu \in \{1,2,3\}} \langle P_i \rangle_{\mathbb{R}}$$

i nawiasach Liego

$$[P_i, P_j] = 0\,, \qquad i, j \in \{1,2,3\}\,,$$

czyli stycznościową algebrę Liego przemiennej grupy Liego translacji (w) $\mathbb{R}^{\times 3} \equiv \mathrm{T}(3)$ o operacji binarnej

$$\mathrm{m} \ : \ \mathrm{T}(3) \times \mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathrm{T}(3) \ : \ \big(x^i, y^i\big) \longmapsto \big(x^i + y^i\big)\,,$$

odwrotności

$$\mathrm{Inv} \ : \ \mathrm{T}(3) \circlearrowleft \ : \ \big(x^i\big) \longmapsto \big(-x^i\big)$$

i elemencie neutralnym

$$e = (0,0,0,0)\,.$$

Operacja binarna pozwala zdefiniować działanie lewe regularne grupy $\mathrm{T}(3)$ na sobie, dane wzorem

$$\ell_{\cdot} \ : \ \mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathrm{Diff}^\infty\big(\mathrm{T}(3)\big) \ : \ \big(x^i\big) \longmapsto \mathrm{m}\big(\big(x^i\big), \cdot\big) \equiv \big(x^i + \cdot\big) =: \ell_{(x^i)}\,,$$

do którego będziemy się odwoływać w dalszej części naszych rozważań.

Jednym z pytań, na które poszukamy odpowiedzi, jest wpływ ładunku niesionego przez obiekt fundamentalny układu mechanicznego na realizację rzeczonej symetrii translacyjnej w formalizmie

[6] W kontekście geometrycznym trywializacja 2-kocyklu $\mathrm{F} \in Z^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ wymaga jeszcze spełnienia warunku $\mathrm{Per}(\mathrm{F}) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ (w którego zapisie $\mathrm{Per}(\mathrm{F})$ jest grupą przemienną tzw. **okresów** 2-kocyklu F, czyli wyników jego całkowania po 2-cyklach homologicznych w M).

kanonicznym. Ujawnienie takiego wpływu wymaga obecności zewnętrznego pola elektromagnetycznego, którego naturalnym modelem matematycznym (uwzględniającym relatywistyczną niezmienniczość maxwellowskiej dynamiki) jest 2-kocykl de Rhama na przestrzeni konfiguracyjnej układu mechanicznego zdefiniowany w terminach natężenia pola elektrycznego oraz indukcji magnetycznej. Jako że celem naszym jest studium mechaniki nierelatywistycznej na cięciu stałego czasu, ograniczymy się do składowej przestrzenno-przestrzennej tegoż 2-kocyklu, którą identyfikujemy z polem indukcji magnetycznej. Niechaj zatem

$$(\omega_{ij} = -\omega_{ji}) \in \mathbb{R}(3)$$

będzie dowolną *niezerową* macierzą. Oznaczywszy elementy bazy $\mathfrak{t}(3)^* \cong \mathbb{R}^{\times 3}$ dualnej do $\{P_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$ jako $\pi^i,\ i \in \{1,2,3\}$,

$$\pi^i(P_j) = \delta^i{}_j\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,,$$

definiujemy 2-kołańcuch na $\mathfrak{t}(3)$ o wartościach w trywialnym $\mathfrak{t}(3)$-module $\mathbb{R}$ wzorem

$$\omega := \omega_{ij}\,\pi^i \wedge \pi^j \in C^2\big(\mathfrak{t}(3);\mathbb{R}\big)\,, \tag{5}$$

tj. dla dowolnej pary wektorów $X_A = X_A^i\,P_i \in \mathfrak{t}(3),\ A \in \{1,2\}$ mamy

$$\omega(X_1,X_2) = 2\omega_{ij}\,X_1^i\,X_2^j\,.$$

Bez trudu sprawdzamy zamkniętość ω licząc (dla dowolnych $X_B = X_B^i\,P_i \in \mathfrak{t}(3),\ B \in \{0,1,2\}$)

$$\begin{aligned}&\delta^{(2)}_{\mathfrak{t}(3)}\omega(X_0,X_1,X_2)\\ = \quad & -\omega\big(X_0^i\,X_1^j\,[P_i,P_j]_{\mathfrak{t}(3)},X_3\big) + \omega\big(X_0^i\,X_2^j\,[P_i,P_j]_{\mathfrak{t}(3)},X_1\big) - \omega\big(X_1^i\,X_2^j\,[P_i,P_j]_{\mathfrak{t}(3)},X_0\big) = 0\,.\end{aligned}$$

Mamy zatem do czynienia z 2-kocyklem Chevalleya–Eilenberga,

$$\omega \in Z^2\big(\mathfrak{t}(3);\mathbb{R}\big)\,.$$

Załóżmy, że jest to 2-kobrzeg, tj., że istnieje 1-kołańcuch $\theta \in C^1(\mathfrak{t}(3);\mathbb{R}) \equiv \mathfrak{t}(3)^*$ o własności

$$\omega = \delta^{(1)}_{\mathfrak{t}(3)}\theta\,,$$

która tłumaczy się na warunek

$$2\omega_{ij}\,X_1^i\,X_2^j = \omega(X_1,X_2) \stackrel{!}{=} \delta^{(1)}_{\mathfrak{t}(3)}\theta(X_1,X_2) = -\theta\big(X_1^i\,X_2^j\,[P_i,P_j]\big) = -\theta(0_{\mathfrak{t}(3)}) \equiv 0\,,$$

prowadzący do sprzeczności z założeniem o niezerowości ω. 2-kocykl ω definiuje zatem nietrywialną klasę

$$[\omega]_{\mathfrak{t}(3)} \in \mathrm{CE}^2\big(\mathfrak{t}(3)\big)\,,$$

więc także – w zgodzie z tezą Stw. 4 – rozszerzenie centralne

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\jmath_{\mathbb{R}}} \widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{t}(3)}} \mathfrak{t}(3) \longrightarrow \mathbf{0}\,. \tag{6}$$

W tym kontekście 2-kocykl ω będziemy określać mianem **2-kocyklu rozszerzenia** $\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega$. W świetle konstruktywnego dowodu Stw. 4 jako reprezentanta klasy równoważności takich rozszerzeń możemy przyjąć

$$\big(\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{t}(3), [\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega}\big)\,.$$

Oznaczywszy wektory bazowe w $\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega$ jako

$$Z := (1,0)\,, \qquad \widetilde{P}_i := (0,P_i)\,, \qquad i \in \{1,2,3\}\,,$$

dostajemy algebrę Liego

$$[\widetilde{P}_i,\widetilde{P}_j]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega} = 2\omega_{ij}\,Z\,, \qquad [\widetilde{P}_i,Z]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega} = 0_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega}\,, \qquad [Z,Z]_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega} = 0_{\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega}\,.$$

Bez trudu „całkujemy" powyższe rozszerzenie algebry Liego do rozszerzenia grupy Liego $\mathrm{T}(3)$ przez $\mathbb{R}$ opisywanego przez krótki ciąg dokładny grup Liego

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{I_{\mathbb{R}}} \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega \xrightarrow{\Pi_{\mathrm{T}(3)}} \mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathbf{1}\,, \tag{7}$$

w którego zapisie $I_{\mathbb{R}}$ i $\Pi_{\mathrm{T}(3)}$ są homomorfizmami grup Liego. W obecnych nader nieskomplikowanych okolicznościach moglibyśmy wręcz zgadnąć postać tego rozszerzenia, my jednak pójdziemy inną drogą, która pozwala powrócić do geometrycznego punktu wyjścia naszych rozważań, a przy tym okazuje się znajdować zastosowanie w okolicznościach dużo mniej oczywistych (np. w kontekście ładunkowych rozszerzeń (super)algebr Liego supersymetrii – patrz: praca [CdAIPB00]).

Zaczniemy od reinterpretacji powyższego zagadnienia i otrzymanego wyniku w terminach rachunku różniczkowego na grupie Liego $\mathbb{R}^{\times 3}$. Zaczynamy od komutatywnej algebry pól translacyjnie (lewo-)niezmienniczych na $\mathbb{R}^{\times 3}$, dla których bazą są pola

$$L_i \equiv L_{P_i} \equiv \partial_i\,, \qquad i \in \{1,2,3\}$$

o trywialnych komutatorach

$$[L_i, L_j] = 0\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,.$$

Dualną bazę przestrzeni 1-form translacyjnie (lewo-)niezmienniczych na $\mathbb{R}^{\times 3}$ tworzą 1-formy

$$\theta^i_{\mathrm{L}} = \mathsf{d}x^i\,, \qquad i \in \{1,2,3\}\,.$$

Odpowiednikiem 2-kocyklu ω jest tutaj 2-kocykl de Rhama

$$\Omega = \omega_{ij}\,\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^j\,,$$

jawnie translacyjnie (lewo-)niezmienniczy, lecz nieposidający 1-formy pierwotnej *o tej samej własności*. Istotnie, 1-forma taka musiałaby być postaci

$$\Theta = \Theta_i\,\mathsf{d}x^i\,, \qquad \Theta_i \in \mathbb{R}$$

($\mathbb{R}$-liniowa kombinacja bazowych 1-form translacyjnie (lewo-)niezmienniczych), co jednak doprowadziłoby nas do sprzeczności

$$0 \neq \Omega \overset{!}{=} \mathsf{d}\Theta = \partial_j\Theta_i\,\mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = 0\,.$$

Należy w tym momencie dobitnie podkreślić (rzecz oczywistą): 2-forma Ω *jest* dokładna w kohomologii de Rhama (trywialnej dla $\mathbb{R}^{\times 3}$) – ma np. 1-formę pierwotną

$$\vartheta(x) = \omega_{ij}\,x^i\,\mathsf{d}x^j\,,$$

nie jest natomiast dokładna w kohomologii (lewo)niezmienniczej.

W świetle Uwagi 1 możemy oczekiwać, że trywializacja w kohomologii Cartana–Eilenberga będzie możliwa dopiero po cofnięciu Ω na grupę Liego $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ o algebrze Liego $\widetilde{\mathfrak{t}(3)}_\omega$ otrzymanej uprzednio. Postać tej ostatniej każe nam podejrzewać, że jako zbiór grupa $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ będzie postaci[7] $\mathbb{R} \times \mathrm{T}(3)$, z kanonicznym rzutem

$$\Pi_{\mathrm{T}(3)} \equiv \mathrm{pr}_2 \;:\; \mathbb{R} \times \mathrm{T}(3) \longrightarrow \mathrm{T}(3)$$

jako epimorfizmem grup Liego współokreślającym rozszerzenie, przy czym pierwszy czynnik kartezjański będzie podgrupą przemienną (o algebrze Liego $\mathbb{R}$), a poszukiwana operacja binarna $\widetilde{\mathrm{m}}$ na $\mathbb{R} \times \mathrm{T}(3)$ będzie wprowadzać „poprawkę" do odnośnej operacji binarnej (dodawania) zależną od drugich składowych argumentów. Jak wyznaczyć $\widetilde{\mathrm{m}}$? Zauważmy po pierwsze, że *lewo*-$\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$-*niezmiennicza* 1-forma pierwotna $\widetilde{\Theta}$ dla $\Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\Omega$ spełnia tożsamość

$$\mathsf{d}\widetilde{\Theta} = \Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\Omega = \mathsf{d}\Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\vartheta \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{\Theta} - \Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\vartheta \in Z^1\big(\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega, \mathbb{R}\big)\,,$$

a ponieważ $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ w antycypowanej postaci także jest ściągalna, przeto

$$\widetilde{\Theta} = \mathsf{d}F + \Pi^*_{\mathrm{T}(3)}\vartheta$$

dla pewnej gładkiej funkcji $F \in C^\infty(\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega, \mathbb{R})$, przy czym w świetle Równ. (4), które identyfikuje $\widetilde{\Theta}$ jako 1-formę dualną do pola lewoniezmienniczego ∂_Z na przemiennej grupie Liego $\mathbb{R}$ (o kartezjańskiej współrzędnej globalnej Z) rozszerzającej $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$, oczekujemy tożsamości

$$\mathsf{d}F \equiv -\mathsf{d}Z\,.$$

[7]Rzecz jasna, nie ma *jedynej* grupy Liego odpowiadającej danej algebrze Liego $\mathbb{R}$. W naszych rozważaniach dokonujemy po prostu wyboru najprostszego.

Postulujemy zatem
$$\widetilde{\Theta}(Z,x) = -\mathsf{d}Z + \omega_{ij}\, x^i\, \mathsf{d}x^j\,.$$
Po drugie „zmienniczość" znalezionej przez nas 1-formy pierwotnej dla Ω względem lewych translacji na $\mathbb{R}^{\times 3}$ przybiera szczególnie prostą postać: oto poprawka do ϑ będąca wynikiem cofnięcia ϑ wzdłuż $\ell_{(\varepsilon^i)}$ dla *stałego* wektora $\varepsilon \equiv (\varepsilon^i) \in \mathbb{R}^{\times 3}$ jest 1-formą zamkniętą (to konstatacja niezależna od grupy Liego, na której rozpatrujemy kohomologię Cartana–Eilenberga),
$$\mathsf{d}\vartheta = \Omega = \ell_\varepsilon^*\Omega = \ell_\varepsilon^*\mathsf{d}\vartheta = \mathsf{d}\ell_\varepsilon^*\vartheta \qquad \Longrightarrow \qquad \ell_\varepsilon^*\vartheta - \vartheta \in Z^1\big(\mathrm{T}(3),\mathbb{R}\big)\,,$$
więc też dokładną w konsekwencji trywialności kohomologii de Rhama $\mathrm{T}(3)$,
$$\big(\ell_\varepsilon^*\vartheta - \vartheta\big)(x) = \mathsf{d}\big(\omega_{ij}\,\varepsilon^i\, x^j\big)\,.$$
To w połączeniu z wcześniejszym postulatem dotyczącym postaci $\widetilde{\Theta}$ pozwala *wyprowadzić* możliwą postać operacji binarnej $\widetilde{\mathrm{m}}$ z warunku niezmienniczości $\widetilde{\Theta}$ względem lewostronnych translacji na $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ indukowanych przez $\widetilde{\mathrm{m}}$ właśnie. Istotnie, jeśli zapiszemy
$$\widetilde{\ell}_{(0,\varepsilon)}\big(Z,x^i\big) \equiv \widetilde{\mathrm{m}}\big(\big(0,\varepsilon^i\big),\big(Z,x^i\big)\big) =: \big(\Phi(Z,x,\varepsilon),x^i+\varepsilon^i\big)\,,$$
uwzględniając po drodze homomorficzny charakter $\Pi_{\mathrm{T}(3)} \equiv \mathrm{pr}_2$, to z warunku lewoniezmienniczości $\widetilde{\Theta}$,
$$-\mathsf{d}\Phi(Z,x,\varepsilon) + \omega_{ij}\,\big(x^i+\varepsilon^i\big)\,\mathsf{d}x^j = \ell_{(0,\varepsilon)}^*\widetilde{\Theta}(Z,x) \stackrel{!}{=} \widetilde{\Theta}(Z,x) = -\mathsf{d}Z + \omega_{ij}\,x^i\,\mathsf{d}x^j\,,$$
odczytujemy (*modulo constans*)
$$\Phi(Z,x,\varepsilon) = Z + \omega_{ij}\,\varepsilon^i\,x^j\,,$$
co prowadzi nas do zapostulowania operacji binarnej na $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ w postaci
$$\widetilde{\mathrm{m}}\ :\ \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega \times \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega \longrightarrow \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega\ :\ \big(\big(Z_1,x_1^i\big),\big(Z_2,x_2^j\big)\big) \longmapsto \big(Z_1+Z_2+\omega_{mn}\,x_1^m\,x_2^n,x_1^i+x_2^i\big)\,.$$
Pozostaje jeszcze tylko sprawdzić, że tak określona operacja binarna jest łączna. O tym, że tak jest w istocie, przekonuje bezpośredni rachunek – z jednej strony:
$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{m}}\big(\widetilde{\mathrm{m}}\big(\big(Z_1,x_1^i\big),\big(Z_2,x_2^j\big)\big),\big(Z_3,x_3^\rho\big)\big) &= \widetilde{\mathrm{m}}\big(\big(Z_1+Z_2+\omega_{mn}\,x_1^m\,x_2^n,x_1^i+x_2^i\big),\big(Z_3,x_3^\rho\big)\big)\\ &= \big(Z_1+Z_2+\omega_{mn}\,x_1^m\,x_2^n+Z_3+\omega_{mn}\,\big(x_1^m+x_2^m\big)\,x_3^n,x_1^i+x_2^i+x_3^i\big)\,,\end{aligned}$$
z drugiej zaś:
$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{m}}\big(\big(Z_1,x_1^i\big),\widetilde{\mathrm{m}}\big(\big(Z_2,x_2^j\big),\big(Z_3,x_3^\rho\big)\big)\big) &= \widetilde{\mathrm{m}}\big(\big(Z_1,x_1^i\big),\big(Z_2+Z_3+\omega_{mn}\,x_2^m\,x_3^n,x_2^j+x_3^j\big)\big)\\ &= \big(Z_1+Z_2+Z_3+\omega_{mn}\,x_2^m\,x_3^n+\omega_{mn}\,x_1^m\,\big(x_2^n+x_3^n\big),x_1^i+x_2^i+x_3^i\big)\,.\end{aligned}$$
Rekonstrukcję krótkiego ciągu dokładnego grup Liego (7) „odcałkowującego" wyjściowy krótki ciąg dokładny algebr Liego (6) uzupełniamy dokonując identyfikacji monomorfizmu
$$I_\mathbb{R}\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega\ :\ r \longmapsto (r,0)\,.$$
Na tym etapie mamy już nie tylko rozszerzenie centralne grupy $\mathrm{T}(3)$, ale także – lewoniezmienniczą bazę wiązki kostycznej $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$:
$$\widetilde{\Theta}(Z,x) = -\mathsf{d}Z + \omega_{ij}\,x^i\,\mathsf{d}x^j \qquad , \qquad \widetilde{\theta}^i_{\mathrm{L}}(Z,x) = \mathsf{d}x^i\,, \qquad i \in \{0,1,2,3\}\,.$$
W uzupełnieniu roztrząsań różniczkowo-geometrycznych wyznaczamy bazę lewoniezmienniczą wiązki stycznej $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\omega$ (w tym – podniesienia pól lewoniezmienniczych z $\mathrm{T}(3)$), do której ta powyżej jest dualną:
$$L_Z(Z,x) = \tfrac{\partial}{\partial Z}\,, \qquad L_{\widetilde{P}_i}(Z,x) = \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \omega_{ij}\,x^j\,\tfrac{\partial}{\partial Z}\,, \qquad i \in \{0,1,2,3\}\,.$$
W bazie tej spełnione są oczekiwane relacje komutacji
$$\big[L_{\widetilde{P}_i},L_{\widetilde{P}_j}\big] = 2\omega_{ij}\,L_Z\,, \qquad \big[L_{\widetilde{P}_i},L_Z\big] = 0\,, \qquad \big[L_Z,L_Z\big] = 0\,.$$

Na zakończenie niniejszego studium przypadku wskażemy kontekst fizykalny, w którym realizowany jest powyższy scenariusz algebro-geometryczny. Punktem wyjścia jest tutaj lagranżjan (nierelatywistycznej) cząstki punktowej o masie m poruszającej się w metryce $\delta_{\rm E} = \delta_{ij}\,{\sf d}x^i \otimes {\sf d}x^j$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{\times 3}$, dany w postaci

$$L(x,\dot{x}) = \tfrac{m}{2}\,\delta_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j\,.$$

Wyprowadzamy z niej formułę na pęd *kinetyczny*

$$\mathrm{p} = p_i\,{\sf d}x^i\,, \qquad p_i = \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \delta_{ij}\,m\,\dot{x}^j\,.$$

W opisie kanonicznym teorii znajdujemy nawiasy Poissona

$$\{x^i, p_j\}_\Omega = \delta^i{}_j\,, \qquad \{x^i, x^j\}_\Omega = 0\,, \qquad \{p_i, p_j\}_\Omega = 0\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,, \tag{8}$$

których postać wynika wprost z postaci (Darboux) formy presymplektycznej

$$\Omega(x,p) = {\sf d}p_i \wedge {\sf d}x^i$$

modelu, otrzymanej zeń np. w formalizmie pierwszego rzędu. Warto tu w szczególności zwrócić baczną uwagę na komutatywną algebrę (Poissona) pędów kinetycznych:

$$\{p_i, p_j\}_\Omega = 0\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,.$$

Pola hamiltonowskie na przestrzeni stanów układu fizykalnego ${\sf T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ sparametryzowanej przez pary (x^μ, p_j) (dane Cauchy'ego trajektorii klasycznej) stowarzyszone z tymi pędami to

$$\mathcal{V}_{p_i} = \tfrac{\partial}{\partial x^i}\,, \qquad \mathcal{V}_{p_i} \lrcorner\, \Omega = -{\sf d}p_i\,, \qquad i \in \{1,2,3\}\,.$$

Przechodząc do lagranżjanu (nierelatywistycznej) cząstki punktowej o masie m i ładunku elektrycznym q poruszającej się w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{\times 3}$ w metryce $\delta_{\rm E}$ i *stałym* polu magnetycznym $\mathrm{B} = B^i\,\partial_i$ o potencjale wektorowym $\mathrm{A} = A^i\,\partial_i$, $A^i(x) = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{jk}{}^i\,x^j\,B^k$,

$$L(x,\dot{x}) = \tfrac{m}{2}\,\delta_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j + q\,\delta_{ij}\,A^i(x)\,\dot{x}^j\,,$$

znajdujemy – obok wprowadzonego wcześniej pędu kinetycznego

$$\mathrm{p} = m\,\delta_{ij}\,\dot{x}^j\,{\sf d}x^i \equiv p_i\,{\sf d}x^i\,,$$

także pęd *kanoniczny*

$$\pi = \pi_i\,{\sf d}x^i\,, \qquad \pi_i = \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \delta_{ij}\,\big(m\,\dot{x}^j + qA^j(x)\big)\,.$$

Forma presymplektyczna to tym razem

$$\Omega_{\rm F}(x,p) = {\sf d}\pi_i \wedge {\sf d}x^i = {\sf d}p_i \wedge {\sf d}x^i + q\,\mathrm{F}\,, \qquad \mathrm{F} \equiv \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,B^i\,{\sf d}x^j \wedge {\sf d}x^k =: f_{ij}\,{\sf d}x^i \wedge {\sf d}x^j\,.$$

Parametryzując przestrzeń stanów układu fizykalnego tak jak poprzednio, czyli parami (x^i, p_i) (zamiast parami kanonicznie sprzężonymi (x^i, π_i)), wyznaczamy bez trudu elementarne pola hamiltonowskie:

$$\mathcal{V}_{x^i}(x,p) = -\tfrac{\partial}{\partial p_i}\,, \qquad \mathcal{V}_{x^i} \lrcorner\, \Omega_{\rm F} = -{\sf d}x^i\,,$$

$$\mathcal{V}_{p_i}(x,p) = \tfrac{\partial}{\partial x^i} - 2q\,f_{ij}\,\tfrac{\partial}{\partial p_j}\,, \qquad \mathcal{V}_{p_i} \lrcorner\, \Omega_{\rm F} = -{\sf d}p_i$$

oraz odnośne nawiasy Poissona

$$\{x^i, p_j\}_{\Omega_{\rm F}} = \delta^i{}_j\,, \qquad \{x^i, x^j\}_{\Omega_{\rm F}} = 0\,, \qquad \{p_i, p_j\}_{\Omega_{\rm F}} = 2q\,f_{ij}\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,. \tag{9}$$

Zauważmy, że w ograniczeniu do podalgebr w odnośnych algebrach Liego–Poissona

$$\big(C^\infty({\sf T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R}), \{\cdot,\cdot\}_\Omega\big) \qquad \text{vs} \qquad \big(C^\infty({\sf T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R}), \{\cdot,\cdot\}_{\Omega_{\rm F}}\big)$$

generowanych przez pędy kinetyczne włączenie stałego pola magnetycznego B możemy zinterpretować jako omówione wcześniej rozszerzenie (na poziomie liniowym w generatorach)

$$\mathfrak{t}(3) \xrightarrow{\ \omega\ } \widetilde{\mathfrak{t}(3)}_{\rm F}\,, \qquad \omega_{ij} \equiv f_{ij}\,,$$

w którym dodatkowym generatorem jest… ładunek elektryczny cząstki,

$$L_Z = \jmath_{\mathbb{R}}(1) \equiv q\,!$$

Ten sposób myślenia o „ładunkach” niesionych przez cząstki okazuje się być niezwykle naturalny, uniwersalny i płodny – patrz: np. praca Gauntletta, Gomisa i Townsenda [GGT90].

Na obecnym etapie pozostaje jeszcze odpowiedzieć na pytanie o fizykalną realizację znalezionego wcześniej grupowego wariantu rozszerzenia (7). Okazuje się, że ten jest związany z pewnym wyróżnionym schematem kwantowania opisanego modelu fizykalnego, którego elementy omówimy poniżej. Zaczniemy od kanonicznego skwantowania relacji (8), tj. wskazania ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i operatorowej realizacji na niej (w terminach operatorów samosprzężonych) algebry Heisenberga

$$[\widehat{x}^i, \widehat{p}_j] = \mathsf{i}\,\hbar\,\delta^i{}_j\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,, \qquad [\widehat{x}^i, \widehat{x}^j] = 0\,, \qquad [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\}\,.$$

Jak powszechnie wiadomo (choćby z kursu Mechaniki kwantowej I), realizacji takiej dostarcza przestrzeń Hilberta $L^2(\mathbb{R}^3, \mathsf{d}^3x)$ funkcji (zespolonych) na $\mathbb{R}^3$ całkowalnych z kwadratem (względem standardowej miary Lebesgue'a) – realizacja ta przyjmuje znajomą prostą postać:

$$\widehat{x}^i \equiv x^i\,, \qquad \widehat{p}_i = -\mathsf{i}\,\hbar\,\tfrac{\partial}{\partial x^i}\,, \qquad i \in \{1,2,3\}\,.$$

To kwantowomechaniczny elementarz (choć same operatory $\widehat{x}^i$ i $\widehat{p}_j$ okazują się być dość narowiste). Pytanie brzmi: Jak zrealizować algebrę

$$[\widehat{x}^i, \widehat{p}_j] = \mathsf{i}\,\hbar\,\delta^i{}_j\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,, \qquad [\widehat{x}^i, \widehat{x}^j] = 0\,, \qquad [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 2\mathsf{i}\,\hbar\,q\,f_{ij}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\,, \qquad i,j \in \{1,2,3\} \tag{10}$$

otrzymaną w wyniku kanonicznego skwantowania relacji (9) w obecności ładunku elektrycznego (i zewnętrznego pola magnetycznego)? I czy ma to cokolwiek wspólnego z rozszerzeniem $\widetilde{\mathrm{T}(3)}$? Konstruktywnej odpowiedzi na pierwsze z tych pytań i zarazem pozytywnej odpowiedzi na drugie z nich dostarcza schemat kwantowania rozwinięty przez Kostanta i Souriau[8], który określamy mianem kwantowania geometrycznego. Na zakończenie niniejszych notatek zaprezentujemy jedynie jego wynik w rozważanym modelu fizykalnym, zastępując przy tym addytywną grupę $\mathbb{R}$ rozszerzenia $\widetilde{\mathrm{T}(3)}$ nad bazą $\mathbb{R}^{\times 3}$ multyplikatywną grupą okręgu $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$, co daje nam (po dodatkowej, trywialnej transpozycji składników kartezjańskich) rozszerzenie

$$\pi \equiv \mathrm{pr}_1 \;:\; \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega := \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \tag{11}$$

z działaniem binarnym

$$\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \times \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \longrightarrow \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \;:\; \big((x_1^i, u_1), (x_2^i, u_2)\big) \longmapsto \big(x_1^i + x_2^i, u_1 \cdot u_2 \cdot \mathrm{e}^{2\mathsf{i}\,\omega_{mn}\,x_1^m\,x_2^n}\big) \tag{12}$$

i indukowanym przezeń działaniem (lewym) $\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega$ na sobie

$$\begin{aligned} \lambda^\omega_\cdot \quad &: \quad \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \times \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \longrightarrow \widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega \\ &: \quad \big((\varepsilon^i, \zeta), (x^i, z)\big) \longmapsto \big(x^i + \varepsilon^i, z \cdot \zeta \cdot \mathrm{e}^{2\mathsf{i}\,\omega_{mn}\,\varepsilon^m\,x^n}\big) \equiv \lambda_{(\varepsilon,\zeta)}(x, z)\,. \end{aligned}$$

Tak przygotowani możemy już przystąpić do konstrukcji operatorowej realizacji algebry (10). Tej dostarczają po raz kolejny funkcje (zespolone) na $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^3$ całkowalne z kwadratem (i odpowiednio spolaryzowane – np. w polaryzacji/„reprezentacji” pędowej), na których tym razem zadajemy operatory

$$\widehat{x}^i(x,p) = \mathsf{i}\hbar\,\tfrac{\partial}{\partial p_i}\,, \qquad \widehat{p}_i(x,p) = -\mathsf{i}\hbar\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} - q\,\epsilon_{ijk}\,B^k\,\tfrac{\partial}{\partial p_j}\right) + p_i - \tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{ijk}\,x^j\,B^k\,.$$

Operatory te otrzymujemy z ogólnego przepisu

$$h \longmapsto -\mathsf{i}\hbar\,\mathcal{V}_h - \mathcal{V}_h \lrcorner\, \eta + h \equiv \widehat{h}\,,$$

w którym $\mathcal{V}_h$ jest polem hamiltonowskim stowarzyszonym z $h \in C^\infty\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}, \mathbb{R}\big)$, $\eta \in \Omega^1(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3})$ zaś jest dowolną 1-formą pierwotną dla 2-kocyklu Ω_{F}, która w naszym wypadku została wybrana w postaci

$$\eta(x,p) = -x^i\,\mathsf{d}\pi_i(x,p) = -x^i\left(\mathsf{d}p_i + \tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{ijk}\,B^j\,\mathsf{d}x^k\right).$$

[8]Schemat ten został w nader przystępny sposób przedstawiony w monografii Woodhouse'a [Woo92].

Bez trudu przekonujemy się, że wypisane powyżej operatory różniczkowe spełniają pożądane relacje komutacyjne. Ażeby zrozumieć, w jaki sposób ich struktura i działanie na $L^2(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3},\mathbb{R})$ wiąże się z rozszerzeniem (11), musimy wrócić do modelu klasycznego.

Model klasyczny ma symetrie ciągłe: pod wpływem translacji ℓ_ε o *stały* wektor $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\times 3}$ lagranżjan zmienia się o zupełną pochodną czasową

$$L\big(\ell_\varepsilon \circ x, \big(\ell_\varepsilon \circ x\big)^{\dot{}}\big) = L(x,\dot{x}) + \dot{F}(x)$$

funkcji gładkiej

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\, q\, \epsilon_{ijk}\, \varepsilon^i\, x^j\, B^k\,.$$

Oczekiwanie, iżby symetrie te podnosiły się do teorii kwantowej, jest w pełni uzasadnione. Tu jednak natrafiamy na obstrukcję: o ile operator położenia jest nieczuły na przesunięcia, operator pędu podlega transformacji

$$\widehat{p}_i\big(\ell_\varepsilon(x),p\big) = \widehat{p}_i(x,p) - \tfrac{1}{2}\, q\, \epsilon_{ijk}\, \varepsilon^j\, B^k\,,$$

jeśli zatem nie poddamy stosownej korekcie (fazowej) funkcji falowej $\psi \in L^2(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3},\mathbb{R})$, wartości oczekiwane tego operatora i wszelkich operatorów pochodnych,

$$\big\langle \mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)\big\rangle_\psi \equiv \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}} \mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\mathrm{F}}\big)\,\overline{\psi(x,p)}\,\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)(x,p)\,\psi(x,p)$$

nie będą niezmiennicze względem przesunięć (należy zwrócić uwagę, że 2-forma symplektyczna Ω_{F} jest translacyjnie niezmiennicza, cechę tę ma zatem także symplektyczna forma objętości $\mathrm{Vol}(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\mathrm{F}})$). Jest przy tym jasne, że konieczna postać[9] transformacji symetrii funkcji falowej

$$\mathsf{L}^2\ell_\cdot\ :\ \mathsf{T}(3)\times L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3},\mathbb{R}\big) \longrightarrow L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3},\mathbb{R}\big)\ :\ \big((\varepsilon^i),\psi\big) \longmapsto \varepsilon \rhd \psi \equiv \mathsf{L}^2\ell_\varepsilon(\psi)\,,$$

$$\big(\varepsilon \rhd \psi\big)(x,p) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)$$

(uwzględniliśmy to, że działanie na argumencie funkcji falowej poprzez cofnięcie wzdłuż ℓ_ε jest działaniem *prawym*, my zaś dążymy do skonstruowania działania lewego). Istotnie, oczekiwana niezmienniczość amplitud jest wówczas prostą konsekwencją translacyjnej niezmienniczości symplektycznej miary objętości,

$$\begin{aligned}
\big\langle \mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)\big\rangle_{\varepsilon\rhd\psi} &= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}} \mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\mathrm{F}}\big)\,\overline{\big(\varepsilon\rhd\psi\big)(x,p)}\,\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)(x,p)\,\big(\varepsilon\rhd\psi\big)(x,p) \\
&= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}} \mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\mathrm{F}}\big)\,\overline{\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k} \\
&\qquad\qquad \cdot\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)(x,p)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big) \\
&= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}} \mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\mathrm{F}}\big)\,\overline{\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)}\cdot\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j + \tfrac{1}{2}\,q\,\epsilon_{jkl}\,\varepsilon^k\,B^l\big)(x,p)\,\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big) \\
&= \int_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}} \mathrm{Vol}\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3};\Omega_{\mathrm{F}}\big)\,\overline{\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)}\cdot\mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big)\,\psi\big(\ell_{-\varepsilon}(x),p\big) \\
&= \big\langle \mathcal{O}\big(\widehat{x}^i,\widehat{p}_j\big)\big\rangle_\psi\,.
\end{aligned}$$

Na obecnym etapie zasadnym wydaje się ustalenie własności odwzorowania $\mathsf{L}^2\ell_\cdot$. Czy mamy do czynienia z działaniem grupy $\mathsf{T}(3)$? W bezpośrednim rachunku stwierdzamy

$$\begin{aligned}
\big(\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1}\circ\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_2}\big)(\psi)(x,p) &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,x^j\,B^k}\cdot\big(\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_2}(\psi)\big)\big(\ell_{-\varepsilon_1}(x),p\big) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,x^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_2^i\,\ell_{-\varepsilon_1}(x)^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-\varepsilon_2}\circ\ell_{-\varepsilon_1}(x),p\big) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^i\,x^j\,B^k}\cdot\psi\big(\ell_{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}(x),p\big) \\
&\equiv \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\cdot\mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\psi)(x,p)\,,
\end{aligned}$$

[9] Zauważmy, że operator położenia pozostaje niezmieniony pod wpływem translacji ℓ_ε.

zatem $\mathsf{L}^2\ell.$ *nie* jest działaniem. Jest natomiast **działaniem rzutowym**, a ponieważ takie działania często spotykanym w kontekście kwantowania symetrii klasycznych (w związku ze swobodą redefinicji fazy funkcji falowej), przeto omówimy je po krótce w pewnej ogólności. Oto więc mamy do czynienia z realizacją grupy G na przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej V, czyli homomorfizmem

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V,\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times \equiv \mathrm{PGL}(V,\mathbb{K})$$

grupy G w grupę ilorazową $\mathrm{PGL}(V,\mathbb{K})$, określaną mianem **rzutowej grupy głównej liniowej przestrzeni** V, który możemy równoważnie opisywać jako odwzorowanie

$$R \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V,\mathbb{K})$$

o własności

$$\forall_{g,h\in\mathrm{G}}\ \exists_{c(g,h)\in\mathbb{K}^\times} \;:\; R(g)\circ R(h) = c(g,h) \triangleright R(g\cdot h)\,.$$

Można zadać pytanie, kiedy tak określone odwzorowania współdeterminują *działanie* rozszerzenia centralnego G przez $\mathbb{K}^\times$,

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{K}^\times \xrightarrow{(e_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times})} \mathrm{G}\times\mathbb{K}^\times \equiv \widetilde{\mathrm{G}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{G} \longrightarrow \mathbf{1}$$

o operacji binarnej

$$\widetilde{\mu} \;:\; \widetilde{\mathrm{G}}\times\widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}} \;:\; \big((g_1,k_1),(g_2,k_2)\big) \longmapsto \big(g_1\cdot g_2, k_1\cdot k_2\cdot c(g_1,g_2)\big)\,. \tag{13}$$

Jest to możliwe, gdy odwzorowanie

$$c \;:\; \mathrm{G}\times\mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{K}^\times \;:\; (g,h) \longmapsto c(g,h) \tag{14}$$

spełnia warunek

$$\forall_{g_1,g_2,g_3\in\mathrm{G}} \;:\; c(g_1,g_2)\cdot c(g_1\cdot g_2,g_3) = c(g_2,g_3)\cdot c(g_1,g_2\cdot g_3)\,, \tag{15}$$

oto bowiem wtedy zapostulowana powyżej operacja binarna $\widetilde{\mu}$ okazuje się być łączna, a my możemy zadać działanie grupy $\widetilde{\mathrm{G}}$ w postaci odwzorowania

$$\widetilde{R} \;:\; \widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V,\mathbb{K}) \;:\; (g,k) \longmapsto k\triangleright R(g)\,,$$

którego homomorficzność sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(g_1,k_1)\circ\widetilde{R}(g_2,k_2) &= k_1\triangleright R(g_1)\circ\big(k_2\triangleright R(g_2)\big) = k_1\triangleright\big(k_2\triangleright\big(R(g_1)\circ R(g_2)\big)\big) \\
&= k_1\cdot k_2\triangleright\big(c(g_1,g_2)\triangleright R(g_1\cdot g_2)\big) = k_1\cdot k_2\cdot c(g_1,g_2)\triangleright R(g_1\cdot g_2) \\
&\equiv \widetilde{R}\circ\widetilde{\mu}\big((g_1,k_1),(g_2,k_2)\big)\,.
\end{aligned}$$

Interpretacja samego warunku wymaga kolejnej

Definicja 4. Niechaj G będzie grupą, A zaś – grupą przemienną, na której określone jest **działanie** (lewe) G, tj. dany jest homomorfizm grup

$$\Lambda_{\cdot} \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(A) \;:\; g \longrightarrow \Lambda_g\,,$$

przy czym jak zwykle będziemy też pisać, nadużywając nieco notacji,

$$\Lambda \;:\; \mathrm{G}\times A \longrightarrow A \;:\; (g,a) \longmapsto g\triangleright a \equiv \Lambda_g(a)\,.$$

Mówimy, że para $(A,\Lambda_{\cdot})$ jest **modułem grupy** G. **p-kołańcuch na G o wartościach w A** to odwzorowanie

$$f \;:\; \mathrm{G}^{\times p} \longrightarrow A\,,$$

przy czym dla $p=0$ przyjmujemy konwencję: $\mathrm{G}^{\times 0} \equiv \{\bullet\}$ (singleton), z której wynika, że **0-kołańcuch na G o wartościach w A** to element A. Zbiór $C^p(\mathrm{G};A) \equiv \mathrm{Map}(\mathrm{G}^{\times p},A)$ takich odwzorowań dziedziczy z A strukturę grupy przemiennej (z operacją binarną zdefiniowaną punktowo) – grupę tę określamy mianem **grupy p-kołańcuchów na G o wartościach w A**. Indeksowana przez $\mathbb{N}\ni p$ rodzina grup kołańcuchów tworzy kompleks (ko)łańcuchowy

$$\big(C^\bullet(\mathrm{G};A),\delta_{\mathrm{G}}^{(\bullet)}\big) \;:\; C^0(\mathrm{G};A) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(0)}} C^1(\mathrm{G};A) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(1)}} \cdots \xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(p-1)}} C^p(\mathrm{G};A) \xrightarrow{\delta_{\mathrm{G}}^{(p)}} \cdots$$

o **operatorach kobrzegu**

$$\delta_{\mathrm{G}}^{(p)} \ : \ C^p(\mathrm{G};A) \longrightarrow C^{p+1}(\mathrm{G};A)\,, \qquad\qquad \delta_{\mathrm{G}}^{(p+1)} \circ \delta_{\mathrm{G}}^{(p)} = 0\,, \quad p \in \mathbb{N}$$

danych wzorami (zapisanymi dla dowolnych $g_i \in \mathrm{G}$, $i \in \overline{0,p}$ i $\underset{k}{c} \in C^k(\mathrm{G};A)$, $k \in \{0, p > 0\}$)

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{G}}^{(0)} \underset{0}{\varphi}(g_0) &= g_0 \triangleright \underset{0}{\varphi} - \underset{0}{\varphi}\,, \\
\delta_{\mathrm{G}}^{(p)} \underset{p}{\varphi}(g_0, g_1, \ldots, g_p) &= g_0 \triangleright \underset{p}{\varphi}(g_1, g_2, \ldots, g_p) + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \underset{p}{\varphi}(g_0, g_1, \ldots, g_{j-2}, g_{j-1} \cdot g_j, g_{j+1}, g_{j+2}, \ldots, g_p) \\
&\quad + (-1)^{p+1} \underset{p}{\varphi}(g_0, g_1, \ldots, g_{p-1})\,.
\end{aligned}$$

Grupa homologii powyższego kompleksu

$$H^0(\mathrm{G};A) \equiv Z^0(\mathrm{G};A)\,, \qquad\qquad H^{p+1}(\mathrm{G};A) \equiv Z^{p+1}(\mathrm{G};A)/B^{p+1}(\mathrm{G};A)\,, \quad p \in \mathbb{N}\,,$$

w której zapisie

$$Z^{p+1}(\mathrm{G};A) \equiv \mathrm{Ker}\,\delta_{\mathrm{G}}^{(p+1)}$$

to **grupa** $(p+1)$**-kocykli na grupie** G **o wartościach w** G**-module** A, a

$$B^{p+1}(\mathrm{G};A) \equiv \mathrm{Im}\,\delta_{\mathrm{G}}^{(p)}$$

to **grupa** $(p+1)$**-kobrzegów na grupie** G **o wartościach w** G**-module** A, nosi miano $(p+1)$**-tej grupy kohomologii grupy** G **o wartościach w** G**-module** A. Suma prosta

$$H^\bullet(\mathrm{G};A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} H^p(\mathrm{G};A)$$

tych grup określa **kohomologię grupy** G **o wartościach w** G**-module** A.

Uwaga 2. Warto zwrócić uwagę na to, że $H^0(\mathrm{G};A)$ to zbiór niezmienników działania $\Lambda_\cdot$. Wprowadzona tu kohomologia dostarcza naturalnego uogólnienia pojęcia niezmiennika. Odgrywa niebagatelną rolę w dyskusji cechowania symetrii sztywnych w teoriach fizycznych.

Bogatsi o powyższą definicję bez trudu identyfikujemy warunek (15) narzucony na odwzorowanie (14): oto zdefiniowanie działania rozszerzenia centralnego $\widetilde{\mathrm{G}}$ zrealizowanej rzutowo grupy G wymaga, iżby odwzorowanie to było 2-kocyklem na G o wartościach w *trywialnym* G-module $\mathbb{K}^\times$ (z $\Lambda_\cdot \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{K}^\times}$),

$$(15) \qquad \Longleftrightarrow \qquad c \overset{!}{\in} Z^2(\mathrm{G};\mathbb{K}^\times)\,.$$

Będziemy go nazywać **2-kocyklem działania rzutowego** R. Zauważmy przy tym, że poprawienie wyjściowego 2-kocyklu c o 2-kobrzeg $\delta_{\mathrm{G}}^{(1)} d$, $d \in C^1(\mathrm{G};\mathbb{K}^\times)$ nie zmienia jakościowo sytuacji, gdyż poprawka może być zaabsorbowana w redefinicję odwzorowania R wedle schematu

$$R \longmapsto \mathrm{Inv} \circ d \triangleright R \equiv R_d\,,$$

tj., jeśli R spełnia warunek

$$\forall_{g,h \in \mathrm{G}} \ : \ R(g) \circ R(h) = c(g,h) \cdot \delta_{\mathrm{G}}^{(1)} d(g,h) \triangleright R(g \cdot h) \equiv c(g,h) \cdot d(h) \cdot d(g \cdot h)^{-1} \cdot d(g) \triangleright R(g \cdot h)\,,$$

to wówczas R_d spełnia warunek

$$\forall_{g,h \in \mathrm{G}} \ : \ R_d(g) \circ R_d(h) = c(g,h) \triangleright R_d(g \cdot h)\,.$$

Ponadto, rzecz jasna,

$$\delta_{\mathrm{G}}^{(2)} \big(c \cdot \delta_{\mathrm{G}}^{(1)} d \big) = \delta_{\mathrm{G}}^{(2)} c\,,$$

przeto koniec końców w rozpatrywanym przez nas zagadnieniu znaczenie ma jedynie klasa kohomologii 2-kocyklu działania rzutowego.

W naszych wcześniejszych rozważaniach fizykalnych realizacja algebry (10) doprowadziła nas wprost do definicji działania rzutowego $L^2\ell_\cdot$ grupy $\mathrm{T}(3)$ o własności

$$\forall_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathrm{T}(3)} \ : \ \mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1} \circ \mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_2} = \mathrm{e}^{-\frac{iq}{2\hbar}\, \epsilon_{ijk}\, \varepsilon_1^i\, \varepsilon_2^j\, B^k} \triangleright \mathsf{L}^2\ell_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,.$$

Łatwo przekonujemy się, że pojawiający się tutaj 2-kołańcuch na $\mathrm{T}(3)$ o wartościach w trywialnym $\mathrm{T}(3)$-module $\mathrm{U}(1)$ (notacja multyplikatywna dla grupy przemiennej $\mathrm{U}(1)$!) dany wzorem

$$c_{\mathrm{F}} \;:\; \mathrm{T}(3)\times\mathrm{T}(3)\longrightarrow\mathrm{U}(1) \;:\; (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}$$

jest 2-kocyklem,

$$\delta^{(2)}_{\mathrm{T}(3)}c_{\mathrm{F}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_2^i\,\varepsilon_3^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^i\,\varepsilon_3^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,(\varepsilon_2+\varepsilon_3)^j\,B^k}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\equiv 1\,.$$

Obserwacja ta pozwala zrozumieć strukturę zapostulowanej przez nas transformacji symetrii funkcji falowej jako odzwierciedlenie ukrytego za nią działania rozszerzenia centralnego

$$\mathbf{1}\longrightarrow\mathrm{U}(1)\xrightarrow{(0,\mathrm{id}_{\mathrm{U}(1)})}\mathrm{T}(3)\times\mathrm{U}(1)\equiv\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}\mathrm{T}(3)\longrightarrow\mathbf{1}$$

na przestrzeni Hilberta ładunku elektrycznego w stałym polu magnetycznym. Porównując operację binarną indukowaną na rozszerzeniu $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ w tych okolicznościach wedle schematu (13),

$$\widetilde{\mu}_\hbar \;:\; \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\times\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\longrightarrow\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \;:\; \big((\varepsilon_1,u_1),(\varepsilon_2,u_2)\big)\longmapsto\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2,u_1\cdot u_2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon_1^i\,\varepsilon_2^j\,B^k}\big)\,,$$

z operacją binarną (12) na grupie $\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega$ otrzymanej przez (równoważne) scałkowanie centralnego rozszerzenia algebry Liego $\mathfrak{t}(3)$ indukowanego przez 2-kocykl ω na $\mathfrak{t}(3)$, konstatujemy z serdecznym wzruszeniem, iż

$$\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar\equiv\widetilde{\mathrm{UT}(3)}_\omega\,,\qquad\qquad \omega_{ij}\equiv-\tfrac{1}{2\hbar}\,q\,f_{ij}=-\tfrac{1}{4\hbar}\,q\,\epsilon_{ijk}\,B^k\,.$$

I na tym jednak nie koniec… Możemy wszak zadać pytanie o (naturalny) mechanizm indukcji działania „kwantowej grupy translacji" $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ na przestrzeni Hilberta skwantowanego geometrycznie modelu dynamiki masywnego ładunku elektrycznego w stałym polu magnetycznym. Odpowiedź na to pytanie nasuwa się sama w geometrycznym paradygmacie opisu zjawisk fizykalnych, u którego podstaw – tak w mechanice klasycznej, jak i w teorii pola (a nawet w niektórych schematach kwantowania obu) – leży w wymiarze formalnym pojęcie wiązki włóknistej (lub innej „wyższej geometrii", jak (n-)wiecheć wiązek), które jest omawiane ze szczegółami i w konkretnych zastosowaniach na 2. i 3. semestrze wykładu monograficznego pt. „Elementy algebry i geometrii wyższej w fizyce" Autora. Nie mogąc zakładać znajomości dyskutowanych tam struktur geometrycznych i algebraicznych, możemy jedynie – z braku czasu na rozleglejszą argumentację – podsunąć Czytelnikowi niezbędną intuicję, wywiedzioną z kursu Algebry.

Punktem wyjścia w konstrukcji, którą chcemy zaproponować, jest potraktowanie rozważanych przez nas funkcji falowych $\psi\;:\;\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\longrightarrow\mathbb{C}$ jako odwzorowań z przestrzeni stanów $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ układu fizycznego w produkt kartezjański $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$ tejże z rozmaitością $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^{\times 2}$ szczególnej postaci

$$\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}},\psi\big)\;:\;\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\longrightarrow\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}\;:\;(x,p)\longmapsto\big((x,p),\psi(x,p)\big)\,,$$

czyli takich, które są prawymi odwrotnościami rzutu

$$\mathrm{pr}_1\;:\;\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\,. \tag{16}$$

W języku wiązek włóknistych to ostatnie odwzorowanie nosi miano **rzutu na bazę** $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ **wiązki** (trywialnej) $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$, dla którego $(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}},\psi)$ jest (globanym) **cięciem**. Tak określona wiązka (pre)kwantowa[10] $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$ jest wprost ze swej natury wiązką jednowymiarowych przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowych nad **bazą** $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ – w naszym przypadku każde jej **włókno** $\mathrm{pr}_1^{-1}(\{(x,p)\})$ nad punktem $(x,p)\in\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$ bazy jest po prostu przestrzenią $V\equiv\mathbb{C}$ (w ogólnym przypadku mamy do czynienia z przestrzenią $\mathbb{C}$-liniową *niekanonicznie* izomorficzną z $\mathbb{C}$). Wybór bazy w tej (i w każdej innej) jednowymiarowej przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej jest równoznaczny ze wskazaniem izomorfizmu

$$\beta\;:\;\mathbb{C}\xrightarrow{\cong}V\,,$$

a zbiór $\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},V)$ *wszystkich* takich izomorfizmów, więc też zbiór *wszystkich baz*, jest naturalnie utożsamialny z grupą $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})\equiv\mathbb{C}^\times$. Można też, rzecz jasna, rozważać podklasę $\mathrm{Iso}^{\mathrm{H}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},V)$ baz

[10] Konstrukcja, którą tu wprowadzamy „tylnymi drzwiami", jest zupełnie ogólna i nie zawsze prowadzi do produktowej **przestrzeni totalnej** jak ta tutaj: $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$. Ta uwaga ma na celu zdjęcie z naszych dalszych rozważań potencjalne odium trywialności, a zarazem sztuczności i nadmiarowości.

powiązanych ze sobą transformacjami utożsamialnymi z dowolną podgrupą $\mathrm{H} \subset \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$, np. bazy $\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{U}(1)}(\mathbb{C},V)$ z orbity działania podgrupy $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}^{\times} \equiv \mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$. Należy podkreślić, że każdą taką H-orbitę można utożsamić z H *niekanonicznie* dopiero po wybraniu dowolnego jej punktu. Mając taki dowolny element $\beta_* \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V)$, jesteśmy w stanie odtworzyć wyjściową przestrzeń $\mathbb{C}$-liniową V jako $\beta_*(\mathbb{C})$. Z punktu widzenia geometryzacji dyskutowanych pojęć i operacji algebraicznych dużo bardziej naturalne wydaje się pytanie o możliwość odtworzenia V *bez wyróżniania* jakiejkolwiek bazy, czyli wprost ze zbioru $\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V) \times \mathbb{C}$. Usunięcie $|\mathrm{H}|$-krotnej nadwyżki elementów musi przy tym uwzględniać status ontologiczny wszystkich zaangażowanych obiektów. W sukurs przychodzi nam podkreślana wyżej struktura **H-torsora** na $\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V)$, która podpowiada schemat „wyprojektowania" $|\mathrm{H}|$-krotnej nadwyżki poprzez przejście do przestrzeni orbit diagonalnego działania H na $\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V) \times \mathbb{C}$ danego wzorem

$$\mathrm{H} \times \big(\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V) \times \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V) \times \mathbb{C} \;:\; \big(h,(\beta,z)\big) \longmapsto \big(\beta \circ h, h^{-1}(z)\big)\,,$$

w którym H traktujemy pedantycznie jako podgrupę $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$. W wyniku tej operacji otrzymujemy zbiór (orbit)

$$\big(\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{H} \ni [(\beta,z)]_{\sim}\,,$$

którego elementy to klasy abstrakcji $[(\beta,z)]_{\sim}$ względem relacji równoważności

$$(\beta_1,z_1) \sim (\beta_2,z_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{h\in\mathrm{H}} \;:\; (\beta_2,z_2) = \big(\beta_1 \circ h, h^{-1}(z_1)\big)$$

i który jest w sposób *kanoniczny* izomorficzny z V, a to poprzez odwzorowanie

$$[\mathrm{ev}] \;:\; \big(\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{H} \xrightarrow{\cong} V \;:\; [(\beta,z)]_{\sim} \longmapsto \beta(z)\,,$$

którego dobra określoność (tj. niezależność od wyboru reprezentanta klasy $(\beta,z)]_{\sim}$) wynika z łączności superpozycji odwzorowań,

$$\forall_{h\in\mathrm{H}} \;:\; \beta \circ h\big(h^{-1}(z)\big) = \beta \circ \big(h \circ h^{-1}\big)(z) = \beta(z)\,.$$

Istnienie izomorfizmu $[\mathrm{ev}]$ pozwala zaindukować na $(\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{C},V) \times \mathbb{C})/\mathrm{H}$ naturalną strukturę $\mathbb{C}$-liniową.

Powyższa dyskusja dotyczy w szczególności $\mathrm{U}(1)$-torsora $\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{U}(1)}(\mathbb{C},V) \equiv \mathrm{U}(1)$ (złożonego z przemnożeń liczb zespolonych przez fazy z $\mathrm{U}(1)$, co stanowi podstawę utożsamienia z $\mathrm{U}(1)$) – mamy zatem

$$[\mathrm{ev}] \;:\; \big(\mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \;:\; [(u,z)]_{\sim} \longmapsto u \cdot z\,. \tag{17}$$

Dokonawszy geometryzacji tej konstrukcji nad bazą $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}$, tj. „wyprojektowawszy" działanie

$$\mathrm{U}(1) \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C} \;:\; \big(g,\big((x,p),u,z\big)\big) \longmapsto \big((x,p),u \cdot g, g^{-1} \cdot z\big)\,,$$

odnajdujemy **wiązkę stowarzyszoną**

$$\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \;:\; \big[\big((x,p),u,z\big)\big]_{\sim} \longmapsto (x,p) \tag{18}$$

z **wiązką główną**

$$\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \;:\; \big((x,p),u\big) \longmapsto (x,p)$$

poprzez naturalne działanie $\mathrm{U}(1)$ na $\mathbb{C}$ (przez mnożenie). Wiązka (18) (rozmaitość) jest kanonicznie izomorficzna (dyfeomorficzna) z wiązką (pre)kwantową (16),

$$\mathrm{Bun}[\mathrm{ev}] \;:\; \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{C} \;:\; \big[\big((x,p),u,z\big)\big]_{\sim} \longmapsto \big((x,p),u \cdot z\big)\,,$$

por. (17). Tym, co sprawia, że nie jest to jedynie matematyczne kuriozum, jest zanurzenie

$$\widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar} \equiv \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \hookrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \;:\; (x,u) \longmapsto \big((x,p),u\big)\,,$$

które implikuje istnienie działania „kwantowej grupy translacji" $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar}$ na $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}$ będącego lewym działaniem regularnym tej grupy na składniku kartezjańskim $\mathrm{pr}_{1,3}(\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}) = \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1)$,

$$\mathrm{Bun}\lambda. \quad : \quad \widetilde{\mathrm{T}(3)}_{\hbar} \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathrm{U}(1) \times \mathbb{C}$$

$$: \quad \big((\varepsilon,\zeta),\big((x,p),u,z\big)\big) \longmapsto \big((x+\varepsilon,p),u\cdot\zeta\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k},z\big)\,,$$

przemiennego z wyprojektowywanym działaniem $\mathrm{U}(1)$, więc zstępującego do przestrzeni orbit $\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times \mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1)$ w postaci

$$[\mathrm{Bun}\lambda]. \quad : \quad \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times \mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \longrightarrow \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times \mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1)$$

$$: \quad \big((\varepsilon,\zeta),\big[\big((x,p),u,z\big)\big]_\sim\big) \longmapsto \big[\big((x+\varepsilon,p),u\cdot\zeta\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k},z\big)\big]_\sim$$

i tym samym dającego nam możliwość zaindukowania na wiązce (pre)kwantowej $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$ *naturalnego* działania

$$\lambda^\hbar_\cdot \;:\; \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$$

wedle schematu opisanego przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times \mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \arrow[r, "{[\mathrm{Bun}\lambda].}"] & \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times \mathrm{U}(1)\times\mathbb{C}\big)/\mathrm{U}(1) \arrow[d, "{\mathrm{Bun}[\mathrm{ev}]}"] \\
\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times \big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}\big) \arrow[u, "{\mathrm{id}_{\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar}\times\mathrm{Bun}[\mathrm{ev}]^{-1}}"] \arrow[r, "\lambda^\hbar_\cdot"'] & \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}
\end{tikzcd} \,.$$

Otrzymujemy tym sposobem działanie

$$\lambda^\hbar_{(\varepsilon,z)}\big((x,p),z\big) = \big((x+\varepsilon,p),\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}\cdot z\big)$$

o oczywistej składowej w bazie

$$\underline{\lambda}^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)} \;:\; \mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3} \circlearrowleft \;:\; (x,p)\longmapsto \big(\ell_\varepsilon(x),p\big)$$

(wszak działanie $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ jest rozszerzeniem działania $\mathrm{T}(3)$) i zależnej od punktu w bazie składowej we włóknie

$$\mathsf{F}\lambda^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)}(x,p) \;:\; \mathrm{pr}_1^{-1}\big(\{(x,p)\}\big) \circlearrowleft \;:\; z \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}q}{2\hbar}\,\epsilon_{ijk}\,\varepsilon^i\,x^j\,B^k}\cdot z\,.$$

Z tych dwóch możemy już w standardowy sposób złożyć *lewe* działanie „kwantowej grupy translacji" $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ na funkcjach falowych:

$$\mathsf{L}^2\lambda^\hbar_\cdot \;:\; \widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar \times L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\big) \longrightarrow L^2\big(\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\big) \;:\; \big((\varepsilon,\zeta),\psi\big) \longmapsto \mathsf{F}\lambda^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)}(\cdot)\cdot\psi\circ\underline{\lambda}^\hbar_{(\varepsilon,\zeta)^{-1}}(\cdot)\,.$$

Na końcu naszej długiej i chwilami nieoczywistej drogi czeka na nas nagroda – dobra nowina:

$$\mathsf{L}^2\ell_\varepsilon \equiv \mathsf{L}^2\lambda^\hbar_{(\varepsilon,1)}\;!$$

Udało się nam zatem *zrozumieć* postać rzutowego działania grupy translacji $\mathrm{T}(3)$ na przestrzeni Hilberta, wymuszoną przez wybór geometrycznego schematu kwantowania, jako ograniczenie naturalnego działania rozszerzenia tejże grupy $\widetilde{\mathrm{T}(3)}_\hbar$ na przestrzeni (całkowalnych z kwadratem) cięć trywialnej wiązki wektorowej $\mathsf{T}^*\mathbb{R}^{\times 3}\times\mathbb{C}$ nad klasyczną przestrzenią stanów.

Więcej ciekawych szczegółów i przykładów Czytelnik znajdzie w monografii de Azcárraga i Izquierdo pt. "Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics" [dAI95].

Zadanie na ćwiczenia 1 (na przyszłość)**.** Udowodnić i zinterpretować Drugi Lemat Whiteheada dla dowolnej skończenie wymiarowej półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{CE}^2(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}\,.$$

Literatura

[BT82] R. Bott and L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1982.

[CdAIPB00] C. Chryssomalakos, J.A. de Azcárraga, J.M. Izquierdo, and J.C. Pérez Bueno. "The geometry of branes and extended superspaces". *Nucl. Phys.*, B567:293–330, 2000.

[dAI95] J.A. de Azcárraga and J.M. Izquierdo. *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*. Cambridge Monographs On Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1995.

[GGT90] J.P. Gauntlett, J. Gomis, and P.K. Townsend. "Particle actions as Wess–Zumino terms for spacetime (super)symmetry groups". *Phys. Lett. B*, 249:255–260, 1990.

[TW87] G.M. Tuynman and W.A.J.J. Wiegerinck. "Central extensions and physics". *J. Geom. Phys.*, 4:207–258, 1987.

[Woo92] N.M.J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 1992.