TEORIA GRUP II
WYKŁAD 7.
MAGNA CARTAN

Lemat 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ będzie grupą domkniętą grupy Liego G w topologii podprzestrzeni i niech $X_\cdot : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{g}$ będzie ciągiem wektorów w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ tejże grupy, o granicy $X \coloneqq \lim_{n\to\infty} X_n \in \mathfrak{g}$, a nadto niech $t_\cdot : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ będzie ciągiem liczbowym zbieżnym do $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, przy czym $\lambda_{X_n}(t_n) \in \mathrm{H}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \; : \; \lambda_X(t) \in \mathrm{H}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Dla ustalonego (dowolnie) $t \in \mathbb{R}$ rozważmy ciąg

$$N_\cdot \; : \; \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \; : \; n \longmapsto E\big(\tfrac{t}{t_n}\big)\,,$$

gdzie $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ jest cechą (funkcją *entier*). Jako że $\frac{t}{t_n} - 1 < N_n \leq \frac{t}{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, przeto – na mocy Twierdzenia o trzech ciągach, a wobec założenia poczynionego w odniesieniu do $t_\cdot$ –

$$\lim_{n\to\infty} t_n \cdot N_n = t\,,$$

wobec czego także

$$\lim_{n\to\infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n = t \triangleright X\,.$$

Na podstawie Stw. 2-3-4.6,7,9 oraz 10, jak również Stw. 2-3-4.5 i podstawowych właściwości potoku pola wektorowego wyznaczamy

$$\begin{aligned}
\lambda_X(t) &= \lambda_{t\triangleright X}(1) \equiv \lambda_{\lim_{n\to\infty} t_n\cdot N_n\triangleright X_n}(1) = \lim_{n\to\infty} \lambda_{t_n\cdot N_n\triangleright X_n}(1) = \lim_{n\to\infty} \lambda_{t_n\triangleright X_n}(N_n) \\
&\equiv \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n;0,e) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n\triangleright X_n}\big(1;N_n-1,\Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-1;0,e)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-1;0,e)\cdot\lambda_{t_n\triangleright X_n}(1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n\triangleright X_n}\big(1;N_n-2,\Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-2;0,e)\big)\cdot\lambda_{t_n\triangleright X_n}(1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-2;0,e)\cdot\lambda_{t_n\triangleright X_n}(1)^2 = \ldots = \lim_{n\to\infty} \lambda_{t_n\triangleright X_n}(1)^{N_n} = \lim_{n\to\infty} \lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}\,,
\end{aligned}$$

a ponieważ $\mathrm{H} \ni \lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}$ jest domknięta, przeto – zgodnie z tezą stwierdzenia – także

$$\lambda_X(t) \in \overline{\mathrm{H}} \equiv \mathrm{H}\,.$$

□

Twierdzenie 1 (Cartana o podgrupie domkniętej)**.** Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ będzie podgrupą domkniętą w topologii podprzestrzeni i niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego G. Skonstruujemy bezpośrednio lokalną mapę podrozmaitości na otoczeniu otwartym punktu $e \in \mathrm{H} \subset \mathrm{G}$, a następnie utworzymy atlas podrozmaitości przesuwając ową mapę do każdego z punktów podgrupy. W tym celu rozważmy podzbiór

$$\mathfrak{h} \coloneqq \{\; \mathsf{D}\gamma(0) \quad | \quad \gamma \in C^\infty(\mathbb{R},\mathrm{H}) \subset C^\infty(\mathbb{R},\mathrm{G}) \quad \wedge \quad \gamma(0) = e \;\} \subset \mathfrak{g}\,.$$

Dla dowolnej pary ścieżek $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{H})$ spełniających warunki $\gamma_\alpha(0) = e$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ definiujemy ścieżkę złożoną

$$\gamma \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{H} \ : \ t \longmapsto \gamma_1(t_1 \cdot t) \cdot \gamma_2(t_2 \cdot t)\,,$$

po czym obliczamy

$$\gamma(0) = \gamma_1(0) \cdot \gamma_2(0) = e \cdot e = e\,, \qquad \mathsf{D}\gamma(0) = t_1 \triangleright \mathsf{D}\gamma_1(0) + t_2 \triangleright \mathsf{D}\gamma_2(0)\,.$$

Wektor styczny do γ w $t = 0$ należy do $\mathfrak{h}$ (wprost z definicji), widzimy zatem, że dowolna $\mathbb{R}$-liniowa kombinacja elementów zbioru $\mathfrak{h}$ jest w nim zawarta, czyli – innymi słowy – $\mathfrak{h}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}$-liniową przestrzeni $\mathfrak{g}$. W następnej kolejności dowodzimy tożsamości

(1)
$$\mathfrak{h} = \{\ X \in \mathfrak{g} \quad | \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} \ : \ \lambda_X(t) \in \mathrm{H}\ \}\,.$$

Zawieranie $\supseteq$ jest oczywiste,

$$X = \dot{\lambda}_X(0) \equiv D\lambda_X(0)\,, \qquad \lambda_X(0) = e\,,$$

rozważmy przeto dowolny wektor $X := \mathsf{D}\gamma(0) \in \mathfrak{h}$ określony przez pewną ścieżkę $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{H})$ i zdefiniujmy, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ (na tyle, by ścieżka $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ była zawarta w dyfeomorficznym obrazie otoczenia $\mathcal{U}_0$ wektora $0_\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}$ względem odwzorowania exp, zgodnie ze Stw. 2-3-4.10), ścieżkę wektorów

$$\xi \ : \ ]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathfrak{g} \ : \ t \longmapsto \exp\restriction_{\mathcal{U}_0}^{-1} \circ\, \gamma(t)$$

przez

$$\xi(0) = \exp\restriction_{\mathcal{U}_0}^{-1} \circ\, \gamma(0) = \exp\restriction_{\mathcal{U}_0}^{-1}(e) = 0_\mathfrak{g}\,.$$

Otrzymujemy, przywoławszy po drodze Równ. (2-3-4.2),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} \ni X \quad &\equiv \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\gamma(t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp \circ\, \xi(t) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(\xi(0) + t \triangleright \mathsf{D}\xi(0) + \mathscr{O}(t^2)\big) \\
&= \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(\xi(0) + t \triangleright \mathsf{D}\xi(0)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(t \triangleright \mathsf{D}\xi(0)\big) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_{t \triangleright \mathsf{D}\xi(0)}(1)\,,
\end{aligned}$$

czyli – w świetle Stw. 2-3-4.7 –

$$\mathfrak{h} \ni X = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_{\mathsf{D}\xi(0)}(t) = \mathsf{D}\xi(0)\,.$$

Możemy zatem zapisać

$$\lim_{n \to \infty} n \triangleright \xi\big(\tfrac{1}{n}\big) \in \mathfrak{h}\,.$$

Zdefiniujmy ciągi

$$X_\cdot \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{g} \ : \ n \longmapsto n \triangleright \xi\big(\tfrac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\big)\,, \qquad t_\cdot \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \ : \ n \longmapsto \tfrac{1}{n}\,,$$

przy czym postać argument w pierwszej z tych definicji gwarantuje, że ten pozostaje w dziedzinie określoności ξ,

$$0 < \tfrac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n} = \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon\,(1+n)} < \varepsilon\,.$$

Na mocy Stw. 2-3-4.7 zachodzi relacja

$$\lambda_{X_n}(t_n) = \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \equiv \lambda_{\xi(\frac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n})}(1) \equiv \exp \circ\, \xi\big(\tfrac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\big) = \gamma\big(\tfrac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\big) \in \mathrm{H}\,,$$

możemy więc przywołać Lemat 1, aby stwierdzić, że

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \ : \ \lambda_X(t) \equiv \lambda_{\mathsf{D}\xi(0)}(t) = \lambda_{\lim_{n \to \infty} X_n}(t) \in \mathrm{H}\,,$$

co dowodzi inkluzji

$$\mathfrak{h} \subseteq \{\ X \in \mathfrak{g} \quad | \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} \ : \ \lambda_X(t) \in \mathrm{H}\ \}\,.$$

Tym sposobem zidentyfikowaliśmy algebrę Liego podgrupy H. Ta wraz z dowolnym jej dopełnieniem prostym $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$,

(2)
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $\mathfrak{g}$ (dopełnienie to nie jest w ogólności podalgebrą Liego algebry $\mathfrak{g}$) stanowi poszukiwany model lokalnej mapy podrozmaitości na otoczeniu e w $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$. Ażeby się o tym przekonać, pokażemy najpierw, że istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{M}$ wektora $0_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{m}$ o własności $\exp(\mathcal{M}) \cap \mathrm{H} = \{e\}$. Istotnie, gdyby tak nie było, można byłoby wybrać ciąg wektorów $Y_{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ zbieżny do $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0_{\mathfrak{g}}$ i o własności $\exp(Y_n) \in \mathrm{H}$, $n \in \mathbb{N}$, wtedy jednak – wybrawszy (dowolnie) normę $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ na $\mathfrak{g}$ ciągłą w topologii na $\mathfrak{g}$ (zatem np. wziąwszy normę euklidesową *indukującą* naturalną topologię na $\mathfrak{g}$) – uzyskalibyśmy ciąg wektorów

$$v_{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}\big(\{1\}\big) \cap \mathfrak{m} : n \longmapsto \|Y_n\|^{-1} \triangleright Y_n ,$$

z którego wobec zwartości sfery $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$ moglibyśmy następnie wybrać podciąg zbieżny $v_{n_{\cdot}}$ o granicy $v := \lim_{k\to\infty} v_{n_k} \in \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$, więc też położywszy

$$\tau_{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \longmapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} ,$$

i sprawdziwszy relacje

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n \equiv \lim_{n\to\infty} \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|\lim_{n\to\infty} Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|0_{\mathfrak{g}}\|_{\mathfrak{g}} = 0 ,$$

$$\lambda_{v_n}(\tau_n) = \lambda_{\|Y_n\|_{\mathfrak{m}} \triangleright v_n}(1) = \lambda_{Y_n}(1) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathrm{H} ,$$

moglibyśmy ponownie skorzystać z Lematu 1, dostając

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} : \lambda_v(t) \in \mathrm{H} ,$$

czyli – w świetle równości (1) – $v \in \mathfrak{h}$, a zatem – wobec rozkładu (2) – sprzeczność z wcześniejszym wynikiem $v \in \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$. Mając pożądane otoczenie $\mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$, wybierzmy następnie takie otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{h}$ oraz $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{m}$, a także $\mathcal{O}_e$ elementu e w G, iżby odwzorowanie

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_e : (X, Y) \longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y)$$

było dyfeomorfizmem. O tym, że wybór taki jest możliwy, przesądza analiza rozszerzonego odwzorowania

$$\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{G} : (X, Y) \longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y) .$$

Jego styczna w $(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ to

$$\mathsf{D}\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}}) : \mathsf{T}_{(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathsf{T}_{\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}\mathrm{G} = \mathsf{T}_e\mathrm{G} \equiv \mathfrak{g} : (x, y) \longmapsto x + y ,$$

co w świetle Stw. 2-3-4.7 oraz Równ. (2-3-4.2) wynika wprost z rachunku

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})(x, y) &= \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright x) \cdot \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright y)\big) \\
&\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\lambda_{t\triangleright x}(1) \cdot \lambda_{t\triangleright y}(1)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\lambda_x(t) \cdot \lambda_y(t)\big) \\
&= \mathsf{T}_e r_{\lambda_y(0)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \lambda_x(t)\big) + \mathsf{T}_e l_{\lambda_x(0)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \lambda_y(t)\big) \\
&= \mathsf{T}_e r_e(x) + \mathsf{T}_e l_e(y) = x + y
\end{aligned}$$

i dowodzi izomorficznego charakteru $\mathsf{D}\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ (wszak $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$), który pozwala odnieść do $\widetilde{\varphi}$ Twierdzenie o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. Niechaj teraz $h \in \mathcal{O}_e \cap \mathrm{H}$, a wtedy $h = \exp(X) \cdot \exp(Y)$ dla pewnych $(X, Y) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$, ale też $\exp(X) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathrm{H}$, więc $\exp(Y) = \exp(X)^{-1} \cdot g \in \mathrm{H} \cdot (\mathcal{O}_e \cap \mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$, co wobec założenia $Y \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M}$ oznacza, że $Y = 0_{\mathfrak{g}}$, czyli $h = \exp(X) \in \exp(\mathcal{O}_{\mathfrak{h}})$. Jest przeto $\kappa_e \equiv \varphi^{-1}$ mapą na otoczeniu $\mathcal{O}_e$ elementu neutralnego w G, a przy tym

$$\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e = \kappa^{-1}\big(\{\, (X, 0_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad | \quad X \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \,\}\big) .$$

Mapę na otoczeniu punktu $h \in \mathrm{H}$ definiujemy jako

$$\kappa_h := \kappa \circ l_{h^{-1}} : l_h(\mathcal{O}_e) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$$

(podzbiór $l_h(\mathcal{O}_e)$ jest otwarty jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego $\mathcal{O}_e$). Uzyskujemy tym sposobem atlas podrozmaitości $\{\kappa_h\}_{h\in\mathrm{H}}$ dla $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$, w którym operacje grupowe są gładkie jako ograniczenia operacji z G.

I odwrotnie, niech $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ będzie podgrupą i podrozmaitością grupy Liego G. Operacje grupowe na H są stosownymi złożeniami tychże operacji na G (z założenia gładkich) z kanonicznymi gładkimi włożeniami $\iota_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \xrightarrow{\cong} \iota_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{G}$ i ich odwrotnościami $\iota_{\mathrm{H}}^{-1} : \iota_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}$,

$$m_{\mathrm{H}} \equiv \iota_{\mathrm{H}}^{-1} \circ m_{\mathrm{G}} \circ (\iota_{\mathrm{H}} \times \iota_{\mathrm{H}}) , \qquad \mathrm{Inv}_{\mathrm{H}} = \iota_{\mathrm{H}}^{-1} \circ \mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \circ \iota_{\mathrm{H}} ,$$

i jako takie są gładkie. Jest zatem H podgrupą Liego. Pozostaje pokazać, że jest ona domknięta. W tym celu rozważmy dowolny punkt $g \in \overline{\mathrm{H}}$ z domknięcia $\overline{\mathrm{H}}$ podgrupy H, wraz z odnośnym ciągiem $h_{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{H}$ doń zbieżnym, $\lim_{n\to\infty} h_n = g$. Niechaj $\mathcal{O}_e \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ będzie dziedziną lokalnej mapy podrozmaitości κ na otoczeniu $e \in \iota_{\mathrm{H}}(\mathrm{H})$, a $\mathcal{U}_e \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ – pewnym podotoczeniem $\mathcal{O}_e \supset \mathcal{U}_e$ o własności $\overline{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$ (wystarczy wybrać $\mathcal{U}_e$ jako przeciwobraz względem κ dostatecznie małej kuli w $\mathbb{R}^{\dim \mathrm{G}}$ wokół $\kappa(e)$). Przywoławszy Lemat 2-3-4.1, ustalmy (dowolnie) otoczenie otwarte $\mathcal{O}$ elementu neutralnego $e \in \mathrm{G}$ o własności $m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e$, po czym rozważmy ciąg

$$g_{\cdot} := g^{-1} \cdot h_{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G} : n \longmapsto g^{-1} \cdot h_n$$

o granicy (obliczonej z wykorzystaniem ciągłości mnożenia)

$$\lim_{n\to\infty} g_n = e .$$

Prawie wszystkie jego wyrazy są zawarte w $\mathcal{O}$, a zatem – dla dostatecznie dużych $m, n \in \mathbb{N}$ –

$$h_n^{-1} \cdot h_m = g_n^{-1} \cdot g_m \equiv f(g_n, g_m) \in f(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e .$$

Przy tym dla ustalonego n otrzymujemy – wobec ciągłości mnożenia –

$$\lim_{m\to\infty} h_n^{-1} \cdot h_m = h_n^{-1} \cdot g ,$$

a ponieważ granica ciągu punktów z $\mathcal{U}_e$ należy do $\overline{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$, przeto także $h_n^{-1} \cdot g \in \mathcal{O}_e \cap \overline{\mathrm{H}}$. Przy tym w dziedzinie $\mathcal{O}_e$ mapy podrozmaitości κ przecięcie $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$ jest homeomorficznym przeciwobrazem względem κ dopełnienia (w $\kappa(\mathcal{O}_e) \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\dim \mathrm{G}})$) sumy mnogościowej pary zbiorów otwartych złożonych z punktów o – odpowiednio – ściśle dodatnich i ściśle ujemnych ostatnich $\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}$ współrzędnych (opisujących kierunki transwersalne do obrazu $\kappa(\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e) = \mathcal{V} \times \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, $\mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\dim \mathrm{H}})$), co oznacza, że podzbiór $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$ jest domknięty *w* $\mathcal{O}_e$. Ilekroć zatem mamy do czynienia z ciągiem punktów w $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$ zbieżnym *w* $\mathcal{O}_e$, a takim jest $h_n^{-1} \cdot h_{\cdot}$, granica jego leży także w $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$, czyli w szczególności

$$h_n^{-1} \cdot g \in \mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e \subset \mathrm{H} ,$$

więc też $g \in \mathrm{H}$, to zaś przesądza o postulowanej równości

$$\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} .$$

□

Przykłady 1.

(1) Grupa (pseudo)ortogonalna $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p, q)$ (1) jest (jako zbiór) przeciwobrazem $\tau^{-1}(\{\mathbf{0}_n\})$ podzbioru domkniętego $\{\mathbf{0}_n\} \subset \mathbb{R}(p+q)$ względem odwzorowania (jawnie ciągłego)

$$\tau : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(p+q) \longrightarrow \mathbb{R}(p+q) : A \longmapsto A^{\mathrm{T}} \boxdot \mathbf{1}_{p,q} \boxdot A - \mathbf{1}_{p,q} ,$$

zapisanego przy użyciu macierzy

$$\mathbf{1}_{p,q} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p \text{ razy}}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{q \text{ razy}}) ,$$

jest przeto podgrupą domkniętą grupy Liego $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(p+q)$ z Przykł. **??** (4), czyli też (pod)grupą Liego. Grupa ta ma wyróżnioną podgrupę Liego

$$\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv \det{}_{(p+q)}^{-1}(\{1\}) ,$$

zwaną grupą specjalną ortogonalną.

W przypadku $pq = 0$ ta ostatnia podgrupa zadaje rozkład grupy ortogonalnej na składowe spójne

$$\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q)\,,$$

w którego zapisie

$$\mathsf{P}_{e_1} \;:\; \mathbb{R}^{\times p} \circlearrowleft \;:\; (v^1, v^2, \ldots, v^p) \longmapsto (-v^1, v^2, \ldots, v^p)$$

jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^1 = 0$.

W przypadku $pq \neq 0$ podgrupa $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q)$ rozkłada się na składowe spójne

$$\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q) = \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathsf{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q)\,,$$

przy czym $\mathsf{P}_{e_{p+1}}$ jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^{p+1} = 0$, a (pod)grupę Liego będącą składową spójną jedności $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q)$, zwaną **grupą specjalną ortogonalną ortochroniczną**, tworzą macierze zachowujące zarówno orientację podprzestrzeni $\mathbb{R}^{\times p} \times \{\mathbf{0}_q\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$, jak i orientację podprzestrzeni $\{\mathbf{0}_p\} \times \mathbb{R}^{\times q} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ (należy zwrócić uwagę, że przekształcenia ortogonalne zachowują każdą z tych podprzestrzeni, a to z racji określoności formy kwadratowej $\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}$ w ograniczeniu do każdej z nich). Ostatecznie otrzymujemy rozkład pełnej grupy ortogonalnej na składowe spójne w postaci

$$\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q) = \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathsf{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q)\,.$$