Wykład IX

2021/22

Naturalne operacje na reprezentacjach [illegible]:

Def. 10. Niech $\{(V_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ - reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{g}$.

SUMA PROSTA REPREZENTACJI to reprezentacja

$$\Big(\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha,\ \underbrace{\bigoplus_{\beta\in A}\rho_\beta}_{\text{"}\rho_\oplus\text{"}}\Big),$$

gdzie $pr_\alpha \circ \rho_\oplus = \rho_\alpha$

tzn. $\forall X\in\mathfrak{g}:\quad \rho_\oplus(X)(v_\alpha) = (\rho_\alpha(X)v_\alpha)$

Mamy dalej

Def. 11. Niech $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ – algebry Liego nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,
(V_α, ρ_α) – reprezentacja $\mathfrak{g}_\alpha$ dla $\alpha \in \{1, 2\}$.

ILOCZYN TENSOROWY REPREZENTACJI to reprezentacja algebry $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (!) dana w postaci

SPR !

$$\left(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 , \ \rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2) : (X_1, X_2) \longmapsto \rho_1(X_1) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \rho_2(X_2)\right)$$

Wprowadzamy nader istotne pojęcie (36)

<u>Def. 12.</u> Reprezentację (V, ρ) nazywamy (W PEŁNI) PRZYWIEDLNĄ / ROZKŁADALNĄ, gdy jest izomorficzna sumie prostej reprezentacji nieprzywiedlnych, tj. $\exists\, (V_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in A} : (V, \rho) \sim \bigoplus_{\alpha \in A} (V_\alpha, \rho_\alpha)$.

Algebra Liego ‚litość' każda (skończenie wymiarowa) reprezentacja jest w pełni przywiedlna, jest dzielona wierna W PEŁNI PRZYWIEDLNEJ / REDUKOWALNEJ. (37)

NB: Powyższa uwaga nie jest generyczna — większość klas algebr Liego, którymi zajmować się w dalszej części kursu.

Uporządkujmy obraz kategorii

Def. 13. Niechaj $\mathfrak{g}$ – rzeczywista algebra Liego, $(V,(\cdot|\cdot))$ – przestrzeń! [illegible] unitarna

> KONWENCJA: $(\cdot_1|\cdot_2)$ jest liniowa w $\cdot_2$!!!

Reprezentację (V,ρ) nazywamy **UNITARNĄ**, gdy $\forall X\in\mathfrak{g}:\ \rho(X)^\dagger = -\rho(X)$,

gdzie $\forall v,w\in V:\ (\rho(X)^\dagger(v)\,|\,w) := (v\,|\,\rho(X)(w))$.

Mamy zatem

<u>Stw. 12.</u> Dowolna reprezentacja unitarna na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej jest w pełni przywiedlna.

<u>D</u>: Niech (V,ρ) będzie unitarną reprezentacją skończenie wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$. Oznaczmy iloczyn skalarny na V przez $(\cdot|\cdot)$.

Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią $\mathfrak{g}$-niezmienniczą, a $W^\perp$ jej dopełnienie $(\cdot|\cdot)$-ortogonalne. Zachodzi

$$V = W \oplus W^\perp$$

Pokażemy, że $W^\perp$ także jest $\mathfrak{g}$-niezm.

Istotnie, $\forall (w,v) \in W \times W^\perp \; \forall X \in \mathfrak{g}$:

$$(w|\rho(X)v) \equiv (\rho(X)^\dagger(w)|v) = -(\rho(X)(w)|v)$$

$= 0$, gdyż $\rho(X)(w) \in W$ ($\Leftarrow W$ jest $\mathfrak{g}$-niezm.)

Jeśli (V, ϱ) NIE jest nieprzywiedlna, (41)
to istnieje $\{0\} \neq W \subsetneq V$, która jest
ϱ-niezm., a wtedy $V = W \oplus W^{\perp}$
i $W^{\perp}$ ϱ-niezm., czyli
$(W, \varrho|_{W^{(\perp)}})$ to (pod)reprezentacje
unitarne.
Przy tym albo $(W, \varrho|_W)$ nieprzywiedlna,
albo rozkłada się na $\tilde{W} \oplus \tilde{W}^{\perp}$. Analogicznie

możemy tezę stosować dla $W^\perp$.
Kontynuacja powyższej procedury prowadzi (w skończonej liczbie kroków) do pełnego rozkładu $V(\rho)$ na podreprezentacje nieprzywiedlne $\square$

Nader ważnym przykładem reprezentacji uniwersalnych algebr Liego są reprezentacje zwartych grup Liego. Zdążymy się o tym przekonać, w następnym

Def. 14. Niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$ i niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Nadto niech $R : G \xrightarrow[C^\infty]{} GL(V;\mathbb{K})$ będzie reprezentacją G na V, więc homomorfizmem grup Liego. Wówczas homomorfizm algebr Liego

$dR \equiv T_e R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ jest określony mianem REPREZENTACJI POCHODNEJ $\mathfrak{g}$ na V.

Mamy

Stw. 13. Przyjmijmy założ. Def. 14, jednocześnie dodatkowo, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i na V jest określona niezdegenerowana struktura hermitowska

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{(iloczyn skalarny)}.$$

Wówczas ilekroć R jest unitarna, tj.

$$\forall g \in G : \quad (\cdot|\cdot) \circ \big(R(g) \times R(g)\big) = (\cdot|\cdot) \Longleftrightarrow R(g)^{\dagger} = R(g)^{-1},$$

własność tę ma także reprezentacja pochodna dR.

D: skoro $\forall g \in G : R(g)^\dagger = R(g)^{-1}$,

to w szczególności

$$\forall_{\substack{X \in \mathfrak{g} \\ t \in \mathbb{R}}} : R\big(\exp^G(t \triangleright X)\big)^\dagger = R\big(\exp^G(-t \triangleright X)\big),$$

ale Stw. 2-3-4-7.11 o naturalności exp pozwala zapisać $R \circ \exp^G = \exp^{GL(V;\mathbb{K})} \circ dR$,

zatem

46

$$\forall_{\substack{X \in \mathfrak{g} \\ t \in \mathbb{R}}} : \exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(t \triangleright X)\big)^{\dagger} = \exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(-t \triangleright X)\big)$$

$\exp^{GL(V;\mathbb{K})}$ to „zwykły" eksponens

$$\big(dR(t \triangleright X)\big)^{\dagger} = \exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(t \triangleright X)^{\dagger}\big) \equiv \lambda_{dR(t \triangleright X)^{\dagger}}(1)$$

liniowość dR

$$= \lambda_{t \triangleright dR(X)^{\dagger}}(1)$$

Stw. 2-3-4-7.7

$$= \lambda_{dR(X)^{\dagger}}(t)$$

$$\exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(-t \triangleright X)\big) \equiv \lambda_{dR(-t \triangleright X)}(1)$$

liniowość dR

$$= \lambda_{t \triangleright dR(-X)}(1)$$

Stw. 2-3-4-7.7

$$= \lambda_{dR(-X)}(t)$$

Różniczkując powyższą tożsamość obustronnie w $t=0$, otrzymujemy pożądaną równość

$$\forall X \in \mathfrak{g}: \quad dR(X)^{\dagger} = dR(-X) = -dR(X).$$

$\blacksquare$

Pozostaje jeszcze ustalić naturalne okoliczności, w których mamy do czynienia z reprezentacjami unitarnymi grup Liego. O takich mówi ...

Tw. 1. [Weyla-Schura-Hurwitza o unitarności] (48)

Niech G będzie zwartą grupą Liego. Wówczas dowolna (skończenie wymiarowa) reprezentacja R grupy G na niezdegenerowanej (zespolonej) przestrzeni unitarnej $(V, (\cdot|\cdot))$ jest UNITARYZOWALNA, tj. istnieje na V niezdegenerowana forma hermitowska, wzgl. której R jest unitarna.

D: Niechaj $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$. Rozważmy dowolny element $\omega \in \Lambda^{\dim G}\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ i stowarzyszmy z nim formę RI

$$gh^{-1} \xrightarrow{P_h} g$$

$$\Omega \in \Omega^{\dim G}(G) \ : \ \Omega(g) := \omega \circ \left(T_g P_{g^{-1}} \times T_g P_{g^{-1}} \times \dots \times T_g P_{g^{-1}}\right), \ g \in G$$

Istotnie, $\forall_{g,h \in G}: \ \varphi_h^*\big(\Omega(g)\big) \equiv \Omega(g) \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G}$

$$\equiv \omega \circ T_g P_{g^{-1}}^{\times \dim G} \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}}\left(P_{g^{-1}} \circ P_h\right)^{\times \dim G}$$

$$= \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{hg^{-1}}^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{(gh^{-1})^{-1}}^{\times \dim G} \equiv \Omega(gh^{-1}).$$

Trywialność TG pozwala nam ustalić orientację o na G jako układ bazy $\Gamma(TG)$ odpowiadający $(R_{X_1}, R_{X_2}, \ldots, R_{X_{\dim G}})$ dla dowolnego układu bazowego $\{X_A\}_{A\in \overline{1,\dim G}}$ o własności

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{\dim G}) > 0 .$$

Mając Ω, możemy zadać całkę z dowolnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(G;\mathbb{R})$ wzorem

$$\int_G f := \int_{(G,o)} f\cdot\Omega \, ,$$

przy czym

$$f > 0 \implies \int_G f > 0$$ (względem zadanej przez Ω).

Bez trudu przekonujemy się, że całka ta jest p-niezmiennicza w rozumieniu tożsamości

$$\forall g \in G : \int_G p_g^* f = \int_G f \quad (\Leftarrow p_g^* \Omega = \Omega).$$

Rozważmy w szczególności całkowanie przez $V \times V$ rodziny funkcji

$f_{v,w} : G \longrightarrow \underset{\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}}{\underset{\cap}{\mathbb{K}}} : g \longmapsto \big(R(g)(v) \,|\, R(g)(w)\big),$ 52

$v, w \in V$

Dla $w = v \in V$ jest $f_{v,w} \geqslant 0$ $\quad$ (i $= 0 \Leftrightarrow v = 0$)

zatem $\int_G f_{v,v} \geqslant 0$ $\quad$ i $\quad = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

Df. $(\cdot\,|\,\cdot)^G : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} : (v,w) \longmapsto \int_G f_{v,w}$

zadaje niezdegenerowaną formę hermitowską (o ile tę własność miała forma $(\cdot|\cdot)$).

Tak zdefiniowana forma spełnia warunek $\forall g \in G \; \forall v,w \in V$:

$$(R(g)(v)|R(g)(w))^G \equiv \int_G f_{R(g)(v),\,R(g)(w)} \equiv \int_{(G,\Omega)} (R(\cdot)R(g)(v)|R(\cdot)R(g)(w))\,\Omega(\cdot)$$

$$= \int_{(G,\Omega)} (R(\cdot\cdot g)(v)|R(\cdot\cdot g)(w))\,\Omega(\cdot) \equiv \int_{(G,\Omega)} (R\circ P_g(\cdot)(v)|R\circ P_g(\cdot)(w))\,\Omega(\cdot)$$

$$\equiv \int_G P_g^* f_{v,w} = \int_G f_{v,w} \equiv (v|w)^G,$$

który oznacza właśnie, że reprezentacja R jest wzgl. niej unitarna $\square$

z połączenia dwóch ostatnich wyników (54)
wyprowadzimy

<u>Str. 14.</u> Reprezentacje pochodne algebry Liego zwartej grupy Liego są unitaryzowalne.

<u>D</u>: Oczywiste.

Te cechy algebr Liego grup zwartych sprawiają, że wkrótce skupimy uwagę na algebrach Liego z nimi prosto stowarzyszonych.

Twierdzenie sformułowaniem proste, lecz wielce przydatne

<u>Tw. 2.</u> (Lematy Schura) Niechaj $\mathfrak{g}$ - algebra Liego.

1° Niech (V_1, ρ_1) i (V_2, ρ_2) - jej reprezentacje nieprzyw.!

$$\chi : (V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2) \text{ - splatacz.}$$

Wówczas zachodzi dysjunkcja $\chi = 0 \,\underline{\vee}\, \chi$ izo.

56

2° Niech (V,ρ) – nieprzywiedlna reprezentacja G na zespolonej! przestrzeni wektorowej V

$$\chi : (V,\rho) \circlearrowleft \quad \text{– splatacz}$$

Wówczas $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \ \chi = \lambda \cdot id_V$.

3° Niech (V_1,ρ_1) i (V_2,ρ_2) – nieprzywiedlne reprezentacje G na zespolonych! przestrzeniach wektorowych V_1 i V_2, odp.

! $\neq 0$

$$\chi_1, \chi_2 : (V_1,\rho_1) \to (V_2,\rho_2) \quad \text{– splatacze.}$$

Wówczas $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \ \chi_1 = \lambda \cdot \chi_2$.

D: Ad 1° Proste ćwiczenie domowe (zbadać zmienniczość względem X i $\ln X$).

Ad 2° Mamy – $\forall X\in\mathfrak{g}$ – $X\circ\rho(X)=\rho(X)\circ X$, a ponieważ $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte, $X\in End_{\mathbb{C}}(V)$ ma co najmniej jedną wartość własną, $Sp X\neq\emptyset$. Wówczas $\forall X\in\mathfrak{g}$: $\rho(X)(V_\lambda(X))\subset V_\lambda(X)$, czyli

$V_\lambda(X) \subseteq V$ jest podprzestrzenią o-wymiarową. Przy tym $\lambda \in \operatorname{Sp} X$ oznacza, że $V_\lambda(X) \neq \{0_V\}$, zatem wobec nierozkładalności ϱ zachodzi

$$V = V_\lambda(X),$$

co jest oznacza, że

$$X = X\restriction_{V_\lambda(X)} = \lambda \triangleright \mathrm{id}_{V_\lambda(X)} = \lambda \triangleright \mathrm{id}_V.$$

Ad 3° skoro $\chi_2 \neq 0$, to na mocy
1° splotowy ten jest izomorfizmem.
Istnieje zatem χ_2^{-1} i $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} : (V_2, \rho_2) \circlearrowleft$
splotowy!
W świetle 2°, $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} = \lambda \triangleright \mathrm{Id}_{V_2}$
dla pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{C}$, a w takim
razie $\chi_1 = \lambda \triangleright \chi_2$. $\square$

III* Wyróżnione reprezentacje su(2).

Reprezentujemy su(2) na

$$V_n := \{ w \in \mathbb{C}_2[z_1, z_2] \mid \deg w = n \}$$

(jednorodne wielomiany stopnia 2)

$$w = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^{k}$$

Niech $X = X_{ij} \cdot E_{ij}$, $(E_{ij})^k_{\ e} = \delta^k_i \delta_{je}$, a wtedy

$$\rho_n(X)(w) := -\left(X_{11}z_1 + X_{12}z_2\right)\frac{\partial w}{\partial z_1} - \left(X_{21}z_1 + X_{22}z_2\right)\frac{\partial w}{\partial z_2}$$

Jedyne reprezentacje $sa(2)$.

Niech $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- baza $sa(2)$.

Wówczas

$$\rho_n(H) = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2$$

$$\rho_n(E_+) = -x_2\partial_1$$

$$\rho_n(E_-) = -x_1\partial_2$$

spełniają algebry Liego $su(2)$.

i dostajemy

wektor wagowy!

$$(*)\quad \begin{aligned} \rho_n(H)\left(x_1^{n-k}x_2^k\right) &= (-n+2k)\,x_1^{n-k}x_2^k \\ \rho_n(E_+)\left(x_1^{n-k}x_2^k\right) &= -(n-k)\,x_1^{n-k-1}x_2^{k+1} \\ \rho_n(E_-)\left(x_1^{n-k}x_2^k\right) &= -k\,x_1^{n-k+1}x_2^{k-1} \end{aligned}$$

Str. 15. $\forall n \geq 0 : (V_n, \rho_n)$ jest nieprzywiedlna. (63)

D: Wystarczy pokazać, iż każda dowolna $su(2)$ – niezm. podprzestrzeń W_n w V_n jest równa V_n. Niech $w \in W_n$ będzie postaci $w = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^k$, przy czym $\exists\, k \in \overline{0,n} : a_k \neq 0$.

Niech k_0 : najmniejszy indeks o niezerowym $a_{k_0} \neq 0$. Rozważmy

$$\rho_n(E_+)^{n-k_0} w = w_0 .$$

Operator $\rho_n(E_+)$ podnosi potęgę z_2 o 1, zatem $\rho_n(E_+)^{n-k_0}$ anihiluje wszystkie składniki w w oprócz $a_{k_0} z_1^{n-k_0} z_2^{k_0}$, ale $\rho_n(E_+)(z_1^{n-k} z_2^{k}) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $k = n$, zatem

$$\rho_n(E_+)^{n-k_0} w = \lambda_0 \cdot z_2^n$$

$$\lambda_0 \neq 0$$

Skoro zaś W_n jest $sl(2)$-modułem, to musi zawierać z_2^n. Teraz jednak $\rho_n(E_-)^k z_2^n$, $k \in \overline{0,n}$ są — na mocy (*) (str. 50) — niezerowymi skalarnymi krotnościami $z_1^k z_2^{n-k}$, zatem te należą do W_n. Ponieważ jednak tworzą one bazę V_n, przeto — istotnie — $W_n = V_n$. □

Przejdziemy teraz do dyskusji klasy algebr Liego o reprezentacjach poddających się stosunkowo łatwej klasyfikacji. Ich powszechność w zastosowaniach fizycznych uprawomocnia takie zawężenie naszych rozważań...

IV Elementy teorii algebr półprostych

Def. 15 Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego. Jeżeli istnieje zwarta grupa Liego K o algebrze Liego $\mathfrak{k}$ takiej, że $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, to algebrę $\mathfrak{g}$ nazywamy REDUKTYWNĄ. Jeśli ponadto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, to mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest PÓŁPROSTA.

Dla dowolnej półprostej algebry Liego $\mathfrak{g}$ algebrę $\mathfrak{k}$ nazywamy ZWARTĄ FORMĄ RZECZYWISTĄ $\mathfrak{g}$.

×

NB: W literaturze występują także inne (równoważne) definicje półprostoty, np.

* nieistnienie niezerowych ideałów przemiennych

** — " — " — rozwiązalnych

*** zerowość radykału (maksymalnego ideału rozwiązalnego)

**** uzgodnienie FORMY KILLINGA (69)

$$\kappa : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$$

$$: (X,Y) \longmapsto \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\left[X,\left[Y,\cdot\right]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}}\right).$$

Wykazanie równoważności powyższych definicji jest wysoce nietrywialne – w szczególności wymaga poza ramy niniejszego wykładu, w którym wybieramy definicję topologiczną na najszybsze dotarcie do fizycznie istotnych rezultatów...

<u>Przykłady</u>: (1) $sl(n;\mathbb{C})$, $n \geq 2$

(2) $so(n;\mathbb{C})$, $n \geq 3$

(3) $sp(n;\mathbb{C})$, $n \geq 1$

są półproste.

(1') $gl(n;\mathbb{C})$

(2') $so(2;\mathbb{C})$

są redukcyjne, lecz nie półproste.

(ćw. ĆWICZENIA!)

Aby móc postąpić dalej, musimy przyjrzeć się bliżej szczególnej reprezentacji pochodnej, którą wprowadzimy w

Def. 16 Niech G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$. REPREZENTACJA DOŁĄCZONA $\mathfrak{g}$ na sobie to reprezentacja pochodna $(ad \equiv dT_eAd, \mathfrak{g})$ stowarzyszona z REPREZENTACJĄ DOŁĄCZONĄ $(T_eAd, \mathfrak{g})$.

Z powyższym zagadnieniem, o fundamentalnym
znaczeniu w dalszej części kursu, oswaja nas

Str. 16 Przypominamy zapis Def. 16.

$$\forall X\in\mathfrak{g} \ : \ \mathrm{ad}_X \equiv \mathrm{ad}(X) = [X,\cdot]_{\mathfrak{g}}.$$

D: Rozważmy działanie dołączone G na $\mathfrak{g}$:

$$T_e\mathrm{Ad}_g \ : \ \mathfrak{g}\equiv T_eG \circlearrowleft \quad \text{dla} \quad \mathrm{Ad}_g : G \circlearrowleft : h \mapsto g\cdot h\cdot g^{-1}$$

o punkcie stałym $\mathrm{Ad}_g(e)=e$.

Zachodzi $\forall X\in\mathfrak{g} \ : \ T_e\mathrm{Ad}_g(X) \equiv T_{g^{-1}}\ell_g \circ T_e P_{g^{-1}}(X)$.

Przypomnijmy z dowodu Stw. 2.3.4.7.1 postać operacji binarnej w grupie Liego $Tm : TG \times TG \to TG$,

$$T_{(g,h)} m = T_g P_h \circ pr_1 + T_h l_g \circ pr_2 ,$$

z której wyprowadzamy tożsamości

$$T_e P_{g^{-1}}(X) = T_{(e,g^{-1})} m \left(X, 0_{T_{g^{-1}}G} \right), \qquad \forall \begin{array}{l} g \in G \\ X \in \mathfrak{g} \\ v \in T_{g^{-1}}G \end{array}$$

$$T_{g^{-1}} l_g (v) = T_{(g,g^{-1})} m \left(0_{T_g G}, v \right).$$

Te pozwalają zapisać

$$T_e \mathrm{Ad}_g(X) = 0_{TG}(g) \cdot X \cdot 0_{TG}(g^{-1})$$

co wobec gładkości Tm oraz cięcia zerowego $0_{TG} \in \Gamma(TG)$ dowodzi gładkości działania $T_e \mathrm{Ad}$, niezbędnej dla zdefiniowania działania ad jako działania pochodnego.

W następnym wykładzie wykorzystamy Stw. 2-3-4-7. (oraz 7.) 6 i 12.

aby zapisać – dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ – (75)

$$[L_X, L_Y]_{\Gamma(TG)} \equiv \mathcal{L}_{L_X} L_Y \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{L_X}(-t;\cdot)_* L_Y$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{\exp^G(-t\triangleright X)*} L_Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(-t\triangleright X)^{-1}}(Y)}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t\triangleright X)}(Y)}$$, a stąd

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} \equiv [L_X, L_Y]_{\Gamma(TG)}(e) \overset{\downarrow}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t\triangleright X)}(Y)}(e)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t\triangleright X)}(Y) \equiv d\, T_e \mathrm{Ad}(X)(Y). \quad \square$$

Może rozwiązanie porady tej do

<u>Stw. 17.</u> W dotychczasowej notacji zachodzi równość $T_eAd \circ \exp^G = \exp^{GL(\mathfrak{g})} \circ ad$.

<u>D</u>: Wystarczy skorzystać ze Stw. 2-3-4-7.11 i Stw. 16. □

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "T_eAd"] & GL(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp^G"] \arrow[r, "dT_eAd \,=\, ad"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp^{GL(\mathfrak{g})}"'] \end{tikzcd}$$

Powracamy stanowi punkt wyjścia do fundamentalnego