

**GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II**  
(8., 15. I 22. MARCA 2022 R.)

1. ARGUMENT DIRACA–FEYNMANA

Przedmiotem naszej analizy będzie mechanika punktu materialnego obdarzonego masą spoczynkową  $m \in \mathbb{R}_{>0}$  oraz ładunkiem elektrycznym  $q \in \mathbb{R}$  w rozmaitości różniczkowalnej  $(M, \hat{\mathcal{A}})$  będącej nośnikiem pola grawitacyjnego reprezentowanego przez metrykę  $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$  o sygnaturze  $(D, 1)$  oraz pola elektromagnetycznego reprezentowanego przez tensor Maxwella<sup>1</sup>  $F \in \Omega^2(M)$ . Mamy tu zatem do czynienia z teorią pola nad jednowymiarową czasoprzestrzenią  $\Lambda = ]t_0, t_1[ \subset \mathbb{R}$  (tzw. linią świata) z metryką o sygnaturze  $(0, 1)$ .

Celem naszym będzie zrozumienie struktury różniczkowo-geometrycznej koniecznej do zdefiniowania funkcjonału działania

$$S : \Gamma(\Lambda \times M) \equiv C^\infty(]t_0, t_k[, M) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : x \longmapsto S[x]$$

określonego na przestrzeni gładkich ścieżek w rozmaitości (pseudo)riemannowskiej  $(M, g)$ , dla którego zasada najmniejszego działania przy warunku brzegowym Dirichleta<sup>2</sup> odtwarza (relatywistyczną) formułę Lorentza  $(\tau \in ]t_0, t_k[)$

$$(1) \quad m g_{\lambda\mu}(x(\tau)) \left( \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}(x(\tau)) \frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau) \frac{dx^\rho}{d\tau}(\tau) \right) = q F_{\lambda\mu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)$$

na 4-siłę działającą na punkt materialny o masie  $m$  i ładunku  $q$ , z przyczynkiem od pola grawitacyjnego o lokalnej reprezentacji współrzędniowej  $g(x) = g_{\mu\nu}(x) \triangleright dx^\mu \otimes dx^\nu$  determinowanym przez symbole Christoffela powiązania metrycznego na wiązce stycznej

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} (g^{-1})^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}).$$

Uwzględnwszy geometrię pola elektromagnetycznego opisaną równaniem

$$dF = 0,$$

stwierdzamy – na gruncie Lematu Poincarégo – istnienie lokalnego potencjału  $A \in \Omega^1(\mathcal{O})$  tensora Maxwella  $F$  na dowolnym ściągającym obszarze  $\mathcal{O} \subset M$ . Rzecz jasna, każdą trajektorię (otwartą) punktu materialnego możemy zanurzyć w pewnym jej ściągającym otoczeniu tubularnym w  $M$  będącym nośnikiem potencjału  $A$ , a wtedy łatwo przekonujemy się, że stosowny funkcjonał działania można wybrać w postaci

$$(2) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_\Lambda \text{Vol}(\Lambda) x^* g(\hat{t}, \hat{t}) + q \int_\Lambda x^* A + 2\pi\mathbb{Z},$$

<sup>1</sup>Związek tensora Maxwella z obiektami modelującymi pola: elektryczne i magnetyczne w czasoprzestrzeni Minkowskiego  $\mathbb{R}^{3,1} \ni (x^\mu) \equiv (t, x, y, z)$  (z wyróżnioną współrzędną czasową  $t$ ) w XIX-wiecznym ich opisie fenomenologicznym (w próżni, przy wszystkich stałych materialnych i prędkości światła przezornie włączonych w definicję samych pól), stanowiącym podstawę unifikacji teoretycznej zaproponowanej przez Faradaya i Maxwella, określa formuła

$$F(t, x^l) \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(t, x^i) dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv -E_i(t, x^l) dt \wedge dx^i + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B^i(t, x^l) dx^j \wedge dx^k,$$

w której składowe  $F_{i0} = E_i$  oraz  $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$  identyfikujemy – odpowiednio – ze składowymi 1-formy natężenia pola elektrycznego  $E(t, x^l) = E_i(t, x^l) dx^i$  oraz składowymi pola indukcji magnetycznej  $B(t, x^l) = B^i(t, x^l) \partial_i$ .

<sup>2</sup>Można narzucić na odwzorowania także inne warunki brzegowe, które zapewnią stacjonarność funkcjonału działania przy spełnionych równaniach Eulera–Lagrange’a wzdłuż ścieżki.

w której zapisie  $\widehat{t} = \partial_\tau$  to wektor styczny do linii świata  $\Lambda$ , a  $\text{Vol}(\Lambda) \equiv \text{Vol}(\Lambda; -1)$  to forma objętości<sup>3</sup> na  $\Lambda$ . Powyższa formuła stanowi elementarny punkt wyjścia do naszych dalszych rozważań.

Łatwo wyobrazić sobie okoliczności, w których skonstruowany tu opis lagranżowski mechaniki punktu materialnego przy użyciu *globalnego* (wzdłuż trajektorii) potencjału tensora Maxwella staje się niewystarczający. Ich zaistnienie wymaga obecności w przestrzeni  $M$  „defektów topologicznych”, które czynią ją niejednostopną, tj. prowadzą do pojawienia się w niej nieściągalnych krzywych zamkniętych – o tym, że rozważania takie nie są bynajmniej pozbawione sensu empirycznego, przekonuje lektura klasycznej pracy [AB59] Aharonova i Bohma. W takim przypadku wcześniejszy argument dotyczący *pojedynczej* trajektorii<sup>4</sup> otwartej pozostaje w mocy (z przyczyn fundamentalnych nie rozpatrujemy czasoprzestrzeni dopuszczających zamknięte krzywe czasowe), wpływ nietrywialnej topologii czasoprzestrzeni ujawnia się natomiast, ilekroć porównujemy wkłady do działania pochodzące od *różnych trajektorii o wspólnym początku i końcu*. Jak zobaczymy już wkrótce, porównanie takie nabiera sensu ilościowego w rozważaniach kwantowomechanicznych dotyczących prawdopodobieństwa wyboru trajektorii przez punkt materialny o dynamice (klasycznej) opisanej przez funkcjonal działania  $S$ . Zważywszy addytywność względem dziedziny całkowania całki Riemanna, której używamy w definicji funkcjonału działania, możemy czysto formalnie reprezentować różnicę dowolnej pary trajektorii fizykalnych (w grupoidzie ścieżek w  $M$ ) jako pętlę w  $M$ , dlatego też w dalszych naszych rozważaniach w pierwszej kolejności zajmiemy się ustaleniem struktury niezbędnej do nadania sensu funkcjonałowi działania na przestrzeni „trajektorii” spełniających warunek brzegowy postaci

$$x(t_0) = x(t_k),$$

czyli na przestrzeni pętli,

$$x \in C^\infty(\mathbb{S}^1; M) \equiv LM.$$

Dopiero po zbadaniu tej klasy zanurzeń linii świata w czasoprzestrzeni  $M$  powrócimy do konstrukcji spójnego opisu trajektorii otwartych, którego postać zapostulowana uprzednio będzie wymagała – jak pokaże dowodnie nasza analiza – pewnych poprawek natury strukturalnej.

Spróbujemy zatem skonstruować funkcjonal działania na przestrzeni pętli  $LM$  o tej własności (jedynej istotnej), że zasada najmniejszego działania zastosowana do niego daje równania (1) jako równania Eulera–Lagrange’a. Przy tym na gruncie naszej dotychczasowej dyskusji nie możemy zakładać, że pętle leżą w obszarze istnienia gładkiego potencjału pola elektromagnetycznego. W świetle Twierdzenia Weila–de Rhama (o istnieniu dobrego pokrycia na rozmaitości klasy  $C^2$ ) możemy natomiast zawsze wybrać *dobre* pokrycie otwarte  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości  $M$  (tj. pokrycie o tej własności, że wszystkie niepuste przecięcia jego elementów są ściągalne), które daje nam do ręki rodzinę lokalnych potencjałów (w ogólności żaden z nich nie przedłuża się do gładkiej 1-formy na rozmaitości  $M$ )

$$F \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} := dA_i, \quad A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i), \quad i \in I.$$

Uczyniwszy to, dokonajmy następnie **tesselacji** linii świata, czyli jej podziału na odcinki  $e \subset \mathbb{S}^1$  (tworzące zbiór **krawędzi tesselacji**  $E$ ) spełniające układ warunków

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{e \in E} e = \mathbb{S}^1 \\ \forall_{e_1, e_2 \in E} : \left( e_1 = e_2 \quad \vee \quad e_1 \cap e_2 = \emptyset \quad \vee \quad \exists!_{v \in \mathbb{S}^1} : e_1 \cap e_2 = \{v\} \quad \vee \quad \exists!_{v_1, v_2 \in \mathbb{S}^1} : e_1 \cap e_2 = \{v_1, v_2\} \right) \end{array} \right. ,$$

zakładając przy tym, że zbiór krawędzi tesselacji i ich przecięć (zwanych **wierzchołkami tesselacji** i tworzących zbiór wierzchołków  $V$ ), który będziemy oznaczać symbolem

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} = E \cup V,$$

<sup>3</sup>Wypisana tu postać formy objętości zawiera metrykę na linii świata jedynie *implicite*, w postaci globalnie trywialnej. Istnieje ogólniejsze sformułowanie rozważanej teorii, zadawane przez tzw. funkcjonal (typu) Poljakowa, który pozwala uwzględnić nietrywialną metrykę na linii świata i tym samym przejść do opisu niezmienniczego względem dowolnych reparametryzacji linii świata zachowujących jej orientację.

<sup>4</sup>Podkreślmy: w definicję trajektorii klasycznej jest wpisany czasowy charakter jej wektora stycznego.

spełnia warunek

$$\forall_{e \in E} \exists_{i_e \in I} : x(e) \subset \mathcal{O}_{i_e}$$

dla ustalonej pętli  $x \in LM$ . Wówczas spełniony jest też oczywiście warunek

$$\forall_{v \in V} \exists_{i_v \in I} : x(v) \in \mathcal{O}_{i_v},$$

otrzymujemy zatem odwzorowanie

$$i. : \Delta_{\mathbb{S}^1} \longrightarrow I.$$

Tesselację o podanej cesze określimy mianem **podporządkowanej pokryciu**  $\mathcal{O}$ . Tak przygotowani możemy już wypisać pierwszą propozycję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] := \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}.$$

Kłopot z powyższą definicją polega na jej zależności od dokonanych przez nas *całkowicie arbitralnych* wyborów: otwartego pokrycia (możemy je np. poddawać dalszemu rozdrabnianiu bez utraty jego dobroci), lokalnego potencjału  $A_{i_e}$ , (jest on określony jedynie z dokładnością do lokalnie gładkiej 1-fomy dokładnej) oraz tesselacji podporządkowanej danemu pokryciu dobremu (wszak możemy przesuwac wierzchołki tesselacji tak, by ich obrazy pozostawały w wyjściowych przecięciach elementów pokrycia). Okazuje się, że zależności od wszystkich tych wyborów są ze sobą powiązane (ćwiczenie!), skupimy się zatem na tym ostatnim. Rozważmy wierzchołek  $v_{12}$ , w którym spotykają się krawędzie  $e_1$  (wchodzący w sensie orientacji indukowanej z  $\mathbb{S}^1$ ) i  $e_2$  (wychodzący). Wybierzmy punkt  $v'_{12} \in e_2 \setminus \{v_{12}\}$  tak, by było  $x(v'_{12}) \in \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}$  ( $\exists x(v_{12})$ ) i utwórzmy nową tesselację  $\Delta'_{\mathbb{S}^1}$  zamieniając w  $\Delta_{\mathbb{S}^1}$  trójkę  $(e_1, e_2, v_{12})$  na trójkę  $(e'_1 = e_1 \cup \delta, e'_2 = e_2 \setminus \delta, v'_{12})$ , gdzie  $\delta$  jest odcinkiem łączącym  $v_{12}$  z  $v'_{12}$ . Porównując wartości funkcjonału działania otrzymane dla każdej z dwu tesselacji, otrzymujemy

$$S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] = q \int_{\delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* (A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}}).$$

Zważywszy, że  $x(\delta) \subset \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}$ , mamy w istocie do czynienia z 1-formą  $(A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}}$ . Jednakowoż wobec ściągłości każdego (niepustego) przecięcia  $\mathcal{O}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  znajdujemy na nim lokalnie gładką funkcję  $f_{ij}$  spełniającą równość

$$(3) \quad (A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} =: df_{ij}, \quad f_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij}, \mathbb{R}),$$

przy czym możemy zawsze tak wybrać te funkcje, aby spełniony był dodatkowy warunek  $f_{ji} = -f_{ij}$ . Wykorzystując poczynioną obserwację w połączeniu z Twierdzeniem Stokesa, możemy zatem zapisać

$$\begin{aligned} S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] &= q \int_{\delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* df_{i_{e_2} i_{e_1}} = q \int_{\partial \delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* f_{i_{e_2} i_{e_1}} \\ &\equiv q (f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12})). \end{aligned}$$

Wnioskujemy, że różnica porównywanych funkcjonałów zależy w sposób *funkcjonalny* (a przy tym zasadniczo dowolny) od arbitralnego wyboru położenia wierzchołków tesselacji, co jest sytuacją niedopuszczalną (taka zależność miałaby wpływ na dynamikę). Zanim ją naprawimy, kierując się wprost wnioskami z przeprowadzonego powyżej rachunku, przyjrzyjmy się bliżej funkcjom  $f_{ij}$ . Oto dla każdego (niepustego) przecięcia  $\mathcal{O}_{ijk}$ ,  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$  otrzymujemy tożsamość

$$d(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (A_k - A_j - A_k + A_i + A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = 0,$$

która wobec ściągłości przecięcia oznacza istnienie lokalnych stałych  $N_{ijk}$  spełniających równości

$$(4) \quad (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = N_{ijk}, \quad N_{ijk} \in \mathbb{R},$$

przy czym stałe te możemy zawsze wybrać tak, aby był spełniony warunek skośnej symetrii  $N_{ijk} = N_{[ijk]}$ . Wykorzystując ostatnią równość, która implikuje – między innymi –

$$f_{i_{e_2} i_{e_1}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} = (f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} + N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}},$$

możemy wypisać poprawioną wersję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] := \frac{m}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right)$$

w następującej konwencji:  $\varepsilon_{ev} = 1$ , gdy  $v$  jest na końcu  $e$  (w sensie indukowanej orientacji  $e$ ) i  $\varepsilon_{ev} = -1$ , gdy  $v$  jest na początku  $e$ . Zmiana położenia wierzchołka tesselacji zmienia wartość poprawionego działania o stałą

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] &= q \left( f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12}) \right) \\ &+ q \left( f_{i_{e_1} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \right) \\ &= q \left( N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v'_{12}}} - N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}} \right) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

co w standardowym podejściu do lagranżowskiego opisu mechaniki klasycznej jest całkowicie do przyjęcia. Zauważmy, że obecna definicja jest też niezmiennicza (w sensie szerszym, sprecyzowanym wyżej) względem dopuszczalnych redefinicji potencjałów lokalnych,  $A_i \mapsto A'_i$ , które wobec ściągłości  $\mathcal{O}_i$  wymagają istnienia lokalnie gładkich funkcji  $g_i$  spełniających równości

$$(5) \quad A'_i - A_i =: db_i, \quad b_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i, \mathbb{R}).$$

Istotnie, takiej redefinicji musi towarzyszyć redefinicja funkcji  $f_{ij}$ ,

$$(6) \quad f'_{ij} = f_{ij} + (b_j - b_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} + d_{ij}, \quad d_{ij} \in \mathbb{R},$$

która pozwala uzgodnić formuły (3) z ich odpowiednikami dla obiektów primowanych, a zatem zastąpienie obiektów nieprimowanych primowanymi w zapisie  $S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}$  jest źródłem poprawki

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{S^1}}^{(1)'}[x] &\equiv \frac{m}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A'_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f'_{i_e i_v} \circ x(v) \right) \\ &= S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left[ \int_{\partial e} b_{i_e} \circ x + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} ((b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \right] \\ &\equiv S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_e} \circ x(v) + (b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\ &\equiv S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_v} \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\ &= S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} d_{i_e i_v}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika stąd, że każdy wierzchołek jest zarazem końcem jednej z krawędzi tesselacji ( $\varepsilon_{ev} = 1$ ), jak i początkiem jej następnika ( $\varepsilon_{ev} = -1$ ). Naturalnie, także dopuszczalne redefinicje funkcji  $f_{ij}$  cofniętych do wierzchołków tesselacji niezwiązane z redefinicjami potencjałów, czyli przesunięcia o stałe (lokalne), nie mają fizycznie obserwowalnych konsekwencji (klasycznie), pozostaje zatem upewnić się, że nasza nowa definicja funkcjonału działania jest niezmiennicza ze względu na rozdrabnianie użytego w niej pokrycia  $\mathcal{O}$  i skorelowane z nim rozdrobnienie tesselacji linii świata, wzgl. na rozdrabnianie samej tylko tesselacji na odcinku, którego obraz względem zanurzenia  $x$  leży w przecięciu więcej niż dwóch elementów wyjściowego pokrycia. Rzecz jasna, wystarczy w tym celu sprawdzić zmianą wartości funkcjonału  $S^{(1)}$  przy elementarnym przejściu zilustrowanym na Rys. 1.

Oznaczywszy tesselację uzyskaną w wyniku zobrazowanego rozdrobnienia (z prawej strony) symbolem  $\Delta_{S^1}^{\text{ref}}$ , wyznaczamy

$$\begin{aligned} &S_{\Delta_{S^1}^{\text{ref}}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] \\ &= q \left( \int_{e_{12} \setminus e_2} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_2})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_1}}) + \int_{e_{12} \setminus e_1} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_1})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_2}}) \right) \\ &+ f_{i_{e_1} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_{12}} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \end{aligned}$$

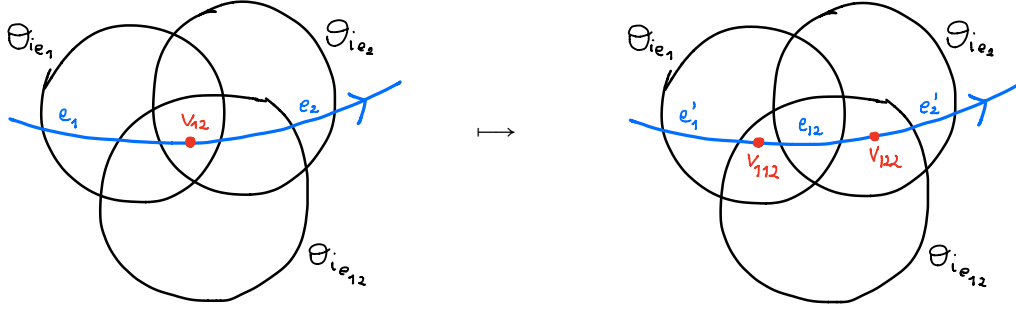


FIGURE 1. Rozdrobnienie tesselacji fragmentu (zorientowanej) linii świata w obszarze czasoprzestrzeni pokrytym przez trzy zbiory otwarte:  $O_{i_{e_1}}$ ,  $O_{i_{e_2}}$  i  $O_{i_{e_{12}}}$ .

$$\begin{aligned}
& -f_{i_{e_2}i_{v_{112}}} \circ x(v_{122}) - f_{i_{e_1}i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2}i_{v_{12}}} \circ x(v_{12})) \\
= & q(f_{i_{e_1}i_{e_{12}}} \circ x(v_{12}) - f_{i_{e_1}i_{e_{12}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_2}i_{e_{12}}} \circ x(v_{122}) \\
& -f_{i_{e_2}i_{e_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_1}i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_{12}}i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_{12}}i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \\
& -f_{i_{e_2}i_{v_{112}}} \circ x(v_{122}) - f_{i_{e_1}i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2}i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_{12}}i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \\
& -f_{i_{e_{12}}i_{v_{12}}} \circ x(v_{12})) \\
= & q(N_{i_{e_1}i_{e_{12}}i_{v_{12}}} - N_{i_{e_2}i_{e_{12}}i_{v_{12}}} - N_{i_{e_1}i_{e_{12}}i_{v_{112}}} + N_{i_{e_1}i_{e_{12}}i_{v_{122}}}) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

W standardowym podejściu do lagranżowskiego opisu mechaniki klasycznej możemy zatem uznać otrzymany tu wynik poprawiania wyjściowej definicji funkcjonału działania za satysfakcjonujący i przyjąć jako rygorystyczną definicję tegoż funkcjonału dla zamkniętej linii świata (o wskazanym wcześniej statusie teoretycznym) w ogólnej sytuacji topologicznej formułę

$$(7) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\hat{t}, \hat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right).$$

Z punktu widzenia mechaniki klasycznej problem, przed jakim stanęliśmy na początku niniejszego rozdziału, można uznać za (konstruktywnie) rozwiązany, a uzyskany opis zjawiska propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w topologicznie nietrywialnym polu elektromagnetycznym – za rygorystyczny i kompletny. Ażeby postąpić dalej w rozpoczętej tu rekonstrukcji struktury różniczkowo-geometrycznej stowarzyszonej z polem elektromagnetycznym, musimy wyjść poza ramy formalne teorii klasycznej i ustalić bezpośredni związek klasycznego funkcjonału działania z teorią kwantową. Związek taki wyprowadził Dirac w pracy [Dir33] z 1933 r. (jego zapowiedź można też dostrzec we wcześniejszych pracach Brillouina, Eckarta, Kramersa, Wentzela i przede wszystkim Van Vlecka), po czym jego idea została podchwycona i rozwinięta przez Feynmana w jego pracy doktorskiej z 1942 r. pt. “The Principle of Least Action in Quantum Mechanics”, patrz: [Bro05], stając się podstawą konstrukcji Feynmana „sumy po historiach”, sformułowanej w wersji zasadniczo (konceptualnie) kompletnej w pracy [Fey48] z roku 1948. Prześledzimy obecnie pokrótce heurzę Diraca, co pozwoli nam zrozumieć kontekst, w jakim funkcjonal działania pojawia się w opisie kwantowomechanicznym opisywanej przezeń dynamiki klasycznej.

Rozważmy układ fizyczny o klasycznych zmiennych kanonicznie sprzężonych  $(q^i, p_i)$ ,  $i \in \overline{1, N}$  ( $N \in \mathbb{N}$  określa tutaj liczbę niezależnych stopni swobody w układzie, których zakresu – odpowiednio  $Q \subset \mathbb{R}^{\times N}$  i  $P \subset \mathbb{R}^{\times N}$  – nie precyzujemy na przyjętym tu poziomie ogólnikowości argumentu) oraz o przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , w której wyróżniamy dwie bazy (zapisane w notacji bra-ket Diraca): bazę stanów własnych  $|q\rangle \equiv |q^1, q^2, \dots, q^N\rangle$  operatorów położenia  $\widehat{q}^i$ ,

$$\widehat{q}^i |q\rangle = q^i \triangleright |q\rangle,$$

oraz bazę stanów własnych  $|p\rangle \equiv |p_1, p_2, \dots, p_N\rangle$  operatorów pędu  $\widehat{p}_i$ ,

$$\widehat{p}_i |p\rangle = p_i \triangleright |p\rangle.$$

Pośród endomorfizmów  $\mathcal{H}$  wyróżnione miejsce zajmuje hamiltonian

$$\widehat{H} \equiv H_{\hbar}(\widehat{q}, \widehat{p})$$

układu kwantomechanicznego, będący pewną analityczną deformacją wiernej transkrypcji klasycznego hamiltonianu  $H(q, p) \mapsto H(\widehat{q}, \widehat{p})$  zależną od parametru deformacji  $\hbar$  (uwzględniającą nieprzemienność kwantowych operatorów  $\widehat{q}$  i  $\widehat{p}$ ) i określający unitarną ewolucję w czasie stanów w obrazie Schrödingera według formuły

$$|X(t_2)\rangle = e^{-\frac{i(t_2-t_1)\triangleright\widehat{H}}{\hbar}} |X(t_1)\rangle, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad X \in \{\widehat{q}, \widehat{p}\}.$$

Mamy też na  $\mathcal{H}$  formy liniowe  $\langle \widehat{q}|$  i  $\langle \widehat{p}|$  dualne do  $|\widehat{q}\rangle$  i – odpowiednio –  $|\widehat{p}\rangle$  (w sensie ścisłym określanym przez strukturę modelu fizycznego, w szczególności zaś – przez postać jego przestrzeni konfiguracyjnej). Zapiszmy dalej – za Dirackiem – propagator pomiędzy stanem referencyjnym  $|\widehat{q}_0\rangle$  a stanem  $|\widehat{q}\rangle$  w czasie  $t$  jako

$$(8) \quad e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\hbar}} := \langle \widehat{q}| e^{-\frac{it\triangleright\widehat{H}}{\hbar}} |\widehat{q}_0\rangle \equiv \langle \widehat{q}|\widehat{q}_0(t)\rangle$$

przy użyciu pewnej funkcji  $\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}$  o wartościach zespolonych, zawierającej w swej części urojonej proporcjonalnej do stałej Plancka  $\hbar$  informację o amplitudzie prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy rzeczonymi stanami, a w części rzeczywistej – informację o fazie propagatora. Propagator (albo inaczej funkcja falowa) spełnia równanie Schrödingera,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \widehat{q}|\widehat{q}_0(t)\rangle &= \langle \widehat{q}|\widehat{H} \circ e^{-\frac{it\triangleright\widehat{H}}{\hbar}} |\widehat{q}_0\rangle = \int_Q d\widehat{q}_p \langle \widehat{q}|\widehat{H}|\widehat{q}_p\rangle \langle \widehat{q}_p| e^{-\frac{it\triangleright\widehat{H}}{\hbar}} |\widehat{q}_0\rangle \\ &= \int_Q d\widehat{q}_p \langle \widehat{q}|\widehat{H}|\widehat{q}_p\rangle \langle \widehat{q}_p|\widehat{q}_0(t)\rangle \equiv \widehat{H}(\langle \widehat{q}|\widehat{q}_0(t)\rangle), \end{aligned}$$

to zaś tłumaczy się na równanie Hamiltona–Jacobiego dla  $\widetilde{S}$ , oto bowiem np. w reprezentacji (albo ściślej polaryzacji) położeniowej jest

$$-\frac{\partial \widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, \cdot)}{\partial t}(t) \cdot e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\hbar}} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, \cdot)}{\hbar}}(t) = \widehat{H}\left(e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}}\right)(\widehat{q}) \equiv H_{\hbar}(\widehat{q}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \widehat{q}})\left(e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}}\right)(\widehat{q}),$$

gdzie  $\frac{\partial}{\partial \widehat{q}} \equiv (\frac{\partial}{\partial q^1}, \frac{\partial}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^N})$ , ponieważ zaś prawdziwe są tożsamości

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial \widehat{q}} \left( e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}} \right)(\widehat{q}) &= \frac{\partial \widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\partial \widehat{q}} e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\hbar}}, \\ (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \widehat{q}})^2 \left( e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\hbar}} \right)(\widehat{q}) &= \left( \frac{\partial \widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\partial \widehat{q}} \right)^2 e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\hbar}} + O(\hbar), \\ &\vdots \\ (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \widehat{q}})^n \left( e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\hbar}} \right)(\widehat{q}) &= \left( \frac{\partial \widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\partial \widehat{q}} \right)^n e^{\frac{i\widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, t)}{\hbar}} + O(\hbar), \\ &\vdots \end{aligned}$$

przeto ostatecznie otrzymujemy – przy poczynionym już uprzednio założeniu analitycznej zależności hamiltonianu od pędów uogólnionych – równość

$$-\frac{\partial \widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\widehat{q}, \cdot)}{\partial t}(t) = H_{\hbar}\left(\widehat{q}, \frac{\partial \widetilde{S}_{\widehat{q}_0}(\cdot, t)}{\partial \widehat{q}}(\widehat{q})\right) + O(\hbar),$$

która w granicy  $\hbar \rightarrow 0$  przechodzi w klasyczne równanie Hamiltona–Jacobiego

$$\begin{cases} -\frac{\partial S_{\vec{q}_0}(\vec{q}, \cdot)}{\partial t}(t) = H(\vec{q}, \vec{p}) \\ \vec{p} \equiv \frac{\partial S_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\partial \vec{q}}(\vec{q}) \end{cases}$$

dla  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \widetilde{S}_{\vec{q}_0} = S_{\vec{q}_0}$ . Jeśli teraz uwzględnic powyższe w (oczywistym) zapisie różniczki zupełnej odwzorowania  $S_{\vec{q}_0}$ ,

$$dS_{\vec{q}_0} = \frac{\partial S_{\vec{q}_0}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S_{\vec{q}_0}}{\partial t} dt = p_i dq^i - H dt,$$

to dostajemy równanie różniczkowe

$$\frac{dS_{\vec{q}_0}}{dt} = p_i \frac{dq^i}{dt} - H \equiv L,$$

przy czym wyrażenie po prawej stronie znaku równości identyfikujemy jako klasyczny lagranżjan teorii,

$$S_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t) = \int_0^t d\tau L(\tau, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) \equiv S_{\vec{q}_0}[\vec{q}].$$

Koniec końców otrzymujemy zatem wyrażenie

$$\langle \vec{q} | e^{-\frac{it}{\hbar} \widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle = e^{\frac{iS_{\vec{q}_0}[\vec{q}]}{\hbar}} \cdot e^{\Delta_h(\vec{q}, t; \vec{q}_0)},$$

w którym podwiodąca poprawka  $\Delta_h(\vec{q}, t; \vec{q}_0) \in \mathbb{C}$  jest rzędu  $\hbar^0$ .

Na obecnym etapie możemy już doprecyzować wcześniejszą uwagę dotyczącą obserwowalnych konsekwencji wiodącego (w reżymie  $\hbar \approx 0$ ) wkładu do wyrażenia na kwantowomechaniczny propagator klasycznego pochodzącego od klasycznego funkcjonału działania obliczonego na trajektorii układu fizykalnego. Na gruncie interpretacji Borna tegoż propagatora stwierdzamy więc, że wkład taki jest obserwowalny dopiero w sytuacji, w której istnieje kilka trajektorii klasycznych odpowiadających *różnym* wartościom funkcjonału działania. W takiej sytuacji dla każdej pary trajektorii:  $\vec{q}_1(t), \vec{q}_2(t)$ ,  $t \in [0, T]$  możemy oczekiwać interferencji propagatorów (funkcji falowych) o amplitudzie (gęstości prawdopodobieństwa)

$$\begin{aligned} A &= \left| 1 + e^{\frac{i(S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_2] - S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_1])}{\hbar}} \right|^2 \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)) = \left( 1 + \cos \frac{S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_2] - S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_1]}{\hbar} \right) \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \\ &= 4 \cos^2 \frac{S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_2] - S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_1]}{2\hbar} \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \end{aligned}$$

Wynik ten, znajdujący potwierdzenie jakościowe w doświadczeniu z podwójną szczeliną, wskazuje na fizykalne znaczenie **amplitud Diraca–Feynmana** (zapisanych w naturalnej normalizacji, w której jednostką działania klasycznego jest  $\hbar$ ):

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] \equiv e^{iS[x]}$$

stowarzyszonych z działaniem klasycznym  $S$ . Dodatkowych argumentów za nieodzownością sumowania wkładów od różnych trajektorii łączących konfiguracje: początkową i końcową, użytego tu na prawach oczywistości, dostarcza heurystyczne rozumowanie Feynmana, które rekapitulujemy poniżej.

Załóżmy otóż, że hamiltonian klasyczny rozpatrywanego wcześniej układu przyjmuje prostą postać

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\delta^{ij} p_i p_j}{2m} + V(q^i),$$

przy czym pierwszy składnik jest standardowym członem kinetycznym, drugi zaś – zależnym od położen uogólnionych (wyłącznie) członem potencjalnym. Hamiltonian kwantowomechaniczny jest wówczas dany wzorem

$$\widehat{H} = \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m} + V(\widehat{q}^i)$$

i możemy – podzieliwszy przedział czasowy  $[0, t]$  na  $n$  równych odcinków, o długości  $\Delta t = \frac{t}{n}$  każdy – przepisać propagator (8) w postaci

$$\begin{aligned} \langle \bar{q} | e^{-\frac{it}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_0 \rangle &= \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_Q d\bar{q}_k \right) \langle \bar{q} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_{n-1} \rangle \langle \bar{q}_{n-1} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_{n-2} \rangle \\ &\quad \langle \bar{q}_{n-2} | \cdots | \bar{q}_1 \rangle \langle \bar{q}_1 | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Na podstawie związków komutacyjnych dla zmiennych kanonicznie sprzężonych

$$[\bar{q}^i, \widehat{p}_j] = i\hbar \delta^i_j, \quad i, j \in \overline{1, N}$$

formuła Bakera–Campbella–Hausdorffa pozwala nam przepisać każdy z cząstkowych propagatorów w postaci

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_{k-1} \rangle &\equiv \langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \left( \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m} + V(\bar{q}^i) \right)} | \bar{q}_{k-1} \rangle \\ &= \langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m}} \circ e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright V(\bar{q}^i)} | \bar{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot V(\bar{q}_{k-1}^i)} \cdot \langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m}} | \bar{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= \int_P d\bar{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot V(\bar{q}_{k-1}^i)} \cdot \langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m}} | \bar{p}_{k-1} \rangle \langle \bar{p}_{k-1} | \bar{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= \int_P d\bar{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( \frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(\bar{q}_{k-1}^i) \right)} \cdot \langle \bar{q}_k | \bar{p}_{k-1} \rangle \langle \bar{p}_{k-1} | \bar{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= \int_P d\bar{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( \frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(\bar{q}_{k-1}^i) \right)} \cdot \langle \bar{q}_k | \bar{p}_{k-1} \rangle \overline{\langle \bar{q}_{k-1} | \bar{p}_{k-1} \rangle} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)). \end{aligned}$$

Na obecnym etapie możemy wykorzystać postać funkcjonalną propagatora pomiędzy stanami własnymi pary operatorów kanonicznie sprzężonych,

$$\langle \bar{q} | \bar{p} \rangle = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} \bar{q}^i \bar{p}^i},$$

aby przepisać otrzymaną wcześniej formułę w postaci

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_{k-1} \rangle &= |\mathcal{N}|^2 \int_P d\bar{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( \frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(\bar{q}_{k-1}^i) - \frac{p_{k-1}^i (q_k^i - q_{k-1}^i)}{\Delta t} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= |\mathcal{N}|^2 e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( V(\bar{q}_{k-1}^i) - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)(q_k^j - q_{k-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &\quad \cdot \int_P d\bar{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} \cdot \left( p_{k-1}^i - \frac{m(q_k^r - q_{k-1}^r) \delta_{ri}}{\Delta t} \right) \left( p_{k-1}^j - \frac{m(q_k^s - q_{k-1}^s) \delta_{sj}}{\Delta t} \right) \delta^{ij}}. \end{aligned}$$

Przyjąwszy założenie o stosownej translacyjnej niezmienniczości dziedziny  $P$  i oznaczywszy całkę gaussowską

$$\mathcal{J}_P := \int_P d\bar{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} \cdot \left( p_{k-1}^i - \frac{m(q_k^r - q_{k-1}^r) \delta_{ri}}{\Delta t} \right) \left( p_{k-1}^j - \frac{m(q_k^s - q_{k-1}^s) \delta_{sj}}{\Delta t} \right) \delta^{ij}},$$

wyprowadzamy stąd zwarty wzór na propagator cząstkowy

$$\langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_{k-1} \rangle = |\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( V(\bar{q}_{k-1}^i) - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)(q_k^j - q_{k-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)),$$

który możemy następnie podstawić do wyjściowego wyrażenia, uzyskując tym sposobem formułę

$$\begin{aligned} \langle \bar{q} | e^{-\frac{it}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \bar{q}_0 \rangle &= (|\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P)^n (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2))^n \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_Q d\bar{q}_k \right) \prod_{l=1}^n e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( V(\bar{q}_{l-1}^i) - \frac{m(q_l^i - q_{l-1}^i)(q_l^j - q_{l-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} \right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (|\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P)^n (1 + n \mathcal{O}(\Delta t^2)) \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_Q d\vec{q}_k \right) e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta t \left( \frac{m(q_i^i - q_{i-1}^i)(q_i^j - q_{i-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} - V(q_{i-1}^i) \right)} \\
&= (|\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P)^n (1 + \mathcal{O}(\Delta t)) \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_Q d\vec{q}_k \right) e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta t \left( \frac{m(q_i^i - q_{i-1}^i)(q_i^j - q_{i-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} - V(q_{i-1}^i) \right)}
\end{aligned}$$

Istnieje klasa potencjałów klasycznych, dla których możliwe jest przejście do granicy  $n \rightarrow \infty$  w powyższym wyrażeniu przy zachowaniu długości przedziału czasowego  $t$  (czyli też  $\Delta t \rightarrow 0$ ). Potencjały takie zostały omówione, m.in., w pracy Feynmana i Hibbsa [FH65] z 1965 r. W rzeczywistej granicy w wykładniku funkcji  $\exp$  rozpoznajemy granicę sumy riemannowskiej lagranżjanu klasycznego postaci

$$L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{m\dot{\vec{q}}^i \dot{\vec{q}}^j \delta_{ij}}{2} - V(q^i)$$

na odcinku czasowym  $[0, t]$ , a sam propagator zyskuje interpretację sumocalki po wkładach od *wszystkich* trajektorii prowadzących od konfiguracji  $\vec{q}_0$  do konfiguracji  $\vec{q} \equiv \vec{q}_k$  w czasie  $t$ . Granicę produktu sumocalek po położeniach (uogólnionych) w pośrednich chwilach czasu, ilekroć jest dobrze zdefiniowana, oznaczamy symbolem

$$\langle \vec{q}_k | e^{-\frac{it}{\hbar} \triangleright \hat{H}} | \vec{q}_0 \rangle = \int_{\substack{\vec{q}(0) = \vec{q}_0 \\ \vec{q}(t) = \vec{q}_k}} \mathcal{D}\vec{q} e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{q}]}$$

i określamy mianem **Feynmana (sumo-)calki po trajektoriach**. Obecność w jej zapisie amplitudy Diraca–Feynmana w roli wagi statystycznej określającej wkład do propagatora trajektorii<sup>5</sup>  $\vec{q}$  o zadanych warunkach brzegowych  $(\vec{q}(0), \vec{q}(t)) = (\vec{q}_0, \vec{q}_k)$  uzasadnia – *a posteriori* – wcześniejsze nasze rozważania o obserwowalnych konsekwencjach istnienia niehomotopijnych trajektorii w czasoprzestrzeni propagacji cząstki oraz naszą wyjściową definicję mechaniki lagranżowskiej (jeśli tylko włączyć stałą  $\hbar$  w definicję działania klasycznego, wzgl. położyć  $\hbar = 1$ , co też będziemy czynić w dalszej części wykładu). Postulat jednoznacznej określoności amplitudy Diraca–Feynmana przerywa pomost formalny pomiędzy teorią klasyczną, modelowaną od początku do końca przy użyciu narzędzi z kategorii geometrycznej (takich jak „rozmaitość”, „metryka”, „pole wektorowe” *etc.*), a teorią kwantową, osadzoną w kategorii algebraicznej<sup>6</sup>. Bogatsi o tę świadomość, prześledzimy obecnie dalsze konsekwencje strukturalne tegoż postulatu, czyli też równoważnego mu postulatu określoności działania klasycznego *modulo*  $2\pi(\hbar)$ , w rozważanym modelowym układzie fizycznym.

W kontekście wyjściowych naszych rozważań modelowych rzeczony postulat implikuje dodatkowe warunki

$$(9) \quad \forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_{\mathcal{O}}} : qN_{ijk} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \wedge \quad \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} : qd_{ij} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Zwykle wyraża się je przy użyciu lokalnie gładkich odwzorowań  $g_{ij}$  oraz  $h_i$  o wartościach w  $U(1)$  powiązanych z  $f_{ij}$  oraz  $b_i$  wzorami

$$g_{ij} := e^{-if_{ij}}, \quad h_i := e^{-ib_i}.$$

Tak określone odwzorowania są określone przez równości

$$(10) \quad (\tilde{A}_j - \tilde{A}_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \text{id} \log g_{ij}$$

oraz

$$(11) \quad \tilde{A}'_i - \tilde{A}_i = \text{id} \log h_i$$

zapisane w terminach przeskalowanych pól  $\tilde{A}_i = q A_i$  oraz  $\tilde{A}'_i = q A'_i$ , dla których

$$d\tilde{A}_i = \tilde{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} = d\tilde{A}'_i,$$

przy  $\tilde{F} = qF$ , i spełniając znajomo wyglądające warunki **1-kocyklu**

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1},$$

<sup>5</sup>Należy dobitnie podkreślić, że propagator kwantowomechaniczny jest określany przez *wszystkie* konfiguracje interpolujące między oboma stanami, w tym także konfiguracje nieklasyczne (tj. takie, które nie minimalizują funkcjonału działania).

<sup>6</sup>Często dopuszczającej naturalne *nieprzemienne* geometryzacje, fundamentalnie odległe od algebraizacji geometrii klasycznej w terminach funkcji (gładkich) na tejsze.

$$(12) \quad \forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_{\mathcal{O}}} \forall_{y \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \cdot g_{kj}(x)^{-1} \cdot g_{ki}(x) = 1$$

oraz

$$(13) \quad \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g'_{ij}(x) \equiv e^{-i q f'_{ij}(x)} = h_i(x)^{-1} \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x).$$

Podkreślmy: wypisane warunki wiążą ze sobą ładunek elektryczny  $q$  punktu materialnego z elementem  $N_{ijk}$  opisu zewnętrznego pola elektromagnetycznego. Ten pierwszy jest w Przyrodzie pewną całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego  $e$  elektronu, źródłem tego drugiego też są zwykle czasoprzestrzenne rozkłady ładunków. I to właśnie tym drugim zajmiemy się poniżej.

Intuicje wyrobione w trakcie dotychczasowych naszych dociekań pozwalają wyprowadzić nader prostą interpretację geometryczną pierwszego z powyższych warunków, znaną w literaturze pod nazwą **warunku Diraca skwantowania ładunku**. Otóż wybierzmy dowolną dwuwymiarową powierzchnię zamkniętą  $\Sigma \subset M$ ,  $\partial \Sigma = \emptyset$  i obliczmy strumień pola elektromagnetycznego przez tę powierzchnię,

$$\Phi((E, B); \Sigma) := \int_{\Sigma} F,$$

dokonawszy uprzednio jej stosownej tessellacji, tj. podzieliwszy ją na wielokąty  $p$  (tworzące zbiór **plakietek tesselacji**) stykające się wzdłuż krawędzi  $e$  (tworzących zbiór krawędzi tesselacji  $E$ ), które z kolei łączą się w wierzchołkach  $v$  (tworzących zbiór wierzchołków tesselacji  $V$ ), przy czym możemy założyć, że w każdym wierzchołku zbiegają się trzy krawędzie<sup>7</sup>, czyli mamy do czynienia z tesselacją o strukturze plastra miodu. Tesselację, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\Delta_{\Sigma} = P \cup E \cup V,$$

wybieramy na tyle drobną, aby spełniała ona warunek podporządkowania wybranemu (dowolnie) dobremu pokryciu  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości  $M$ :

$$\forall_{p \in P} \exists_{i_p \in I} : p \subset \mathcal{O}_{i_p},$$

a zatem także

$$\forall_{e \in E} \exists_{i_e \in I} : e \subset \mathcal{O}_{i_e}.$$

Zachodzi też

$$\forall_{v \in V} \exists_{i_v \in I} : v \in \mathcal{O}_{i_v}.$$

Tak przygotowani obliczamy, w odwołaniu do Twierdzenia Stokesa,

$$\Phi((E, B); \Sigma) = \sum_{p \in \Delta_{\Sigma}} \int_p F = \sum_{p \in P \subset \Delta_{\Sigma}} \int_p dA_{i_p} = \sum_{p \in P \subset \Delta_{\Sigma}} \sum_{e \subset \partial p} \int_e A_{i_p}.$$

Ostatnią sumę możemy zamienić na sumę po wszystkich krawędziach tesselacji – wzdłuż każdej z nich (na której dowolnie ustalamy orientację) całkujemy różnicę potencjałów pochodzących z obu rozdzielanych przez nią plakietek (względny znak „-” dla tych dwóch wkładów wynika stąd, że ustalona orientacja krawędzi z konieczności jest zgodna z jej orientacją indukowaną z wyjściowej orientacji jednej z plakietek, powiedzmy  $p_+(e)$ , a zarazem przeciwna do jej orientacji indukowanej z orientacji drugiej z plakietek, powiedzmy  $p_-(e)$ , co w świetle zastosowanego powyżej twierdzenia Stokes’a prowadzi do rzeczonyj różnicy znaków obu wkładów),

$$\begin{aligned} \Phi((E, B); \Sigma) &= \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Sigma}} \int_e (A_{i_{p_+(e)}} - A_{i_{p_-(e)}}) = \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Sigma}} \int_e df_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}} \\ &= \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Sigma}} \sum_{v \in \partial e} \int_v f_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}}. \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio sumę po końcach wszystkich krawędzi tesselacji możemy zamienić na pojedynczą sumę po wszystkich wierzchołkach, przy czym chwila zastanowienia nad znakami wkładów do wyrazu owej sumy przyporządkowanego ustalonemu wierzchołkowi pochodzących

<sup>7</sup>Tesselizację tego typu otrzymujemy ze zwykłej triangulacji powierzchni poprzez utworzenie jej tzw. **grafu dualnego** o ternarnych wierzchołkach w geometrycznych środkach trójkątów i połączonych krawędziami, z których każda przecina transversalnie dokładnie jeden z boków trójkąta, będący krawędzią triangulacji.

od poszczególnych (zorientowanych dowolnie) zbiegających się w nim krawędzi, w połączeniu z narzuconymi własnościami skośnej symetrii funkcji  $f_{ij}$  względem permutacji indeksów pokrycia prowadzi do wzoru

$$\Phi((E, B); \Sigma) = - \sum_{v \in \Delta_\Sigma} N_{p_1(v)p_2(v)p_3(v)}(v),$$

w którym  $(p_1(v), p_2(v), p_3(v))$  jest trójką plakierek tesselacji zbiegających się w  $v$  uporządkowaną wedle kolejności ich przemierzania przy obiegu wierzchołka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (przy czym wybór plakietki początkowej jest nieistotny z racji cyklicznej symetrii stałych  $N_{ijk}$  względem permutacji indeksów pokrycia). Ostatecznie więc wnioskujemy, że dla dowolnej liczby całkowitej  $N$  (określającej wartość ładunku elektrycznego  $q = Ne$  cząstki próbnej poruszającej się w tle  $F$ ) spełniona jest relacja

$$Ne \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z},$$

czyli

$$(14) \quad e \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Odnosząc powyższy wynik do pola (hipotetycznego) punktowego ładunku magnetycznego  $\mu$  i topologicznie najprostszej (nietrywialnego) powierzchni zamkniętej, czyli 2-sfery, okalającej punkt położenia monopola, odtwarzamy klasyczny wynik Diraca

$$e\mu \in 2\pi\mathbb{Z},$$

który jest właśnie zapowiedzianym wcześniej warunkiem Diraca skwantowania ładunku.

W podsumowaniu dotychczasowych naszych rozważań możemy stwierdzić, że spójny opis propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w zewnętrznych polach: grawitacyjnym  $g$  i elektromagnetycznym  $F$  jest możliwy, o ile tensor Maxwella tego pola oraz ładunek niesiony przez punkt materialny (zamiast  $e$  mamy tu w ogólności  $q$ ) spełniają warunek Diraca (14). Funkcjonał działania porównujący propagację punktu po dwóch różnych ścieżkach łączących parę punktów w czasoprzestrzeni  $(M, g)$  jest przy tym dany wzorem (7), który prowadzi do wyrażenia na amplitudę Diraca–Feynmana

$$(15) \quad \mathcal{A}_{\text{DF}}[x] = e^{\frac{im}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t})} \prod_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} e^q \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} \prod_{v \in \partial e} (g_{i_e i_v} \circ x)(v)^{\varepsilon_{ev}}, \quad x \in LM.$$

Dotychczasowa dyskusja uzasadnia przy tym zabieg czysto formalny podyktowany wolą odciążenia stosowanego zapisu, a polegający na włączeniu ładunku  $q$  do definicji zewnętrznego pola elektromagnetycznego (i jego lokalnych trywializacji). Odtąd będziemy zatem konsekwentnie pisać

$$(16) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right)$$

oraz

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] = e^{\frac{im}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t})} \prod_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} e^{\int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}} \prod_{v \in \partial e} (g_{i_e i_v} \circ x)(v)^{\varepsilon_{ev}}, \quad x \in LM,$$

gdzie kładziemy

$$g_{ij} = e^{-i f_{ij}}, \quad h_i = e^{-i b_i}$$

przy warunku

$$(17) \quad \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

## 2. GEOMETRYZACJA DANYCH LOKALNYCH

Analiza przeprowadzona w poprzednim rozdziale pozostawia nas z danymi lokalnej trywializacji 2-kocyklu de Rhama  $F$  w postaci (opuszczamy tyldy w zapisie dla większej przejrzystości)

$$(18) \quad (A_i, g_{jk}) \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \times C^\infty(\mathcal{O}_{jk}, U(1)), \quad i, j, k \in I,$$

które pozwoliły nam zapisać amplitudę Diraca–Feynmana (15) w zwartej postaci. W kontekście niniejszego wykładu pojawia się pytanie o istnienie „geometryzacji” danych lokalnych (oraz topologicznego czynnika w  $\mathcal{A}_{DF}$ ). Poniżej skonstruujemy naturalną taką „geometryzację”, po czym wyabstrahujemy z niej pojęcie centralne wykładu, jakim jest pojęcie wiązki włóknistej. Rozważmy zatem sumę rozłączną

$$N^1\mathcal{O}_M := \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i = \{ (x, i) \mid x \in \mathcal{O}_i \wedge i \in I \}$$

z topologią mocną indukowaną wzdłuż zanurzeń kanonicznych

$$\iota_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow N^1\mathcal{O}_M : x \longmapsto (x, i),$$

tj. taką, w której otwartym w  $N^1\mathcal{O}_M$  jest każdy podzbiór  $\mathcal{U}$  o przeciwbrazach  $\iota_j^{-1}(\mathcal{U})$  otwartych w topologiach odnośnych podprzestrzeni topologicznych  $\mathcal{O}_j$  przestrzeni  $M$ . Struktura rozmaitości klasy  $C^\infty$  jest w oczywisty sposób indukowana na  $N^1\mathcal{O}_M$  ze „składowych”  $\mathcal{O}_i$ . Tak określona rozmaitość odwzorowuje się w sposób jawnie surjektywny i submersywny na  $M$ ,

$$\pi : N^1\mathcal{O}_M \longrightarrow M : (x, i) \longmapsto x.$$

Określamy na niej *globalnie gładką* 1-formę o ograniczeniach

$$\alpha \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \times \{i\} \cong \mathcal{O}_i} := A_i,$$

tj.

$$\alpha(x, i) := A_i(x),$$

spełniającą warunek

$$d\alpha(x, i) \equiv dA_i(x) = F(x) \equiv \pi^* F(x, i),$$

tj.

$$d\alpha = \pi^* F.$$

Następnie przechodzimy na analogicznie skonstruowaną rozmaitość

$$N^2\mathcal{O}_M := \bigsqcup_{i, j \in I} \mathcal{O}_{ij},$$

wyposażoną w parę odwzorowań gładkich

$$\text{pr}_A : N^2\mathcal{O}_M \longrightarrow N^1\mathcal{O}_M : (x, i_1, i_2) \longmapsto (x, i_A), \quad A \in \{1, 2\},$$

i definiujemy na niej *globalnie gładkie* odwzorowanie

$$\gamma : N^2\mathcal{O}_M \longrightarrow U(1) : (x, i, j) \longmapsto g_{ij}(x).$$

Odwzorowanie to spełnia tożsamość

$$\text{id log } \gamma(x, i, j) \equiv \text{id log } g_{ij}(x) = A_j(x) - A_i(x) \equiv (\text{pr}_2^* - \text{pr}_1^*)\alpha(x, i, j),$$

czyli

$$(19) \quad \text{id log } \gamma = (\text{pr}_2^* - \text{pr}_1^*)\alpha.$$

Wreszcie na rozmaitości

$$N^3\mathcal{O}_M := \bigsqcup_{i, j, k \in I} \mathcal{O}_{ijk}$$

z odwzorowaniami gładkimi

$$\text{pr}_{A, B} : N^3\mathcal{O}_M \longrightarrow N^2\mathcal{O}_M : (x, i_1, i_2, i_3) \longmapsto (x, i_A, i_B), \quad (A, B) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$$

wyprowadzamy warunek

$$(\text{pr}_{1,2}^* \gamma \cdot \text{pr}_{2,3}^* \gamma)(x, i, j, k) = \gamma(x, i, j) \cdot \gamma(x, j, k) \equiv g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \equiv \gamma(x, i, k) = \text{pr}_{1,3}^* \gamma(x, i, j, k),$$

tj.

$$\text{pr}_{1,2}^* \gamma \cdot \text{pr}_{2,3}^* \gamma = \text{pr}_{1,3}^* \gamma.$$

Postulowaną „geometryzację” danych lokalnych można zatem przedstawić w postaci obiektu złożonego

$$(20) \quad \begin{array}{ccccc} \text{pr}_{1,2}^* \gamma \cdot (\text{pr}_{1,3}^* \gamma)^{-1} \cdot \text{pr}_{2,3}^* \gamma = 1 & \text{id log } \gamma := (\text{pr}_2^* - \text{pr}_1^*) \alpha & \text{d}\alpha := \pi^* F & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathbb{N}^3 \mathcal{O}_M & \xrightarrow{\text{pr}_{A,B}} & \mathbb{N}^2 \mathcal{O}_M, \gamma & \xrightarrow{\text{pr}_C} & \mathbb{N}^1 \mathcal{O}_M, \alpha \\ & & & & \downarrow \pi \\ & & & & M, F \end{array}$$

Wydestylujemy obecnie z technikałów i poddamy stosownej formalizacji jego cechy konstytutywne. Zaczynamy przeto od rozmaitości  $M$ , na której jest określony 2-kocykl de Rhama (czyli 2-forma zamknięta)  $F$  o okresach  $\text{Per}(F) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ , i wystawiamy nad nią *surjektywną submersję*

$$\begin{array}{c} \mathcal{Y}M \\ \downarrow \pi_{\mathcal{Y}M} \\ M \end{array}$$

żądadając istnienia globalnie gładkiej 1-formy

$$\underset{(1)}{A} \in \Omega^1(\mathcal{Y}M)$$

o własności

$$\underset{(1)}{dA} = \pi_{\mathcal{Y}M}^* \underset{(2)}{F}.$$

Następnie przechodzimy na podrozmaitość

$$\mathcal{Y}^{[2]}M \equiv \mathcal{Y}M \times_M \mathcal{Y}M := \{ (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}M \times \mathcal{Y}M \mid \pi_{\mathcal{Y}M}(y_1) = \pi_{\mathcal{Y}M}(y_2) \} \subset \mathcal{Y}M \times \mathcal{Y}M$$

w kwadracie kartezjańskim  $\mathcal{Y}M \times \mathcal{Y}M$ , utworzoną przez pary punktów leżących nad tym samym punktem w  $M$ . O jej gładkości przesądza

**Twierdzenie 1.** Niechaj  $M_1, M_2$  i  $N$  będą rozmaitościami gładkimi i niech  $f_A : M_A \rightarrow M$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą odwzorowaniami klasy  $C^\infty$ . Wyposażmy produkt włóknisty  $M_1 \times_M M_2 \subset M_1 \times M_2$  domykający diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & M_1 \times_M M_2 & \\ \text{pr}_1 \downarrow_{M_1 \times_M M_2} & & \text{pr}_2 \downarrow_{M_1 \times_M M_2} \\ M_1 & & M_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & M & \end{array}$$

w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na  $M_1 \times M_2$ . Ilekroć jedno z odwzorowań  $f_A$  jest surjektywną submersją,  $M_1 \times_M M_2$  jest podrozmaitością klasy  $C^\infty$  gładko włożoną w  $M_1 \times M_2$ , zwaną **produktem włóknistym rozmaitości różniczkowalnych**  $M_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  **nad rozmaitością**  $M$ .

Udowodnienie powyższego twierdzenia wymagałoby od nas dość gruntownej dyskusji pojęć takich jak transwersalność odwzorowań i podrozmaitości, które zostaną omówione w osobnej notatce (**Proszę o przypomnienie, gdybym jej nie dostarczył!**). Tymczasem my porównujemy nad  $Y^{[2]}M$  cofnięcia  $\underset{(1)}{A}$  wzdłuż obu rzutów kanonicznych

$$\text{pr}_A : Y^{[2]}M \longrightarrow YM : (y_1, y_2) \longrightarrow y_A, \quad A \in \{1, 2\}$$

i domagamy się istnienia globalnie gładkiego odwzorowania

$$\underset{(0)}{g} : Y^{[2]}M \longrightarrow U(1)$$

spełniającego warunek

$$\text{id} \log \underset{(0)}{g} = (\text{pr}_2^* - \text{pr}_1^*) \underset{(1)}{A},$$

a nadto związanego warunkiem spójności

$$\text{pr}_{1,2}^* \underset{(0)}{g} \cdot (\text{pr}_{1,3}^* \underset{(0)}{g})^{-1} \cdot \text{pr}_{2,3}^* \underset{(0)}{g} = 1$$

na potrójnym produkcie włóknistym

$$Y^{[3]}M \equiv YM \times_M YM \times_M YM$$

$$:= \{ (y_1, y_2, y_3) \in YM \times YM \times YM \mid \pi_{YM}(y_1) = \pi_{YM}(y_2) = \pi_{YM}(y_3) \}.$$

Jakkolwiek poczyniona przez nas abstrakcja jest dość sztywno zdeterminowana przez model (20), to jednak warto upewnić się, że jest w niej naturalnie zakodowana informacja o strukturze typu (18), tzn., że istotnie mamy do czynienia z odpowiedniością pomiędzy zbiorem danych lokalnych dla 2-kocykli  $\underset{(2)}{F}$  (spełniających stosowne relacje (10)-(12)) i strukturami różniczkowymi jak ta powyżej. Ażeby zweryfikować tę tezę, potrzebujemy

**Twierdzenie 2.** Niechaj  $M_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą rozmaitościami gładkimi i niech  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie  $x \in M_1$ . Istnieje wówczas otoczenie  $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$  punktu  $f(x)$ , na którym jest określone odwzorowanie  $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \longrightarrow M_1$  klasy  $C^\infty$  o własnościach

$$f \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \quad \wedge \quad \sigma \circ f(x) = x,$$

zwane **ciąciem lokalnym** odwzorowania  $f$ .

*Dowód:* Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia  $\mathcal{O}_x \ni x$  będącego dziedziną lokalnej mapy  $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_{n_1}})$ ,  $n_1 \equiv \dim M_1$ , w której  $\kappa_1(x) = 0$ , a także – do pewnego otoczenia  $\tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$  będącego dziedziną lokalnej mapy  $\kappa_2 : \tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2$ ,  $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_{n_2}})$ ,  $n_2 \equiv \dim M_2$ , w której  $\kappa_2 \circ f(x) = 0$ . Submersywność  $f$  w  $x$  oznacza, że odwzorowanie styczne

$$\mathbb{T}_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : \mathbb{T}_{\kappa_1(x)=0} \mathbb{R}^{x_{n_1}} \equiv \mathbb{R}^{x_{n_1}} \longrightarrow \mathbb{T}_{\kappa_2 \circ f(x)=0} \mathbb{R}^{x_{n_2}} \equiv \mathbb{R}^{x_{n_2}}$$

jest epimorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych. Niechaj zatem  $V_1 \subset \mathbb{R}^{x_{n_1}}$  będzie (dowolną) podprzestrznią izomorficznie odwzorowywaną w  $\mathbb{R}^{x_{n_2}}$  przez (ograniczenie)  $\mathbb{T}_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$ , a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy  $C^\infty$

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{x_{n_2}},$$

o jawnie niepustej dziedzinie (wszak  $V_1$  jest podprzestrzenią w  $\mathbb{R}^{x^{n_1}}$ , a  $\mathcal{U}_1$  jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. Istotnie, wobec tożsamości  $T_0V_1 \equiv V_1$ , dziedzina  $T_0F$  przyjmuje postać  $T_0\mathcal{U}_1 \cap T_0V_1 \equiv \mathbb{R}^{x^{n_1}} \cap V_1 = V_1$ , co oznacza, że  $T_0F$  jest izomorfizmem

$$T_0F \equiv T_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1}.$$

W odwołaniu do Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań wnioskujemy zatem, że  $F \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$  ma pożądaną lokalną odwrotność  $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1}|_{F(\mathcal{U}_0)}$  klasy  $C^\infty$  na pewnym otoczeniu  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \cap V_1$  wektora  $0 \equiv \kappa_1(x)$ . Homeomorficzny przeciwobraz  $\kappa_1^{-1}(\mathcal{U}_0)$  tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu  $x$ , na którym jest określone lokalne cięcie  $\sigma$  klasy  $C^\infty$ .  $\square$

Powyższe twierdzenie, gdy odnieść je do surjektywnej submersji  $\pi_{YM}$ , implikuje istnienie pokrycia  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \equiv \mathcal{O}_M$  rozmaitości  $M$ ,

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i = M,$$

wraz z rodziną cięć lokalnych

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow YM, \quad i \in I,$$

a zatem także (dla  $i, j, k \in I$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &: \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow Y^{[2]}M : x \longmapsto (\sigma_i(x), \sigma_j(x)), \\ \sigma_{ijk} &: \mathcal{O}_{ijk} \longrightarrow Y^{[3]}M : x \longmapsto (\sigma_i(x), \sigma_j(x), \sigma_k(x)), \end{aligned}$$

przy pomocy których możemy zdefiniować lokalnie gładkie obiekty różniczkowe na  $M$ :

$$(21) \quad A_i := \sigma_i^* A, \quad g_{ij} := \sigma_{ij}^* g_{(0)},$$

a następnie sprawdzić pożądaną własności:

$$dA_i \equiv d\sigma_i^* A = \sigma_i^* dA = \sigma_i^* \pi_{YM}^* F_{(2)} = (\pi_{YM} \circ \sigma_i)^* F_{(2)} = \text{id}_{\mathcal{O}_i}^* F_{(2)} \equiv F_{(2)}|_{\mathcal{O}_i},$$

$$\begin{aligned} (A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} &\equiv (\sigma_j^* - \sigma_i^*) A|_{\mathcal{O}_{ij}} \equiv ((\text{pr}_2 \circ \sigma_{ij})^* - (\text{pr}_1 \circ \sigma_{ij})^*) A = \sigma_{ij}^* (\text{pr}_2^* - \text{pr}_1^*) A = i \sigma_{ij}^* d \log g_{(0)} \\ &= \text{id} \log \sigma_{ij}^* g_{(0)} \equiv \text{id} \log g_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij})|_{\mathcal{O}_{ijk}} &\equiv (\sigma_{jk}^* g_{(0)} \cdot \sigma_{ik}^* g_{(0)}^{-1} \cdot \sigma_{ij}^* g_{(0)})|_{\mathcal{O}_{ijk}} \\ &\equiv ((\text{pr}_{2,3} \circ \sigma_{ijk})^* g_{(0)} \cdot (\text{pr}_{1,3} \circ \sigma_{ijk})^* g_{(0)}^{-1} \cdot (\text{pr}_{1,2} \circ \sigma_{ijk})^* g_{(0)}) \\ &= \sigma_{ijk}^* (\text{pr}_{1,2}^* g_{(0)} \cdot (\text{pr}_{1,3}^* g_{(0)})^{-1} \cdot \text{pr}_{2,3}^* g_{(0)}) = \sigma_{ijk}^* 1 = 1. \end{aligned}$$

Przy tym jeśli w ostatniej z równości położymy  $i = j = k$ , to stwierdzimy, że nieodzownie

$$(22) \quad g_{ii} = 1,$$

a w takim razie przy  $k = i$  otrzymujemy równość

$$g_{ij} \cdot g_{ji} = g_{ii} = 1,$$

więc zachodzi, zgodnie z oczekiwaniem,

$$(23) \quad g_{ji} = g_{ij}^{-1}.$$

Nasze rozważania prowadzą nas wprost do

**Definicja 1.** Niechaj  $M$  będzie rozmaitością gładką i niech  $F \in Z_{\text{dR}}^2(M)$  będzie 2-formą zamkniętą na  $M$  o okresach  $\text{Per}(F) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ . **Rozwłóknienie (uogólnione) o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad  $M$  z potencjałem o krzywiznie  $F$**  to czwórka

$$\mathcal{F} := \left( YM, \pi_{YM}, \underset{(1)}{A}, \underset{(0)}{g} \right)$$

złożona z

- surjektywnej submersji  $\pi_{YM} : YM \rightarrow M$  nad rozmaitością  $M$ , zwanej w tych okolicznościach **bazą rozwłóknienia**;
- gładkiej 1-formy  $\underset{(1)}{A} \in \Omega^1(YM)$  na przestrzeni totalnej  $YM$  surjektywnej submersji, zwanej **1-formą potencjału**;
- odwzorowania gładkiego  $\underset{(0)}{g} \in C^\infty(Y^{[2]}M, \mathbb{C}^\times)$  na kwadracie rozwłóknionym  $YM$  nad bazą, zwanego **odwzorowaniem przejścia**,

powiązanych relacjami:

$$\text{(GF1)} \quad \pi_{YM}^* \underset{(2)}{F} = d \underset{(1)}{A} \text{ na } YM;$$

$$\text{(GF2)} \quad (\text{pr}_2^* - \text{pr}_1^*) \underset{(1)}{A} = \text{id} \log \underset{(0)}{g} \text{ na } Y^{[2]}M;$$

$$\text{(GF3)} \quad \text{pr}_{1,2}^* \underset{(0)}{g} \cdot (\text{pr}_{1,3}^* \underset{(0)}{g})^{-1} \cdot \text{pr}_{2,3}^* \underset{(0)}{g} = 1 \text{ na } Y^{[3]}M.$$

Strukturę tę zapisujemy w postaci diagramu

$$\begin{array}{ccccc} \text{pr}_{1,2}^* \underset{(0)}{g} \cdot (\text{pr}_{1,3}^* \underset{(0)}{g})^{-1} \cdot \text{pr}_{2,3}^* \underset{(0)}{g} = 1 & \text{id} \log \underset{(0)}{g} := (\text{pr}_2^* - \text{pr}_1^*) \underset{(1)}{A} & & d \underset{(1)}{A} := \pi_{YM}^* \underset{(2)}{F} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ Y^{[3]}M & \xrightarrow{\text{pr}_{A,B}} & Y^{[2]}M, \underset{(0)}{g} & \xrightarrow{\text{pr}_C} & YM, \underset{(1)}{A} \\ & & & & \downarrow \pi_{YM} \\ & & & & M, \underset{(2)}{F} \end{array}$$

Rozmaitość

$$Y_x M := \pi_{YM}^{-1}(\{x\}) \subset YM$$

jest określana mianem **włókna**  $\mathcal{F}$  nad punktem  $x$  bazy.

Na obecnym etapie warto zastanowić się nad strukturą włókna. Jak dotąd nic nie skłaniało nas do tego, by wymagać jakichkolwiek relacji pomiędzy włóknami  $Y_{x_A} M$ ,  $A \in \{1, 2\}$  nad różnymi punktami  $x_1 \neq x_2$  bazy  $M$ . Dopiero rozważania fizyczne prowadzą do zawężenia spektrum użytecznych możliwości. Istotnie, w fizycznych zastosowaniach rozwłóknienia są wykorzystywane do modelowania lokalnie gładkich dystrybucji „obiektów” *globalnie ustalonego* typu, np. wektorów, spinorów, skalarów, iloczynów skalarowych, form różniczkowych *etc.* W związku z tym narzucimy *pragmatyczne* ograniczenie: Będziemy odtąd zakładać, że każde włókno  $Y_x M$  jest dyfeomorficzne (potencjalnie nie-kanonicznie) z pewną globalnie ustaloną rozmaitością  $F$ , którą nazwiemy **włóknem typowym**, a dalej że przestrzeń totalna  $YM$  rozwłóknienia jest lokalnie modelowana na iloczynie kartezjańskim (podzbioru otwartego) bazy i włókna typowego (tak że cięcia lokalne możemy utożsamiać z lokalnie gładkimi odwzorowaniami o wartościach w  $F$ ). Stosowna adaptacja wcześniej wprowadzonego pojęcia w tradycyjnym sformułowaniu przyjmuje postać



**Definicja 2.** Niechaj  $M$  będzie rozmaitością gładką i niech  $F \in Z_{\text{dR}}^2(M)$  będzie 2-formą zamkniętą na  $M$  o okresach  $\text{Per}\left(\frac{F}{(2)}\right) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ . **Wiązka główna o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad  $M$  z powiązaniem głównym o krzywiźnie  $\frac{F}{(2)}$**  to trójka

$$\mathcal{P} := \left( P, \pi_P, \underset{(1)}{\mathcal{A}} \right)$$

złożona z

- gładkiej surjekcji  $\pi_{Y_M} : P \rightarrow M$  z **przestrzeni totalnej** wiązki w jej **bazę**, zwanej **rzutem na bazę**;
- gładkiej 1-formy  $\underset{(1)}{\mathcal{A}} \in \Omega^1(P)$  na przestrzeni totalnej  $P$ , zwanej **1-formą powiązania głównego**

o następujących własnościach:

(LT1) istnieje pokrycie otwarte  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $M$ , zwane **pokryciem trywializującym**, wraz z rodziną lokalnie gładkich dyfeomorfizmów

$$\tau_i : \pi_P^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times, \quad i \in I,$$

zwanych **lokalnymi trywializacjami**, które domykają diagramy przemienne

$$(24) \quad \begin{array}{ccc} \pi_P^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times \\ & \searrow \pi_P & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathcal{O}_i \end{array}$$

i definiują gładkie odwzorowania

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

zwane **odwzorowaniami przejścia**, wedle schematu

$$\tau_{ij} \equiv \tau_i \circ \tau_j^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{C}^\times} : \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{C}^\times \ni (x, z) \mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot z);$$

(LT2) w lokalnych współrzędnych  $(x, z)$  na przestrzeni modelowej  $\mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times$  cofnięcie 1-formy powiązania głównego wzdłuż odwrotności lokalnej trywializacji  $\tau_i$  przyjmuje postać sfaktoryzowaną

$$\left(\tau_i^{-1}\right)_{(1)}^* \mathcal{A}(x, z) = i \frac{dz}{z} + A_i(x)$$

dla pewnych lokalnie gładkich 1-form  $A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i)$ , zwanych **potencjałami lokalnymi**;

(PD) na przestrzeni totalnej jest określone (prawe) działanie grupy strukturalnej, tj. gładkie odwzorowanie

$$r : P \times \mathbb{C}^\times \rightarrow P : (p, z) \mapsto r_z(p), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times : r_{z_1 \cdot z_2} = r_{z_2} \circ r_{z_1},$$

które zachowuje włókna, co opisuje diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{r} & P \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ P & \xrightarrow{\pi_P} & M \end{array},$$

i jest w każdym z nich przechodnie, będąc lokalnie modelowanym na prawym regularnym działaniu grupy strukturalnej na sobie (poprzez mnożenie),

$$\tau_i \circ r_{\tilde{z}}(\tau_i^{-1}(x, z)) = (x, z \cdot \tilde{z}).$$

**Zadanie domowe 1.** Pokaż, że wiązka główna opisana w Def. 2 jest szczególnym rodzajem rozwłóknienia z Def. 1.

O tym, że powyższa struktura istotnie odtwarza dane otrzymane z rozważań fizykalnych (w lagranżowskim modelu dynamiki masywnej cząstki naładowanej), orzeka

**Twierdzenie 3** (O rekonstrukcji wiązki  $\mathbb{C}^\times$ -główniej z powiązaniem z danych lokalnych). Każda wiązka główna o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad bazą  $M$  z powiązaniem głównym o krzywiznie  $\underset{(2)}{F}$  wyznacza nad swym pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$

- rodzinę lokalnie gładkich odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

spełniających warunek 1-kocyklu

$$(g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = 1;$$

- rodzinę lokalnie gładkich 1-form

$$A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i)$$

spełniających warunki

$$(25) \quad dA_i = \underset{(2)}{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_i}, \quad (A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \text{id} \log g_{ij}.$$

I odwrotnie, każda para rodzin  $(A_i, g_{jk})$  jak wyżej stowarzyszona z pewnym pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \equiv \mathcal{O}_M$  rozmaitości gładkiej  $M$  określa wiązke główną o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad  $M$  o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z  $\mathcal{O}_M$  tożsamyh z  $g_{ij}$  i z powiązaniem głównym o krzywiznie o ograniczeniach  $\underset{(2)}{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} = dA_i$ .

*Dowód:* Rozważmy odwzorowania przejścia  $g_{ij}$  i potencjały lokalne  $A_i$  danej wiązki  $P$ . Wprost z definicji otrzymujemy, dla dowolnych  $(x, z) \in \mathcal{O}_{ijk} \times \mathbb{C}^\times$ , tożsamość

$$\begin{aligned} (x, g_{ik}(x) \cdot z) &= \tau_{ik}(x, z) \equiv \tau_i \circ \tau_k^{-1}(x, z) \equiv (\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ (\tau_j \circ \tau_k^{-1})(x, z) = \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, g_{jk}(x) \cdot z) \\ &= (x, g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot z) \end{aligned}$$

która wobec dowolności  $x$  i  $z$  pozwala stwierdzić, że  $g_{ij}$  spełniają warunek 1-kocyklu. Następnie dla  $(x, z) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{C}^\times$  rozpisujemy tożsamość

$$\begin{aligned} i \frac{dz}{z} + A_j(x) &\equiv (\tau_j^{-1})^* \underset{(1)}{\mathcal{A}}(x, z) \equiv (\tau_i^{-1} \circ \tau_{ij})^* \underset{(1)}{\mathcal{A}}(x, z) = \tau_{ij}^* (\tau_i^{-1})^* \underset{(1)}{\mathcal{A}}(x, z) \equiv (\tau_i^{-1})^* \underset{(1)}{\mathcal{A}}(x, g_{ij}(x) \cdot z) \\ &\equiv i \frac{g_{ij}(x) dz + z dg_{ij}(x)}{g_{ij}(x) \cdot z} + A_i(x), \end{aligned}$$

która bezpośrednio implikuje drugi z warunków (25). Pierwszy z nich wynika z rachunku

$$\begin{aligned} dA_i(x) &= d(\tau_i^{-1})^* \underset{(1)}{\mathcal{A}}(x, z) = (\tau_i^{-1})^* d \underset{(1)}{\mathcal{A}}(x, z) = (\tau_i^{-1})^* \pi_{\mathbb{P}}^* \underset{(2)}{F}(x, z) = (\pi_{\mathbb{P}} \circ \tau_i^{-1})^* \underset{(2)}{F}(x, z) \\ &= \text{pr}_1^* \underset{(2)}{F}(x, z) = \underset{(2)}{F}(x), \end{aligned}$$

w którym użyliśmy przemienności diagramu (24).

Idąc w kierunku przeciwnym, rozważamy sumę rozłączną

$$\tilde{P} := \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times \ni (x, i, z)$$

rozmaitości iloczynowych  $\mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times$ ,  $i \in I$  (o topologii i strukturze różniczkowej omówionej uprzednio), na której definiujemy gładką 1-formę o wartościach

$$\alpha(x, z, i) := i \frac{dz}{z} + A_i(x).$$

Istnienie odwzorowań  $g_{ij}$  pozwala nam uzgodnić konstrukcję 1-formy  $\alpha$  z rozdrobnieniami pokrycia otrzymanymi poprzez przecinanie ze sobą jego elementów, które indukują kanoniczne surjektywne submersje

$$\begin{aligned}\pi_1 & : \bigsqcup_{i,j \in I} \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{C}^\times \longrightarrow \bigsqcup_{k \in I} \mathcal{O}_k \times \mathbb{C}^\times : (x, z, i, j) \longmapsto (x, z, i), \\ \pi_2 & : \bigsqcup_{i,j \in I} \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{C}^\times \longrightarrow \bigsqcup_{k \in I} \mathcal{O}_k \times \mathbb{C}^\times : (x, z, i, j) \longmapsto (x, z, j).\end{aligned}$$

Istotnie, odwzorowania te dostarczają pozytywnej odpowiedzi na pytanie o istnienie auto-dyfeomorfizmu

$$\gamma_{(0)} : \bigsqcup_{i,j \in I} \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\cong} (x, z, i, j) \longmapsto (x, \chi_{ij}(x, z), i, j)$$

o własności

$$(26) \quad \gamma_{(0)}^* \pi_1^* \alpha = \pi_2^* \alpha,$$

wystarczy bowiem położyć

$$\chi_{ij}(x, z) := g_{ij}(x) \cdot z,$$

aby powyższa tożsamość była spełniona. Działanie  $\chi$  poddaje się naturalnej reinterpretacji: oto definiuje on strukturalne utożsamienie punktów we włóknach  $\mathbb{C}^\times$  nad  $\mathcal{O}_{ij}$  pochodzących z obu obecnych tam składowych sumy rozłącznej  $\tilde{P}$ , czyli  $\mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times$  i  $\mathcal{O}_j \times \mathbb{C}^\times$ . Utożsamienie to przyjmuje postać

$$(x_1, z_1, i_1) \sim_{\substack{g \\ (0)}} (x_2, z_2, i_2) \iff \exists_{(y, z, i_1, i_2) \in \bigsqcup_{i,j \in I} \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{C}^\times} : \begin{cases} (x_1, z_1, i_1) = \pi_1 \circ \gamma_{(0)}(y, z, i_1, i_2) \\ (x_2, z_2, i_2) = \pi_2(y, z, i_1, i_2) \end{cases}.$$

Zauważmy, że jest ono samozgodne dzięki warunkowi 1-kocyklu, który gwarantuje tożsamość

$$\chi_{ik}(x, z) \equiv g_{ik}(x) \cdot z = g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot z = \chi_{ij}(x, \chi_{jk}(x, z)).$$

Jak wynika wprost z tego warunku, patrz: (22) i (23),  $\sim_{\substack{\gamma \\ (0)}}$  jest relacją równoważności, a tożsamość

(26) oznacza, że możemy zstąpić z  $\alpha$  z sumy rozłącznej  $\tilde{P}$  na przestrzeń jej klas abstrakcji

$$P := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times \right) / \sim_{\substack{\gamma \\ (0)}} \ni [(x, z, i)]_{\substack{\sim \\ (0)}},$$

którą wyposażamy w topologię ilorazową indukowaną wzdłuż rzutu kanonicznego

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times \longrightarrow \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times \right) / \sim_{\substack{\gamma \\ (0)}} : (x, z, i) \longmapsto [(x, z, i)]_{\substack{\sim \\ (0)}}$$

nazywając otwartym w  $P$  każdy podzbiór o przeciwobrazie względem  $\pi_{\sim}$  otwartym w opisanej wcześniej topologii sumy rozłącznej na  $\tilde{P}$  i która w naturalny sposób<sup>8</sup> dziedziczy strukturę różniczkową z  $M$  i  $\mathbb{C}^\times$ . Otrzymana przy tym globalnie określona 1-forma

$$\mathcal{A}_{(1)} \in \Omega^1(P), \quad \mathcal{A}_{(1)}\left([\!(x, i, z_i)\!]_{\substack{\sim \\ (0)}}\right) := \alpha(x, z, i)$$

jest gładka względem tejże struktury. Gładkim jest też rzut na bazę

$$\pi_P : P \longrightarrow M : [\!(x, i, z_i)\!]_{\substack{\sim \\ (0)}} \longmapsto x.$$

Zdefiniowanie lokalnych trywializacji i sprawdzenie ich gładkości, jak również określenie uzgodnionego z ich postacią działania grupy strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  pozostawiamy uważnemu Czytelnikowi.  $\square$

**Zadanie domowe 2.** Uzupełnij luki w dowodzie Tw. 3.

<sup>8</sup>Ustalenie go będzie przedmiotem osobnego zadania domowego.

Nie tylko lokalne dane 2-kocyklu de Rhama  $\underset{(2)}{F}$  poddają się geometryzacji. To samo dotyczy ich redefinicji opisywanych przez rodziny lokalnie gładkich odwzorowań  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{C}^\times$  spełniających warunki analogiczne do tych z Równ. (11) i (13). Kłopot z wyprowadzeniem takiej geometryzacji z opisu lokalnego w jego dotychczasowej postaci jest taki, że ta ostatnia dostarcza kwantyfikacji bardzo szczególnych redefinicji, które nie wyczerpują zbioru *naturalnych* izomorfizmów wiązek (tym bardziej więc ogólniejszych między nimi morfizmów, nie mówiąc już o morfizmach między rozwłóknieniami), przez co trudno na ich podstawie pomyśleć stosowne uogólnienie. W związku z tym przyjmujemy za punkt wyjścia definicje obiektów geometrycznych: Def. 1 i Def. 2, a znalazłszy naturalne definicje morfizmów, sprawdzimy, że w szczególnych okolicznościach odtwarzają one opis lokalny, ten zaś ostatni – zawsze do nich prowadzi. Zaczniemy od ogólniejszej

**Definicja 3.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Niechaj  $(Y_A M, \pi_{Y_A M}, \underset{(1)}{A}_A, \underset{(0)}{g}_A)$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą rozwłóknieniami (uogólnionymi) o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad wspólną bazą  $M$  z potencjałami o odnośnych krzywiznach  $\underset{(2)}{F}_A$ . **Morfizm rozwłóknień (uogólnionych) o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad  $M$  zachowujący klasę potencjału** (i pokrywający identyczność na bazie) to trójka

$$(\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M, \pi_{\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M}, \underset{(0)}{h})$$

złożona z

- surjektywnej submersji

$$\pi_{\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M} : \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M \rightarrow Y_1 M \times_M Y_2 M \equiv Y_{12}M$$

nad produktem włóknistym

$$\begin{array}{ccc} & Y_1 M \times_M Y_2 M & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ Y_1 M & & Y_2 M \\ \pi_{Y_1 M} \searrow & & \swarrow \pi_{Y_2 M} \\ & M & \end{array}$$

- funkcji gładkiej

$$\underset{(0)}{h} : \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

dla której zachodzi równość

$$\pi_{\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M}^*(\text{pr}_2^* \underset{(1)}{A}_2 - \text{pr}_1^* \underset{(1)}{A}_1) = i \text{d} \log \underset{(0)}{h}$$

i która nad produktem włóknistym

$$\begin{array}{ccc} & \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M \times_M \underset{(0)}{Y}Y_{12}M & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M & & \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M \\ \pi_{Y_1 M} \circ \text{pr}_1 \circ \pi_{\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M} \searrow & & \swarrow \pi_{Y_1 M} \circ \text{pr}_1 \circ \pi_{\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M} \\ & M & \end{array}$$

wyposażonym w odwzorowania kanoniczne

$$\text{pr}_A : \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M \times_M \underset{(0)}{Y}Y_{12}M \rightarrow \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M, \quad A \in \{1, 2\}$$

$$\pi_{1,3} \equiv (\text{pr}_1 \times \text{pr}_1) \circ (\pi_{\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M} \times \pi_{\underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M}) : \underset{(0)}{Y}Y_{1,2}M \times_M \underset{(0)}{Y}Y_{12}M \rightarrow Y_1^{[2]}M,$$

$$\pi_{2,4} \equiv (\text{pr}_2 \times \text{pr}_2) \circ (\pi_{\mathbb{Y}\mathbb{Y}_{1,2}M} \times \pi_{\mathbb{Y}\mathbb{Y}_{1,2}M}) : \mathbb{Y}\mathbb{Y}_{1,2}M \times_M \mathbb{Y}\mathbb{Y}_{1,2}M \longrightarrow \mathbb{Y}_2^{[2]}M,$$

spełnia warunek zgodności z odwzorowaniami przejścia  $g_A$ :

$$\pi_{1,3}^* g_{(0)}^1 \cdot \text{pr}_2^* h_{(0)} = \text{pr}_1^* h_{(0)} \cdot \pi_{2,4}^* g_{(0)}^2.$$

Wykażemy obecnie, że morfizmy rozwłóknień w zapostulowanej powyżej postaci są lokalnie opisywane przez rodziny odwzorowań spełniających warunki typu (11) i (13), pozostawiając dowód relacji odwrotnej Czytelnikowi.

**Zadanie domowe 3.** Skonstruuj morfizm rozwłóknień stowarzyszonych, wedle schematu opisanego szczegółowo na str. 12, z dwiema rodzinami:  $(A_i, g_{ij})$  i  $(A'_i, g'_{ij})$  danych lokalnych dla  $F$  odpowiadający rodzinie lokalnie gładkich odwzorowań  $(h_i)$  określających relacje pomiędzy  $(A_i, g_{ij})$  i  $(A'_i, g'_{ij})$ .

Tymczasem rozważmy pokrycie otwarte  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  wspólnej bazy  $M$  obu rozwłóknień współtrywializujące dla surjektywnych submersji  $\mathbb{Y}_A M$ , tj. takie, z którego elementami są stowarzyszone cięcia lokalne

$$\sigma_{A_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Y}_A M, \quad i \in I, \quad A \in \{1, 2\},$$

więc także cięcia lokalne

$$\sigma_{1,2i} := (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}) : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Y}_{1,2}M \quad x \mapsto (\sigma_{1i}(x), \sigma_{2i}(x)),$$

a zarazem na tyle drobne, że nad każdym ze zbiorów  $\sigma_{1,2i}(\mathcal{O}_i) \subset \mathcal{U}_i$  istnieje odnośne cięcie lokalne

$$s_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{Y}\mathbb{Y}_{1,2}M$$

surjektywnej submersji  $\pi_{\mathbb{Y}\mathbb{Y}_{1,2}M}$ .

**Zadanie domowe 4.** Czy takie pokrycie zawsze istnieje?

Możemy wówczas zdefiniować złożone cięcia lokalne

$$\sigma_i := s_i \circ \sigma_{1,2i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Y}\mathbb{Y}_{1,2}M$$

i przy ich użyciu lokalnie gładkie odwzorowania

$$h_i := \sigma_i^* h_{(0)}.$$

Przywoławszy Równ. (21), bez trudu przekonujemy się, że odwzorowania te spełniają antycypowane relacje typu (11) i (13), tj.

$$A_{2i} - A_{1i} = \text{id} \log h_i, \quad g_{2ij} = h_i^{-1} \cdot g_{1ij} \cdot h_j.$$

**Zadanie domowe 5.** W bezpośrednim rachunku wyprowadź powyższe relacje.

Jak to zostało już powiedziane wcześniej, fizyka używa rozwłóknień w szczególnej postaci, określonej w Def. 2. Mamy dla nich odpowiednik powyższej definicji w postaci

**Definicja 4.** Przyjmijmy zapis Def. 2. Niechaj  $(P_A, \pi_{P_A}, \mathcal{A}_A)$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą wiązkami głównymi o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad wspólną bazą  $M$  z powiązaniem głównymi o odnośnych krzywiznach  $F_A$ . **Morfizm wiązek o grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$  nad  $M$  zachowujący powiązanie główne** (i pokrywający identycznością na bazie) to odwzorowanie gładkie

$$\Phi : P_1 \longrightarrow P_2$$

o własnościach

$$\pi_{P_2} \circ \Phi = \pi_{P_1}$$

i

$$\Phi^* \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1.$$

I tym razem relegujemy połowę zadania zbadania związku zaproponowanej powyżej struktury z wcześniejszymi rozważaniami na Czytelnika.

**Zadanie domowe 6.** Skonstruuj morfizm wiązek głównych stowarzyszonych, wedle schematu z dowodu Tw. 3, z dwiema rodzinami:  $(A_i, g_{ij})$  i  $(A'_i, g'_{ij})$  danych lokalnych dla  $F$  odpowiadający rodzinie lokalnie gładkich odwzorowań  $(h_i)$  określających relacje pomiędzy  $(A_i, g_{ij})$  i  $(A'_i, g'_{ij})$ .

Poniżej ograniczymy się do zdefiniowania danych lokalnych morfizmu  $\Phi$  i wyprowadzenia spełnianych przez nie tożsamości. W tym celu wybieramy pokrycie  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $M$  współtrywializujące dla obu wiązek  $P_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$ .

**Zadanie domowe 7.** Jak otrzymać takie pokrycie z danych pokryć trywializujących dla  $P_1$  i  $P_2$ ?

Mamy zatem do dyspozycji dwie rodziny trywializacji lokalnych:

$$\tau_{A_i} : \pi_{P_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{C}^\times, \quad i \in I, \quad A \in \{1, 2\}.$$

Definiujemy odwzorowania

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

wzorem

$$\Phi \circ \tau_{1_i}^{-1}(x, z) =: \tau_{2_i}^{-1}(x, h_i(x)^{-1} \cdot z)$$

i sprawdzamy spełniane przez nie tożsamości:

$$\begin{aligned} i \frac{dz}{z} + A_{1_i}(x) &= (\tau_{1_i}^{-1})^* \mathcal{A}_{1_i}(x, z) = (\tau_{1_i}^{-1})^* \Phi^* \mathcal{A}_{2_i}(x, z) = (\Phi \circ \tau_{1_i}^{-1})^* \mathcal{A}_{2_i}(x, z) \\ &= (\tau_{2_i}^{-1})^* \mathcal{A}_{2_i}(x, h_i(x)^{-1} \cdot z) = i \frac{h_i(x)^{-1} dz - z h_i(x)^{-1} dh_i(x) h_i(x)^{-1}}{h_i(x)^{-1} \cdot z} + A_{2_i}(x), \end{aligned}$$

skąd, po skróceniu członów powtarzających się po obu stronach równości,

$$A_{2_i}(x) - A_{1_i}(x) = i h_i(x)^{-1} dh_i(x),$$

oraz – dla  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  –

$$\begin{aligned} \tau_{2_i}^{-1}(x, g_{2_{ij}}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot z) &= \tau_{2_i}^{-1} \circ \tau_{2_{ij}}(x, h_j(x)^{-1} \cdot z) \equiv \tau_{2_j}^{-1}(x, h_j(x)^{-1} \cdot z) = \Phi \circ \tau_{1_j}^{-1}(x, z) \\ &\equiv \Phi \circ \tau_{1_i}^{-1} \circ \tau_{1_{ij}}(x, z) = \Phi \circ \tau_{1_i}^{-1}(x, g_{1_{ij}}(x) \cdot z) \\ &= \tau_{2_i}^{-1}(x, h_i(x)^{-1} \cdot g_{1_{ij}}(x) \cdot z), \end{aligned}$$

czyli – wobec injektywności  $\tau_{2_i}^{-1}$  –

$$h_i(x)^{-1} \cdot g_{1_{ij}}(x) = g_{2_{ij}}(x) \cdot h_j(x)^{-1}.$$

Widzimy więc jasno, że nasze uogólnienia zostały dobrane właściwie. Z tą krzepiącą świadomością dokonujemy zwieńczenia naszego mozolnego studium uogólniającą, a utrzymaną w duchu fizykalnym

**Definicja 5. Wiązka włóknista** klasy  $C^\infty$  to czwórka

$$(E, B, F, \pi_E)$$

złożona z rozmaitości gładkich:

- $E$ , zwanej **przestrzenią totalną (wiązki)**;
- $B$ , zwanej **bazą (wiązki)**;
- $F$ , zwanej **włóknem typowym (wiązki)**;

oraz odwzorowania surjektywnego klasy  $C^\infty$

$$\pi_E : E \twoheadrightarrow B,$$

zwanego **rzutem na bazę (wiązki)**, dla których istnieje pokrycie otwarte  $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  wraz ze stowarzyszoną z nim rodziną dyfeomorfizmów klasy  $C^\infty$

$$\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F,$$

zwanych **trywializacjami lokalnymi (wiązkami)**, domykających diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i} & \mathcal{O}_i \times F \\ & \searrow \pi_E & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathcal{O}_i \end{array}$$

Pokrycie o powyższej własności określamy mianem **trywializującego**. Odwzorowania

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F) \equiv \text{Diff}^\infty(F, F)$$

określone, dla wszystkich par indeksów  $(i, j) \in I^{\times 2}$ , dla których  $\mathcal{O}_{ij} \neq \emptyset$ , przez superpozycje dyfeomorfizmów

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times F} : \mathcal{O}_{ij} \times F \ni (x, f) \longmapsto (x, g_{ij}(x)(f)),$$

gdzie odwzorowanie  $\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$  jest z założenia klasy  $C^\infty$ , są nazywane **odwzorowaniami przejścia (wiązki)**, a grupa automorfizmów  $\text{Aut}(F)$  włókna typowego (lub dowolna jej podgrupa, do której należą wszystkie odwzorowania przejścia) zyskuje miano **grupy strukturalnej (wiązki)**, Wiązkę będziemy nieraz reprezentować przy użyciu diagramu

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi_E \\ & & B \end{array}$$

Przeciwwobraz punktu  $x \in B$  względem rzutu kanonicznego,

$$\pi_E^{-1}(\{x\}) \equiv E_x$$

nazywamy **włóknem wiązki  $E$  nad  $x$** .

**Morfizm wiązek włóknistych** między dwiema wiązkami włóknistymi  $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  to para  $(\Phi, f)$  odwzorowań klasy  $C^\infty$ , które czynią poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Izomorfizm wiązek włóknistych pokrywający identyczność na bazie, czyli spełniający warunek  $f = \text{id}_B$ , nosi miano **równoważności wiązek włóknistych**.

Powyższą abstrakcyjną definicję, której rozmaite fizycznie umotywowane specjalizacje i twórcze rozwinięcia zajmą nam – wraz z dyskusją zastosowań – resztę semestru zilustrujemy teraz na kilku strukturalnie istotnych przykładach.

**Przykłady 1.** (1) **Wiązka trywialna** to czwórka

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & B \end{array}$$

a więc np. 2-torus  $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ , walec  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ .

(2) **Wstęga Möbiusa** jako wiązka nietrywialna nad  $\mathbb{S}^1$ .

- (3) Niechaj  $(E, B_2, F, \pi_E)$  będzie wiązką włóknistą o lokalnych trywializacjach  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$  stowarzyszonych z pokryciem trywializującym  $\mathcal{O}_{B_2} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B_2$ , a  $f : B_1 \rightarrow B_2$  – odwzorowaniem klasy  $C^\infty$ . Wówczas czwórka

$$(f^*E \equiv B_1 \times_{B_2} E, B_1, F, \text{pr}_1),$$

jest wiązką, zwaną **wiązką cofniętą (wzdłuż  $f$ )**, o

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego

$$\begin{array}{ccc} B_1 \times_{B_2} E & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array},$$

który wyposażamy w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na  $B_1 \times E \supset B_1 \times_{B_2} E$ ;

- rzucie na bazę  $\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E} : B_1 \times_{B_2} E \rightarrow B_1$  danym jako (odpowiednio ograniczony, a jawnie surjektywny) rzut kanoniczny na pierwszą składową;
- włóknie typowym tożsamym z włóknem typowym  $E$  i włóknie nad punktem bazy  $x \in B_1$  danym w postaci  $\{x\} \times \pi_E^{-1}(\{f(x)\}) \equiv E_{f(x)}$ ;
- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{f^*} := (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))} : \text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) \xrightarrow{\cong} f^{-1}(\mathcal{O}_i) \times F$$

stowarzyszonych z pokryciem trywializującym  $f^*\mathcal{O}_{B_2} \equiv \{f^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$  (jego otwartość jest oczywistą konsekwencją ciągłości  $f$ ).

Trywializacje są w oczywisty sposób dobrze określone, oto bowiem mamy tożsamość

$$\text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) = \text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)) \equiv \text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i \times F)),$$

wynikającą z przemienności powyższego diagramu. Ponadto gładkość odwzorowań strukturalnych:  $\pi_{f^*E}$  i  $\tau_i^{f^*}$  jest konsekwencją submersywności  $\pi_E$ . Oznaczywszy rzeczzone włożenie (klasy  $C^\infty$ ) jako  $\iota_{f^*} : B_1 \times_{B_2} E \hookrightarrow B_1 \times E$ , możemy zapisać oba odwzorowania jako superpozycje odwzorowań gładkich:

$$\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \circ \iota_{f^*}, \quad \tau_i^{f^*} \equiv (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \circ \iota_{f^*} \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))}.$$

Bez trudu wyznaczamy odwzorowania przejścia wiązki cofniętej,

$$g_{ij}^{f^*} \equiv g_{ij} \circ f \upharpoonright_{f^{-1}(\mathcal{O}_{ij})} : f^{-1}(\mathcal{O}_{ij}) \rightarrow \text{Aut}(F).$$

**Zadanie domowe 8.** Udowodnij powyższe!

- (4) Niechaj  $(E_A, B, F_A, \pi_{E_A})$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą wiązkami włóknistymi o trywializacjach lokalnych  $\tau_{A i} : \pi_{E_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_A$  i odnośnych odwzorowaniach przejścia  $g_{A ij} : \mathcal{O}_{ij} \times F_A \hookrightarrow \mathcal{O}_{ij} \times F_A$  :  $(x, f_A) \mapsto (x, g_{A ij}(x)(f_A))$  stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ . Wówczas czwórka

$$(\pi_{E_1}^* E_2 \equiv \pi_{E_2}^* E_1 \equiv E_1 \times_B E_2, B, F_1 \times F_2, \pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2)$$

jest wiązką *nad wspólną bazą obu wiązek*<sup>9</sup>, określaną mianem **produktu włóknistego wiązek włóknistych**, o

<sup>9</sup>To czyni z niej obiekt zasadniczo różny od rozważanej poprzednio wiązki cofniętej.



- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times_B E_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ E_1 & \xrightarrow{\pi_{E_1}} & B \end{array} ,$$

będącego – w świetle Tw. 1, a z racji submersywnego charakteru każdego z rzutów kanonicznych na (wspólną) bazę – podrozmaitością włożoną w  $E_1 \times E_2$ ;

- rzucie na bazę  $\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2 : E_1 \times_B E_2 \rightarrow B$  danym jako rzut kanoniczny obliczony na dowolnej składowej kartezjańskiej;
- włóknie typowym tożsamym z produktem kartezjańskim włókien typowych obu składowych,  $E_1 \times E_2$ , i włóknie nad punktem bazy  $x \in B$  danym w postaci  $E_{1x} \times E_{2x}$ ;
- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{12} : (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 : (e_1, e_2) \mapsto (\tau_i^1(e_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i^2(e_2)).$$

Trywializacje lokalne są w oczywisty sposób gładkie (klasy  $C^\infty$ ), podobnie jak ich odwrotności

$$\begin{aligned} \tau_i^{12-1} : \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 &\xrightarrow{\cong} (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ &: (x, f_1, f_2) \mapsto (\tau_i^{1-1}(x, f_1), \tau_i^{2-1}(x, f_2)). \end{aligned}$$

Znajomość tych ostatnich pozwala nam ustalić odwzorowania przejścia:

$$\tau_i^{12} \circ \tau_j^{12-1} : \mathcal{O}_{ij} \times F_1 \times F_2 \circlearrowleft : (x, f_1, f_2) \mapsto (x, g_{ij}^1(x)(f_1), g_{ij}^2(x)(f_2)).$$

Wiedzeni przeświadczeniem o tym, że jest rzeczą nierycerską kończyć wykład definicją, dla której nic nie zostało dowiedzione, konkludujemy niniejsze studium podając fundamentalne

**Twierdzenie 4** (O rekonstrukcji wiązki włóknistej). Przyjmijmy zapis Def. 5. Odwzorowania przejścia wiązki włóknistej  $(E, B, F, \pi_E)$  o pokryciu trywializującym  $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  spełniają **warunek 1-kocyklu**

$$(27) \quad \forall_{i,j,k \in I, x \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x) = \text{id}_F.$$

I odwrotnie, niechaj  $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej  $B$  i niech  $F$  będzie dowolną rozmaitością gładką o grupie automorfizmów  $\text{Aut}(F)$ . Dowolna stowarzyszona z  $\mathcal{O}_B$  rodzina odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad i, j \in I$$

indukujących odwzorowania klasy  $C^\infty$

$$\mathcal{O}_{ij} \times F \rightarrow F : (x, f) \mapsto g_{ij}(x)(f)$$

i spełniających powyższy warunek określa wiązkę włóknistą o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z  $\mathcal{O}_{ij}$  tożsamych z  $g_{ij}$ . Ilekroć odwzorowania te są odwzorowaniami przejścia pewnej wiązki włóknistej nad  $B$  o włóknie typowym  $F$ , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez odwzorowania przejścia  $g_{ij}$ .

**Zadanie domowe 9.** Prove it, or die tryin’.

#### REFERENCES

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, Phys. Rev. **115** (1959), 485–491.
- [Bro05] L.M. Brown, *Feynman’s Thesis – A New Approach to Quantum Theory*, World Scientific, 2005.
- [Dir33] P.A.M. Dirac, “The Lagrangian in quantum mechanics”, Phys. Z. Sowjet. **3** (1933), 64–72.
- [Fey48] R.P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, Rev. Mod. Phys. **20** (1948), 367–387.
- [FH65] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.