GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II
WYKŁADY 12. I 13.
WIĄZKI STOWARZYSZONE

Spis treści

Z przedstawionego na zakończenie Wykładu VII studium przypadku (kanonicznego) możemy wyabstrahować strukturalne własności konstrukcji będącej jego przedmiotem, kluczowe dla konstrukcji tej powodzenia. Mamy zatem do czynienia z konstrukcją wiązki włóknistej „stowarzyszonej" z daną wiązką główną poprzez działanie grupy strukturalnej tej ostatniej na ustalonej rozmaitości różniczkowalnej, przy czym owa rozmaitość jest promowana do rangi włókna typowego konstruowanej wiązki, a dane lokalne (trywializacje lokalne i odpowiadające im odwzorowania przejścia) wyjściowej wiązki głównej indukują odnośne dane lokalne tejże. Stosownej formalizacji tych naszych spostrzeżeń dostarcza

Definicja 1. Niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną, M zaś – rozmaitością z gładkim działaniem (lewostronnym) $\lambda : \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ grupy Liego G. **Wiązka stowarzyszona z P_{G} poprzez λ** to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M, B, M, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}\big)$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \equiv (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}$ będąca rozmaitością ilorazową określoną – na gruncie Corollarium 6&7.1 do Twierdzenia o Rozmaitości Ilorazowej – przez działanie z Równ. (6&7.3);
- rzut na bazę

$$\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M} \; : \; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \longrightarrow B \; : \; [(p, m)] \longmapsto \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \,.$$

Przy tym trywializacje lokalne $\tau_i \; : \; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}, \; i \in I$ wiązki głównej P_{G} stowarzyszone z pokryciem $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B indukują trywializacje lokalne

$$\widetilde{\tau}_i \; : \; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times M \; : \; [(p, m)] \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda_{\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)\big) \,,$$

o odwzorowaniach przejścia

$$\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1} \; : \; \mathcal{O}_{ij} \times M \circlearrowleft \; : \; (x, m) \longmapsto \big(x, \lambda_{g_{ij}(x)}(m)\big) \,.$$

Ustaliwszy (dowolnie) punkt $x \in B$, wybierzmy (także dowolnie) $p_* \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$. Dyfeomorfizmy

$$[p_*]_\lambda \; : \; M \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \; : \; m \longmapsto [(p_*, m)] \,,$$

o odwrotnościach

$$[p_*]_\lambda^{-1} \; : \; (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \xrightarrow{\cong} M \; : \; [(p, m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*, p)}(m)$$

i oczywistej własności

$$\forall_{g \in \mathrm{G}} \; : \; [p_* \triangleleft g]_\lambda = [p_*]_\lambda \circ \lambda_g \,, \tag{1}$$

noszą miano **izomorfizmów modelujących włókna**. Indukują one **izomorfizmy transportu włókna**

$$\begin{aligned} [p_2, p_1]_\lambda \equiv [p_2]_\lambda \circ [p_1]_\lambda^{-1} \quad &: \quad (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \\ &: \quad [(p, m)] \longmapsto \big[\big(p_2, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p)}(m)\big)\big] \,, \end{aligned}$$

określone dla dowolnej pary $(p_1,p_2)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$.

Dla dowolnej pary $\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_\alpha}M_\alpha,B,M_\alpha,\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_\alpha}M_\alpha}\right)$, $\alpha\in\{1,2\}$ wiązek stowarzyszonych z tą samą wiązką główną $\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\right)$ określamy także **niezmiennik wiązek stowarzyszonych** jako morfizm wiązek włóknistych

$$(\Phi,\mathrm{id}_B)\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny, wypisany dla dowolnej pary punktów $p_1,p_2\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$,

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\right)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_1}}"] \arrow[d, "\Phi\restriction_{\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\right)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)}}"'] & \left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\right)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \arrow[d, "\Phi\restriction_{\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\right)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)}}"] \\
\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2\right)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_2}}"'] & \left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2\right)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)}
\end{tikzcd}\ .$$

Uwaga 1. Istnienie struktury rozmaitości na przestrzeni orbit $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ działania $\widetilde{\lambda}$ jest bezpośrednią konsekwencją Tw. 6&7.3, na którego przywołanie w powyższym kontekście pozwala Cor. 6&7.1. Przy tym gładkość rzutu na bazę $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}$ wynika tu wprost ze Stw. Niezb-29, kiedy zauważyć, że rzut ten domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
 & B \\
\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M \arrow[ur, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}"']
\end{tikzcd}\ ,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją (na mocy tegoż Tw. 6&7.3), a $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\mathrm{pr}_1$ jest jawnie gładkie. Jako że to ostatnie odwzorowanie także jest submersją, przeto własność tę ma $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}$, o czym przekonuje tożsamość uzyskana w obrazie powyższego diagramu względem funktora stycznego.

Przejdziemy do zbadania trywializacji lokalnych, zaczynając od sprawdzenia sensowności ich definicji. Musimy w tym celu pokazać, że wartość przyjmowana przez odwozrowanie $\widetilde{\tau}_i$ na klasie $[(p,m)]$ nie zależy od wyboru reprezentanta tej ostatniej. Obliczamy przeto

$$\left(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g),\lambda\left(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p\triangleleft g),\lambda\left(g^{-1},m\right)\right)\right)=\left(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\lambda\left(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p)\cdot g,\lambda\left(g^{-1},m\right)\right)\right)$$

$$=\left(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\lambda\left(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p)\cdot g\cdot g^{-1},m\right)\right)=\left(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\lambda\left(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p),m\right)\right).$$

Ponadto ponieważ odwzorowania

$$\underline{\tau}_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\times M\longrightarrow\mathcal{O}_i\times M\ :\ (p,m)\longmapsto\left(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\lambda_{\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p)}(m)\right),\quad i\in\{1,2\}$$

są jawnie gładkie, a przy tym pozostają z $\widetilde{\tau}_i$ w relacji opisywanej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_i\times M \\
\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\times M \arrow[ur, "\underline{\tau}_i"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}"'] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[u, "\widetilde{\tau}_i"']
\end{tikzcd}\ ,$$

w którym rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}$ jest – wprost na mocy Tw. 6&7.3 i Cor. 6&7.1 – gładki, przeto w świetle Stw. Niezb-29 także odwzorowania $\widetilde{\tau}_i$ są gładkie. Gładkość (także lokalna) ich odwrotności

$$\widetilde{\tau}_i^{-1}\ :\ \mathcal{O}_i\times M\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i)\ :\ (x,m)\longmapsto\left[\left(\tau_i^{-1}(x,e),m\right)\right]$$

nie budzi wątpliwości. We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładamy *implicite* sensowność definicji odwzorowań $\widetilde{\tau}_i$ i $\widetilde{\tau}_i^{-1}$, która wymaga odrębnej weryfikacji – ta usprawiedliwia *a posteriori* dokonaną przez nas identyfikację włókna typowego

$$\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}\big(\{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}([(p,m)])\}\big)\cong M\,,\qquad [(p,m)]\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$$

rekonstruowanej tu wiązki włóknistej. Bez trudu dowodzimy pożądanych tożsamości: oto więc dla $(x,m)\in\mathcal{O}_i\times M$ zachodzi

$$\begin{aligned}&\widetilde{\tau}_i\circ\widetilde{\tau}_i^{-1}(x,m)=\widetilde{\tau}_i\big(\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),m\big)\big]\big)\\ =\ &\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\tau_i^{-1}(x,e),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i\circ\tau_i^{-1}(x,e),m\big)\big)=\big(x,\lambda(e,m)\big)=(x,m)\,,\end{aligned}$$

a dla $[(p,m)]\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M,\ p=\tau_i^{-1}(x,g)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\widetilde{\tau}_i^{-1}\circ\widetilde{\tau}_i\big([(p,m)]\big)=\widetilde{\tau}_i^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p),m\big)\big)\\ =\ &\big[\big(\tau_i^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p),m\big)\big)\big]=\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),\lambda(g,m)\big)\big]\\ =\ &\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g,m\big)\big]=\big[\big(\tau_i^{-1}(x,g),m\big)\big]\equiv[(p,m)]\,.\end{aligned}$$

Wreszcie też na koniec obliczamy

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_i\circ\widetilde{\tau}_j^{-1}(x,m)\ &\equiv\ \widetilde{\tau}_i\circ\widetilde{\tau}_j^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\tau_j^{-1}(x,e),\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_j(\tau_j^{-1}(x,e)),m\big)\big)\\ &=\ \widetilde{\tau}_i\big(\big[\tau_j^{-1}(x,e),m\big]\big)=\big(x,\lambda\big(\mathrm{pr}_2\circ\tau_i\circ\tau_j^{-1}(x,e),m\big)\big)\\ &=\ \big(x,\lambda\big(\mathrm{pr}_2(x,g_{ij}(x)),m\big)\big)\equiv\big(x,\lambda\big(g_{ij}(x),m\big)\big)\,.\end{aligned}$$

Konstrukcja wiązki stowarzyszonej jest zatem dobrze określona.

Rozważmy następnie odwzorowanie

$$[p_*]_\lambda^{-1}\ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_x\longrightarrow M\ :\ [(p,m)]\longmapsto\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,,\qquad p_*\in(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x\,.$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta $(\widetilde{p},\widetilde{m})\in[(p,m)]$ obliczamy

$$\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,\widetilde{p})}(\widetilde{m})=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}\circ\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})}(\widetilde{m})=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,.$$

Ponadto jest ono bijekcją, albowiem prawdziwą jest implikacja

$$\begin{aligned}&[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_2,m_2)]\big)=[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_1,m_1)]\big)\qquad\Longleftrightarrow\qquad m_2=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1)\\ \Longrightarrow\qquad&[(p_2,m_2)]=\big[\big(p_2,\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1)\big)\big]=\big[\big(p_2\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1),m_1\big)\big]\\ &=[(p_1,m_1)]\,,\end{aligned}$$

dowodząca injektywności $[p_*]_\lambda^{-1}$, a do tego dowolny punkt $m\in M$ możemy zapisać w postaci

$$m=[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_*,m)]\big)\,,$$

co zaświadcza o surjektywności tego odwzorowania, wskazując w jawny sposób jego odwrotność

$$[p_*]_\lambda\ :\ M\longrightarrow(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_x\ :\ m\longmapsto[(p_*,m)]\,.$$

Istotnie, odwzorowanie $[p_*]_\lambda$ spełnia tożsamości

$$\begin{aligned}[p_*]_\lambda^{-1}\circ[p_*]_\lambda(m)\ &=\ \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_*)}(m)=\lambda_e(m)=m\,,\\ [p_*]_\lambda\circ[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p,m)]\big)\ &=\ \big[\big(p_*,\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\big)\big]\equiv\big[\big(p_*\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p),m\big)\big]\\ &=\ [(p,m)]\,.\end{aligned}$$

Jest ono jawnie gładkie jako superpozycja włożenia $(p_*, \mathrm{id}_M) : M \longrightarrow \{p_*\} \times M \subset (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*)} \times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}$. Gładkość $[p_*]_\lambda^{-1}$ wynika natomiast z tezy Stw. Niezb-29 odniesionej do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} & M \\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x \times M \arrow[ur, "\lambda(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*, \mathrm{pr}_1), \mathrm{pr}_2)"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}} \restriction (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x \times M"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \arrow[u, "{[p_*]_\lambda^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

o submersywnej surjekcji na krawędzi poziomej. Konstrukcja dyfeomorfizmu $[p_*]_\lambda^{-1}$ stanowi zatem niezależny (od wcześniejszej konstrukcji trywializacji lokalnych) dowód słuszności przedłożonej przez nas identyfikacji włókna typowego wiązki stowarzyszonej.

Przykłady 1.

(1) Wiązka wektorowa $\mathbb{V}$ (rzędu n) jest wiązką stowarzyszoną z wiązką (główną) reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ poprzez działanie definiujące (ewaluację),

$$\mathbb{V} \cong \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times_{\mathrm{ev}} \mathbb{K}^{\times n}\,.$$

(2) **Wiązka dołączona**

$$\left(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathrm{Ad}} \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathrm{Ad}} \mathrm{G}}\right).$$

(3) Wiązka główna P_{G} może być zrealizowana jako wiązka stowarzyszona

$$\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}}\right).$$

Stosowny izomorfizm wiązek włóknistych to

$$\widetilde{\imath} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} : [(p,g)] \longmapsto p \triangleleft g\,,$$

przy czym jego gładkość wynika z tego, że domyka on diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}}"'] \end{tikzcd}\,,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją, r zaś – odwzorowaniem gładkim. Odwrotność $\widetilde{\imath}$ jest dana w (jawnie gładkiej) postaci

$$\widetilde{\imath}^{-1} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} : p \longmapsto [(p,e)]\,.$$

Na wiązce stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}$ jest określone działanie prawostronne grupy G w postaci

$$\widetilde{r} : (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} : \big([(p,g)], h\big) \longmapsto [(p, g \cdot h)]\,,$$

względem którego każde z włókien jest torsorem. Izomorfizm $\widetilde{\imath}$ jest G-ekwiwariantny,

$$\widetilde{\imath} \circ \widetilde{r}\big([(p,g)], h\big) = \widetilde{\imath}\big([(p, g \cdot h)]\big) = p \triangleleft (g \cdot h) = (p \triangleleft g) \triangleleft h = r \circ \widetilde{\imath}\big([(p,g)], h\big)\,,$$

mamy zatem do czynienia z izomorfizmem wiązek głównych.

W poszukiwaniu automorfizmów wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}$ zauważamy, że ze względu na przemienność działania regularnego lewostronnego $\ell.$ z działaniem regularnym prawostronnym $\wp. : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} : (g,h) \longmapsto g \cdot h$ to ostatnie indukuje – na mocy Stw. 1, a dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$ – niezmiennik wiązek

$$\Phi[r_g] : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G} \circlearrowleft : [(p,h)] \longmapsto \Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,h)]\big)\,,$$

przy czym

$$\Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,h)]\big) \quad = \quad [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}} \circ r_g \circ [p]^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\ell \mathrm{G}}\big([(p,h)]\big)$$

$$\begin{aligned} &= [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell \mathrm{G}} \circ r_g \circ \ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,p)}(h) = [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell \mathrm{G}} \circ r_g(h) \\ &= [p]_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell \mathrm{G}}(h\cdot g) = [(p,h\cdot g)] \equiv \widetilde{r}_g\big([(p,h)]\big)\,, \end{aligned}$$

czyli

$$\Phi[r_g] \equiv \widetilde{r}_g\,,$$

a ponieważ

$$[(p,h)] = [(p \triangleleft h, e)] \equiv \widetilde{\iota}^{-1}(p \triangleleft h)$$

oraz

$$[(p,h\cdot g)] = [(p\triangleleft h\cdot g, e)] = \big[\big((p\triangleleft h)\triangleleft g, e\big)\big] = \big[\big(r_g(p\triangleleft h), e\big)\big] \equiv \widetilde{\iota}^{-1}\circ r_g(p\triangleleft h)\,,$$

zatem

$$\widetilde{\iota}\circ\Phi[r_g]\circ\widetilde{\iota}^{-1} = r_g\,.$$

W tym więc sensie automorfizmy $\Phi[r_g]$ są indukowane przez $r.$, a o tym ostatnim możemy myśleć jako o modelowym niezmienniku wiązek.

Celem praktycznym (np. fizykalnym) konstrukcji wiązek stowarzyszonych jest uzyskanie gładkich dystrybucji rozmaitości określonego (izo)typu M nad zadaną bazą B (np. czasoprzestrzenią) będących nośnikiem wyróżnionego działania ustalonej grupy Liego G (np. symetrii teorii fizykalnej), które ma charakter lokalny nad bazą. Innymi słowy, jest nim stworzenie rozmaitości lokalnie modelowanej na $\mathcal{O}\times M$, $\mathcal{O}\subset B$ z działaniem G lokalnie modelowanym na λ. O tym, że tak zdefiniowany cel został skutecznie zrealizowany zaświadczają dwa poniższe stwierdzenia, z których pierwsze dostarcza zarazem „usprawiedliwienia" *ex post* dokonanego przez nas nieoczywistego wyboru (podklasy) morfizmów wiązek stowarzyszonych.

Stwierdzenie 1. Wiązki stowarzyszone z daną wiązką główną $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ wraz z odnośnymi niezmiennikami wiązek stowarzyszonych tworzą **kategorię wiązek stowarzyszonych z wiązką główną** P_{G}, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Kategoria ta jest kanonicznie równoważna kategorii $\mathbf{Man}_{\mathrm{G}}$ rozmaitości z (lewostronnym) działaniem gładkim o morfizmach danych przez odwzorowania G-ekwiwariantne.

<u>*Dowód:*</u> Pierwsza część tezy stanowi ledwie wskazanie klasy morfizmów przez nas rozpatrywanych i jako taka nie wymaga odrębnego dowodu (niezmienniki wiązek można w oczywisty sposób składać, a ponadto morfizm identycznościowy jest – rzecz jasna – niezmiennikiem wiązek). Także wzajem jednoznaczna odpowiedniość między obiektami kategorii $\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i G-rozmaitościami jest oczywista. Jedynym zatem, co wymaga sprawdzenia, jest stosowna bijektywna odpowiedniość między niezmiennikami wiązek stowarzyszonych i odwzorowaniami G-ekwiwariantnymi.

Niechaj $(\Phi, \mathrm{id}_B) : \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2} M_2$ będzie niezmiennikiem wiązek, a wtedy możemy zdefiniować – dla pewnego (dowolnego) punktu $p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ – odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\chi[\Phi] := [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p]_{\lambda_1} \;:\; M_1 \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \xrightarrow{\cong} M_2\,,$$

które wobec definiującej własności Φ,

$$\Phi\circ[p_2]_{\lambda_1}\circ[p_1]_{\lambda_1}^{-1} = [p_2]_{\lambda_2}\circ[p_1]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\,,$$

nie zależy od wyboru punktu p użytego w jego definicji. G-ekwiwariantność tak określonych odwzorowań,

$$\chi[\Phi]\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)\,,$$

wynika wprost z bezpośredniego rachunku, odwołującego się do Równ. (1) i przeprowadzonego poniżej dla dowolnych $(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}$,

$$\chi[\Phi]\circ\lambda_{1\,g} \;\equiv\; [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ\big([p]_{\lambda_1}\circ\lambda_{1\,g}\big) = [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p\triangleleft g]_{\lambda_1}$$

$$\equiv \left([p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \lambda_{2\,g^{-1}}\right)^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} = \lambda_{2\,g} \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1}$$

$$= \lambda_{2\,g} \circ [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} \equiv \lambda_{2\,g} \circ \chi[\Phi]\,.$$

I odwrotnie, z każdym odwzorowaniem $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)$ możemy stowarzyszyć odwzorowanie (gładkie)

$$\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} := [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \quad : \quad (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$$
$$: \quad [(p,m)] \longmapsto \left[\left(p, \chi(m)\right)\right],$$

zależne jedynie od rzutu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ na bazę wiązki B,

$$\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g)} = [p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \left(\lambda_{2\,g} \circ \chi \circ \lambda_{1\,g^{-1}}\right) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1}$$
$$= [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ \left(\lambda_{1\,g} \circ \lambda_{1\,g^{-1}}\right) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \equiv \Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\,,$$

i z tej racji określające niezmiennik wiązek dany wzorem

$$\Phi[\chi] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2 \;:\; [(p,m)] \longmapsto \Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\left([(p,m)]\right).$$

Istotnie, obliczamy

$$\Phi[\chi] \circ [p_2, p_1]_{\lambda_1} \equiv \left([p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_2]_{\lambda_1}^{-1}\right) \circ \left([p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}\right) = [p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}$$
$$= \left([p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1}\right) \circ \left([p_1]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}\right) \equiv [p_2, p_1]_{\lambda_2} \circ \Phi[\chi]\,.$$

Skonstruowane tu przyporządkowania

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)$$
$$: \quad (\Phi, \mathrm{id}_B) \longmapsto \chi[\Phi]$$

oraz

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2)$$
$$: \quad \chi \longmapsto \left(\Phi[\chi], \mathrm{id}_B\right)$$

są wzajem odwrotne, a każde z nich jest funktorialne. Istotnie, w przypadku rozmaitości M z działaniem $\lambda : \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ otrzymujemy, w dowolnym punkcie $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, równość

$$\Phi[\mathrm{id}_M]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} = [p]_{\lambda_2} \circ \mathrm{id}_B \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = \mathrm{id}_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}\,,$$

czyli też tożsamość

$$\Phi[\mathrm{id}_M] = \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}\,,$$

a nadto dla dowolnej pary odwzorowań G-ekwiwariantnych $\chi_\alpha \;:\; M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha+1},\ \alpha \in \{1,2\}$ pomiędzy G-rozmaitościami $M_\beta,\ \beta \in \{1,2,3\}$ z odnośnymi działaniami $\lambda_\beta \;:\; \mathrm{G} \times M_\beta \longrightarrow M_\beta$

otrzymujemy diagram przemienny (dla dowolnego $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$)

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_1}}"] \arrow[dr, "\chi_1"] \arrow[dd, "\chi_2\circ\chi_1"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dl, "{\Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"'] \arrow[dd, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\circ\Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"] \\
& M_2 \arrow[r, "{[p]_{\lambda_2}}"] \arrow[dl, "\chi_2"] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dr, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"'] & \\
M_3 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_3}}"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_3} M_3\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}
\end{tikzcd} ,$$

w którym przemienność górnego (wzgl. dolnego) trapezu wyraża definicję niezmiennika $\Phi[\chi_1]$ (wzgl. $\Phi[\chi_2]$), a przemienność lewego i prawego trójkąta jest zapisem definicji odnośnych superpozycji odwzorowań, a ponieważ zarazem skrajna prawa krawędź jest – wprost z definicji – tożsama z odwzorowaniem $\Phi[\chi_2 \circ \chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$, przeto – zgodnie z oczekiwaniami –

$$\Phi[\chi_2 \circ \chi_1] = \Phi[\chi_2] \circ \Phi[\chi_1] .$$

Ten sam diagram przekonuje nas o funktorialności odwzorowania odwrotnego, jeśli tylko potraktować niezmienniki wiązek jako dane, a odwzorowania G-ekwiwariantne – jako przypisane tym ostatnim. □

Uwaga 2. Termin „wiązka dołączona” bywa używany w literaturze w odniesieniu do wiązki stowarzyszonej

$$\big(\mathrm{ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}} \mathfrak{g}, B, \mathfrak{g}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}} \mathfrak{g}}\big) ,$$

o włóknie typowym tożsamym z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G.

Mamy też zasadnicze

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Przykł. 1 (2). Istnieje kanoniczna struktura wiązki grup na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, lokalnie modelowana na strukturze grupy na włóknie typowym G, tj. są określone: łączna operacja binarna

$$[M] \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

posiadająca element neutralny oraz operacja unarna

$$[\mathrm{Inv}] \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft ,$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty grupy. Struktura ta indukuje kanonicznie strukturę grupy (Frécheta–Liego) na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ tej wiązki, mającą swą realizację na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ indukowaną przez odwzorowanie

$$[\lambda]. \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty (lDG1) i (lDG2) działania grupy Liego na rozmaitości i modelowane lokalnie na λ.

Dowód: Rozważmy na wstępnie operację binarną

$$\begin{aligned}
[M] \quad &: \quad \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \\
&: \quad \big([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)]\big) \longmapsto \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big] ,
\end{aligned}$$

wraz z przyporządkowaniem – włókno po włóknie –

$$[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \;:\; \{\bullet\} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \;:\; \bullet \longmapsto [(p,e)]\,, \quad p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

oraz operacją unarną

$$[\mathrm{Inv}] \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft \;:\; [(p,g)] \longmapsto \big[\big(p,g^{-1}\big)\big]\,.$$

Zaczniemy od sprawdzenia, że wszystkie trzy odwzorowania są dobrze określone. Niech zatem $(p_3,g_3) \in [(p_1,g_1)]$, tj. $(p_3,g_3) = (p_1 \triangleleft g_{13}, \mathrm{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$ oraz $(p_4,g_4) \in [(p_2,g_2)]$, tj. $(p_4,g_4) = (p_2 \triangleleft g_{24}, \mathrm{Ad}_{g_{24}^{-1}}(g_2))$, gdzie dla skrótu oznaczyliśmy $g_{ij} \equiv \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_i,p_j)$, $(i,j) \in \{(1,3),(2,4)\}$, a wówczas – na mocy Stw. 6&7.1 – otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \big[\big(p_3, g_3 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(g_3 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big)\big] \\ = \;& \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(\mathrm{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1) \cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}\cdot g_{24}^{-1}}(g_2)\big)\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{13}\cdot g_{34}\cdot g_{42}}(g_2)\big)\big] \\ = \;& \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{g_{12}}(g_2)\big)\big] \end{aligned}$$

oraz

$$\big[\big(p_3, g_3^{-1}\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(g_3^{-1}\big)\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}(g_3)^{-1}\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1^{-1}\big)\big]\,,$$

a nadto stwierdzamy, że wartość odwzorowania $[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$ nie zależy od wyboru punktu we włóknie nad $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)$, oto bowiem dla dowolnego $\widetilde{p} = p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})$ dostajemy

$$[(\widetilde{p},e)] = \big[\big(p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p}), e\big)\big] = \big[\big(p, \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})}(e)\big)\big] = [(p,e)]\,.$$

Dowód stwierdzenia, że powyższa struktura jest w istocie lokalnie modelowana na G, sprowadza się do wykazania, że izomorfizmy modelujące włókna wiązki dołączonej,

$$[p_*]_{\mathrm{Ad}} \;:\; \big(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big)_x \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; [(p,g)] \longmapsto \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(g)\,, \quad x \in B\,,$$

są homomorfizmami grup, co czynimy poniżej (dla dowolnej pary punktów $(p_1,g_1),(p_2,g_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$ o własności $p_1,p_2 \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$), w odwołaniu do Stw. 6&7.1,

$$\begin{aligned} [p_*]_{\mathrm{Ad}} \circ [M]\big([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)]\big) &= [p_*]_{\mathrm{Ad}}\big(\big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big]\big) \\ &= \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}\big(g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big) \\ &= \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g_1) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2) \\ &= \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g_1) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}(g_2) \\ &\equiv M\big([p_*]_{\mathrm{Ad}}\big([p_1,g_1]\big), [p_*]_{\mathrm{Ad}}\big([p_2,g_2]\big)\big)\,. \end{aligned}$$

Pierwszym krokiem na drodze do zrekonstruowania działania włókno po włóknie grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ jest identyfikacja następującego lewego działania wiązki dołączonej na P_{G}:

$$[r]_\cdot \;:\; \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \;:\; \big([(p,g)],\widetilde{p}\big) \longmapsto r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\,.$$

Jest ono w pełni jednoznacznie określone, oto bowiem dla dowolnego reprezentanta $(p_2,g_2) \in [(p_1,g_1)]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) &= r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\ &= r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)}(\widetilde{p})\,. \end{aligned}$$

O jego gładkości przesądza Stw. Niezb-29 – istotnie, $[r]_\cdot$ jest (jedynym) gładkim odwzorowaniem indukowanym przez stałe na poziomicach rzutu kanonicznego $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}$ odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\widetilde{r}_\cdot \;:\; (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}) \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \;:\; \big((p,g),\widetilde{p}\big) \longmapsto r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\,,$$

tj. mamy diagram przemienny

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \\
\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}\big) \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[urr, "\widetilde{r}."] \arrow[rr, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & & \mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[u, "{[r].}"']
\end{tikzcd}
.
$$

Bez trudu przekonujemy się, że $[r].$ ma własności analogiczne do własności definiujących (lewego) działania grupy: oto element neutralny działa trywialnie,

$$
[r]_{[(p,e)]}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(e)}(\widetilde{p}) = r_e(\widetilde{p}) = \widetilde{p}\,,
$$

a odwzorowanie $[r].$ jest multyplikatywne w pierwszym argumencie, tj. dla dowolnej pary $[(p_1,g_1)]$, $[(p_2,g_2)] \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p})}$ zachodzi tożsamość

$$
\begin{aligned}
& [r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1\cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\
= \quad & r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)\cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)\cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)\cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) \\
= \quad & r_{\mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2^{-1})}(\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1))} \circ r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\
\equiv \quad & r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)\cdot g_2^{-1}\cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g_1)} \circ [r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\,,
\end{aligned}
$$

którą wobec równości

$$
\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p}),p_1\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_{g_2\cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde{p})}(p_2),p_1\big) = \big(g_2 \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde{p})\big)^{-1} \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)
$$

możemy przepisać w pożądanej postaci

$$
\begin{aligned}
[r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde{p}) \quad & = \quad r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p}),p_1)}(g_1)}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\big) \\
& \equiv \quad [r]_{[(p_1,g_1)]} \circ [r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\,.
\end{aligned}
$$

Należy przy tym podkreślić, że zdefiniowane tu działanie wiązki dołączonej jest przemienne z działaniem prawostronnym definiującym $r.$ – w rzeczy samej, dla dowolnych $[(p,g)] \in \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, $h \in \mathrm{G}$ i $\widetilde{p} \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$ stwierdzamy, że

$$
\begin{aligned}
[r]_{[(p,g)]} \circ r_h(\widetilde{p}) \quad & = \quad r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(r_h(\widetilde{p}),p)}(g)}\big(r_h(\widetilde{p})\big) = r_{g\cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_h(\widetilde{p}))}(p) \\
& = \quad r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)\cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_h(\widetilde{p}))}\big(r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\big) \\
& \equiv \quad r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},r_h(\widetilde{p}))}\big([r]_{[(p,g)]}(\widetilde{p})\big) = r_h \circ [r]_{[(p,g)]}(\widetilde{p})\,.
\end{aligned}
$$

Działanie to możemy następnie podnieść, z zachowaniem wszystkich sprawdzonych powyżej jego pożądanych własności, z przestrzeni totalnej wiązki dołączonej do przestrzeni cięć (globalnych) tejże wiązki, wedle schematu

$$
\Gamma[r].\ :\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ (\gamma,p) \longmapsto [r]_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p)\,.
$$

Przestrzeń $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ (wyposażona w naturalną strukturę rozmaitości Frécheta) objawia się w roli nośnika struktury grupy (Frécheta–Liego) o operacjach grupowych (σ jest *dowolnym* cięciem lokalnym P_{G} na otoczeniu danego punktu w bazie)

$$
\begin{aligned}
\Gamma[M] \quad & : \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\ :\ (\gamma_1,\gamma_2) \longmapsto [M] \circ (\gamma_1,\gamma_2)\,, \\
\Gamma[\mathrm{Inv}] \quad & : \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\ \circlearrowleft\ :\ \gamma \longmapsto [\mathrm{Inv}] \circ \gamma\,, \\
\Gamma[\varepsilon] \quad & : \quad \{\bullet\} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\ :\ \bullet \longmapsto \big[\big(\sigma(\cdot),e\big)\big]\,,
\end{aligned}
$$

indukowanych w oczywisty sposób (punktowo) z odnośnych operacji na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, i zarazem – w roli podgrupy grupy automorfizmów wiązki głównej P_{G} (nad identycznością na bazie), przy czym odwzorowanie $\Gamma[r]_\gamma$ utożsamiamy z automorfizmem $(\Gamma[r]_\gamma, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)$ w zapisie Def. 6&7.3. Używając tak rozumianego działania grupy cięć wiązki dołączonej na P_{G}, możemy następnie w oczywisty sposób rozszerzyć działanie tejże grupy cięć do wiązki $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M$ nad wyjściową bazą B kładąc

$$\Gamma[\widetilde{r}]_{\cdot} := \Gamma[r]_{\cdot} \times \mathrm{id}_M \quad : \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M$$

$$: \quad \big(\gamma, (p, m)\big) \longmapsto \big([r]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p), m\big).$$

Własnością tego działania o kluczowym znaczeniu dla naszych dalszych rozważań jest jego przemienność z działaniem $\widetilde{\lambda}_{\cdot}$ zdefiniowanym w Równ. (6&7.3), stanowiącym podstawę konstrukcji wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$. Istotnie, dla dowolnych $\gamma \equiv [(\sigma, \mu)] \in \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, $g \in \mathrm{G}$ oraz $(p, m) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M$, otrzymujemy – przywoławszy sprawdzoną uprzednio przemienność działań: $[r]_{\cdot}$ i $r_{\cdot}$ – x

$$\begin{aligned}
\Gamma[\widetilde{r}]_\gamma \circ \widetilde{\lambda}_g(p, m) &= \big([r]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(r_g(p))}\big(r_g(p)\big), \lambda_{g^{-1}}(m)\big) \\
&\equiv \big([r]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \circ r_g(p), \lambda_{g^{-1}}(m)\big) = \big(r_g \circ [r]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p), \lambda_{g^{-1}}(m)\big) \\
&= \widetilde{\lambda}_g \circ \Gamma[\widetilde{r}]_\gamma(p, m).
\end{aligned}$$

W konsekwencji tego faktu działanie indukowane $\Gamma[\widetilde{r}]_{\cdot}$ zstępuje na rozmaitość orbit $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G} \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$, tj. kanonicznie indukuje działanie lewostronne grupy $\Gamma(P_{\mathrm{Ad}_{\cdot}}\mathrm{G})$ na rozmaitości $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ dane wzorem

$$[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_{\cdot} \quad : \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

$$: \quad \big(\gamma, [(p, m)]\big) \longmapsto \big[\big([r]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p), m\big)\big].$$

Dotychczasowa nasza analiza przekonuje, że odwzorowanie to jest dobrze określone i ma wszystkie własności działania (lewostronnego) grupy. W ostatnim kroku indukujemy przy jego użyciu postulowane w treści dowodzonego stwierdzenia działanie grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na przestrzeni cięć (globalnych) wiązki stowarzyszonej,

$$\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_{\cdot} \quad : \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \longrightarrow \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$$

$$: \quad \big(\gamma, [(\sigma, \mu)]\big) \longmapsto \big[\big([r]_{\gamma \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \sigma(\cdot)} \circ \sigma(\cdot), \mu(\cdot)\big)\big] \equiv \big[\big([r]_{\gamma(\cdot)} \circ \sigma(\cdot), \mu(\cdot)\big)\big]. \tag{2}$$

To ostatnie w oczywisty sposób stanowi podniesienie do przestrzeni cięć odwzorowania

$$[\lambda]_{\cdot} \quad : \quad \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

$$: \quad \big([(p_1, g)], [(p_2, m)]\big) \longmapsto \big[\big(p_2, \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_1)}(g)}(m)\big)\big],$$

którego określoność i multyplikatywność w pierwszym argumencie jest bezpośrednią konsekwencją zweryfikowanych przez nas odnośnych własności działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]_{\cdot}$. To, że – zgodnie z tezą stwierdzenia – działanie $[\lambda]_{\cdot}$ jest lokalnie modelowane na $\lambda_{\cdot}$, stwierdzamy, używając wskazanych wcześniej izomorfizmów $[p_*]_{\mathrm{Ad}}$ oraz $[p_*]_\lambda$. Wykonujemy zatem prosty rachunek:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{[p_*]_{\mathrm{Ad}}([(p_1, g)])}\big([p_*]_\lambda\big([(p_2, m)]\big)\big) = \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*, p_1)}(g)} \circ \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*, p_2)}(m) \\
= \ &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*, p_2) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_1)}(g)}(m) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*, p_2)}\big(\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_1)}(g)}(m)\big) \\
\equiv \ &[p_*]_\lambda\big(\big[\big(p_2, \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_1)}(g)}(m)\big)\big]\big) \equiv [p_*]_\lambda \circ [\lambda]_{[(p_1, g)]}\big([(p_2, m)]\big).
\end{aligned}$$

□

Uwaga 3. Postać zapostulowanych w treści dowodu geometryzacji operacji grupowych ($[M], [\mathrm{Inv}]$ i $[\varepsilon]$) oraz działania grupy ($[\lambda].$) może na pierwszy rzut oka wydać się wysoce nieoczywistą. Należy jednak podkreślić, że ich złożoność jest jedynie artefaktem przyjętego wcześniej schematu opisu (punktów) rozmaitości ilorazowych $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ i $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$. Istotnie, gdy np. wykorzystać definicję orbity $[(p_2, g_2)]$ drugiego argumentu w definicji operacji binarnej $[M]$ i sprowadzić ją do postaci

$$[(p_2, g_2)] \equiv \big[\big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(p_1), g_2\big)\big] \equiv \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2) \equiv \widetilde{g}_2\big)\big]$$

(wszak $(p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$), otrzymamy naturalną postać geometrycznego mnożenia:

$$[M]\big([(p_1, g_1)], [(p_1, \widetilde{g}_2)]\big) = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_1)}(\widetilde{g}_2)\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_e(\widetilde{g}_2)\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1 \cdot \widetilde{g}_2\big)\big] .$$

Analogiczny wniosek dotyczy działania $[\lambda].$. Po przepisaniu drugiego jego argumentu wedle powyższego schematu,

$$[(p_2, m)] \equiv \big[\big(p_1, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(m) \equiv \widetilde{m}\big)\big] ,$$

dostajemy

$$[\lambda]\big([(p_1, g)], [(p_1, \widetilde{m})]\big) = \big[\big(p_1, \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_1)}(g)}\big(\widetilde{m}\big)\big)\big] \equiv \big[\big(p_1, \lambda_g\big(\widetilde{m}\big)\big)\big] .$$

Powyższe stwierdzenie wraz z jego konstruktywnym dowodem pokazują dowodnie, że cel, o którym była mowa wcześniej, został osiągnięty. Eksponują przy tym rolę zbioru gładkich cięć wiązki stowarzyszonej, co każe nam przyjrzeć się uważniej temu ostatniemu. Czynimy to w

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 1 i Przykł. 1 (2). Istnieje bijekcja

$$\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M) ,$$

w której zapisie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$ jest zbiorem odwzorowań G-ekwiwariantnych z Def. 6&7.2.

Dowód: Niechaj $\phi \equiv [(\sigma, \mu)] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ będzie cięciem *globalnym* określonym przez cięcia (lokalnie gładkie) $\sigma \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i $\mu \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(B \times M)$ (to ostatnie to lokalnie gładkie odwzorowanie $\mu : \mathrm{B} \longrightarrow M$). Korzystając z odwzorowania ilorazowego i rzutu kanonicznego na bazę wiązki P_{G}, możemy zdefiniować odwzorowanie

$$\Phi_\lambda[\phi] \,:\, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow M \,:\, p \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) .$$

Bez trudu upewniamy się, że powyższa definicja ma sens, oto bowiem dla dowolnej pary $(\sigma', \mu') = (\sigma \triangleleft \mathrm{Inv} \circ \gamma, \gamma \triangleright \mu)$ wyznaczonej w oczywisty sposób przez $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(B \times \mathrm{G})$ otrzymujemy – w odwołaniu do aksjomatyki działania grupy na zbiorze – pożądaną równość

$$\begin{aligned}
\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma'\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu' \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) &= \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \triangleleft \gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1})}\big(\lambda_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \\
&= \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)) \cdot \gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1} \cdot \gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\
&= \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) .
\end{aligned}$$

Jego G-ekwiwariantność wynika wprost z rachunku:

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda[\phi] \circ r_g(p) &= \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g)\big) \\
&= \lambda_{g^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) = \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\lambda.}[\phi](p) ,
\end{aligned}$$

przeprowadzonego dla dowolnych $(p, g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$, a używającego Stw. 5-6.1 oraz wspomnianej wcześniej aksjomatyki.

Ażeby skonstruować odwrotność powyższego przyporządkowania, ustalmy (dowolnie) pokrycie trywializujące $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ wiązki P_{G}, a następnie dowolnemu odwzorowaniu G-ekwiwariantnemu $f : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow M$ przyporządkujmy rodzinę cięć lokalnych

$$S_\lambda[f]_i \quad : \quad \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \,:\, x \longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x, e), f \circ \tau_i^{-1}(x, e)\big)\big], \quad i \in I .$$

Każde z nich jest (lokalnie) gładkie jako superpozycja odnośnych odwzorowań gładkich $\big(\tau_i^{-1}(\cdot, e), f \circ \tau_i^{-1}(\cdot, e)\big) : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)/\mathrm{G}}$. Z łatwością przekonujemy się, że cięcia te są ograniczeniami (do odnośnych zbiorów $\mathcal{O}_i$) cięcia globalnego, stwierdzając, że z racji G-ekwiwariantności odwzorowań τ_i i f w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} S_\lambda[f]_j(x) &= \big[\big(\tau_j^{-1}(x,e), f \circ \tau_j^{-1}(x,e)\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\big), f \circ \tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\big)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g_{ij}(x), f\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g_{ij}(x)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g_{ij}(x), g_{ij}(x)^{-1} \triangleright f \circ \tau_i^{-1}(x,e)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), f \circ \tau_i^{-1}(x,e)\big)\big] \equiv S_\lambda[f]_i(x)\,. \end{aligned}$$

Bezpośredni rachunek obu superpozycji:

$$\Phi_\lambda\big[S_\lambda[f]\big] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow M \;:\; p \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,p)}\big(f(p)\big) = \lambda_e\big(f(p)\big) = f(p)$$

oraz

$$\begin{aligned} S_\lambda\big[\Phi_\lambda\big[[(\sigma,\mu)]\big]\big] \quad &: \quad B \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \\ &: \; x \longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\tau_i^{-1}(x,e), \sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\tau_i^{-1}(x,e))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,e)\big)\big)\big] \\ &\equiv \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\tau_i^{-1}(x,e),\sigma(x))}\big(\mu(x)\big)\big)\big] = [(\sigma,\mu)](x) \end{aligned}$$

pokazuje dowodnie, że prawdziwe są tożsamości

$$\Phi_\lambda \circ S_\lambda = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)}\,, \qquad\qquad S_\lambda \circ \Phi_\lambda = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)}\,.$$

□

Specjalizacja powyższego wyniku do przypadku wiązki dołączonej okazuje się mieć charakter strukturalny, co orzeka

Stwierdzenie 4. Bijekcja

$$\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})\,,$$

o której mówi Stw. 3, jest izomorfizmem między grupą cięć wiązki dołączonej, o strukturze opisanej w dowodzie Stw. 2, i grupą odwzorowań P_{G} w G ekwiwariantnych względem odnośnych działań (lewostronnych) $r_{\mathrm{Inv}(\cdot)}$ i Ad., o naturalnej strukturze punktowej (obecnej na zbiorze odwzorowań, których przeciwdziedziną jest grupa).

Dowód: W notacji dowodów obu stwierdzeń z tezy stwierdzenia dowodzonego sprawdzamy – dla dowolnej pary cięć $\gamma_\alpha = [(\sigma_\alpha, \mu_\alpha)] \in \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ oraz punktu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ –

$$\begin{aligned} &\Phi_{\mathrm{Ad}}\big[\Gamma[M](\gamma_1,\gamma_2)\big](p) \\ =\;& \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_1 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_2 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \\ =\;& \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_1 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ & \cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_2 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ =\;& \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_1 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu_2 \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ =\;& M \circ \big(\Phi_{\mathrm{Ad}}(\gamma_1), \Phi_{\mathrm{Ad}}(\gamma_2)\big)(p)\,. \end{aligned}$$

□

Strukturalny charakter bijekcji, o której mowa w Stw. 2 i 3, najpełniej ilustruje

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Stw. 2 i 3 oraz ich dowodów. Bijekcja Φ_λ jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$: działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\cdot$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$, zdefiniowanego w Równ. (2), oraz naturalnego działania

$$\begin{aligned} [\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda]_\cdot \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M) \\ &: \quad \big(\gamma,\Phi_\lambda[\mu]\big)\longmapsto\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi_\lambda[\mu](\cdot)\big) \end{aligned}$$

na przestrzeni odwzorowań G-ekwiwariantnych $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)$, czyli działanie

$$\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_\cdot\equiv[\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda]_\cdot\circ\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}^{-1}\times\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)}\big)$$

grupy $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G})$ czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M) \arrow[r, "\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\cdot"] \arrow[d, "\Phi_{\mathrm{Ad}}\times\Phi_\lambda"'] & \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M) \arrow[d, "\Phi_\lambda"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G})\times\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_\cdot"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M) \end{tikzcd} .$$

Dowód: Przede wszystkim upewnimy się, że odwzorowanie $\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_\cdot$ jest dobrze określone. W tym celu wybieramy dowolną parę $(\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma],\Phi_\lambda[\mu])\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G})\times\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},M)$ i rozważamy wynik ewaluacji $\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}(\Phi_\lambda[\mu])$ – musimy udowodnić, że ten jest G-ekwiwariantny, co czynimy w rachunku bezpośrednim, wykonanym dla dowolnych $(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}$,

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\circ r_g^*\big(\Phi_\lambda[\mu]\big)(p) \quad &= \quad \lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\circ r_g(p)}\big(\Phi_\lambda[\mu]\circ r_g(p)\big)=\lambda_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p))}\circ\lambda_{g^{-1}}\big(\Phi_\lambda[\mu](p)\big) \\ &= \quad \lambda_{g^{-1}}\big(\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)}\big(\Phi_\lambda[\mu](p)\big)\big)\equiv\lambda_{g^{-1}}\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\mu]\big)(p)\,. \end{aligned}$$

To, że odwzorowanie $\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_\cdot$ spełnia aksjomatykę działania, jest oczywiste. Pozostaje zatem zweryfikować jego ekwiwariantność. Dla dowolnych $\gamma=[(\widetilde{\sigma},\widetilde{\mu})]\in\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i $\phi=[(\sigma,\mu)]\in\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$ oraz $p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ obliczamy więc

$$\begin{aligned} &\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big](p)=\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\lambda_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_{\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p)}\circ\ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ = \quad &\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}(\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\Phi_\lambda[\phi](p)\big) \\ = \quad &\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot,\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot))}(\widetilde{\mu}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\cdot))}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)(p) \\ \equiv \quad &\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)(p)\,, \end{aligned}$$

co jest rezultatem pożądanym. □

Dotychczasowe nasze rozważania ukazały $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ w roli wiązki grup działającej naturalnie na wiązce rozmaitości M z modelowym działaniem λ. Poniższe stwierdzenie istotnie pogłębia tę obserwację.

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Stw. 2 i jego dowodu. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup

$$\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\quad\cong\quad\{\ (\Phi,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},f)\in\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\quad|\quad f=\mathrm{id}_B\ \}$$

$$=: \quad \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Zaczniemy od wskazania bijekcji między zbiorami $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G})$ i $\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$. Wybierzmy (dowolnie) $\gamma\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G})$ (przyp.: w przeciwdziedzinie mamy do czynienia z działaniem dołączonym (prekomponowanym z odwrotnością na Inv, tak by uczynić z niego działanie prawe, czyli takie jak definiujące na dziedzinie)) i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\Psi[\gamma]\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ \circlearrowleft\ :\ p\longmapsto r_{\gamma(p)}(p)\,.$$

Jest ono jawnie G-ekwiwariantne,

$$\begin{aligned}\forall_{(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}}\ :\ \Psi[\gamma]\circ r_g(p) &\equiv r_{\gamma\circ r_g(p)}\big(r_g(p)\big)=r_{g\cdot\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))}(p)=r_{\gamma(p)\cdot g}(p)\\ &= r_g\circ\Psi[\gamma](p)\,,\end{aligned}$$

i zachowuje włókna, a zatem definiuje automorfizm

$$\big(\Psi[\gamma],\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B\big)\in\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.$$

Jest przy tym homomorfizmem grup, o czym przekonuje bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned}\Psi\big[\widetilde{M}(\gamma_1,\gamma_2)\big](p) &= r_{\gamma_1(p)\cdot\gamma_2(p)}(p)\equiv r_{\gamma_2(p)\cdot\mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))}(p)\\ &= r_{\mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))}\circ r_{\gamma_2(p)}(p)=r_{\gamma_1(p\triangleleft\gamma_2(p))}\circ r_{\gamma_2(p)}(p)\\ &\equiv \Psi[\gamma_1]\circ\Psi[\gamma_2](p)\,,\end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnych $\gamma_1,\gamma_2\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G})$. Na tym etapie wystarczy przywołać Stw. 3, aby uzyskać homomorfizm grup

$$\big(\Psi[\cdot],\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B\big)\circ\Phi_{\mathrm{Ad.}}\ :\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\longrightarrow\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\,.$$

Idąc w kierunku odwrotnym, przyporządkujmy dowolnemu automorfizmowi $(\Phi,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\in\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$ odwzorowanie

$$\chi[(\Phi,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)]\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ p\longmapsto\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi(p)\big)\,,$$

którego G-ekwiwariantności dowodzimy w odwołaniu do Stw. 5-6.1, a dla dowolnych $(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\chi[(\Phi,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)]\circ r_g(p) &\equiv \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p),\Phi\circ r_g(p)\big)=\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p),r_g\circ\Phi(p)\big)\\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi(p)\big)\big)\equiv\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\chi[(\Phi,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)](p)\,.\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane tym sposobem odwzorowanie

$$\chi\ :\ \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathrm{G})$$

jest homomorfizmem grup – w rzeczy samej, dla dowolnej pary automorfizmów $(\Phi_\alpha,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\in\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)$, $\alpha\in\{1,2\}$ obliczamy

$$\begin{aligned}\chi\big[(\Phi_1,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\circ(\Phi_2,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\big](p) &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_1\circ\Phi_2(p)\big)\\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_1(p)\big)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p),\Phi_1\circ\Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

ale też

$$\begin{aligned}&\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p),\Phi_1\circ\Phi_2(p)\big)=\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p),\Phi_1\big(p\triangleleft\phi_P\big(p,\Phi_2(p)\big)\big)\big)\\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p),\Phi_1(p)\triangleleft\phi_P\big(p,\Phi_2(p)\big)\big)=\phi_P\big(p,\Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\begin{aligned}&\chi\big[(\Phi_1,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\circ(\Phi_2,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\big](p)=\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_1(p)\big)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_2(p)\big)\\ &\equiv \widetilde{M}\big(\chi\big[(\Phi_1,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\big],\chi\big[(\Phi_2,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\big]\big)(p)\,,\end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami. Ostatecznie otrzymujemy homomorfizm grup

$$S_{\mathrm{Ad.}} \circ \chi \; : \; \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Ażeby stwierdzić, że jest to odwrotność wskazanego wcześniej homomorfizmu $\Psi \circ \Phi_{\mathrm{Ad}}$, wystarczy sprawdzić, że χ jest odwrotnością automorfizmu $\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big)$, co czynimy wprost licząc – dla dowolnych $(p, g, x) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \times B$ –

$$\begin{aligned} \big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \circ \chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)](p, g, x) &= \big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \Phi(p))}(p), g, x\big) = \big(\Phi(p), g, x\big) \\ &\equiv (\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)(p, g, x) \end{aligned}$$

oraz

$$\chi \circ \big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big)[\gamma](p) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, r_{\gamma(p)}(p)\big) = \gamma(p)\,.$$

□