GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II
WYKŁAD 14.
(CECI N'EST PAS) LA FIN

Symetrie wycechowane w języku wiązek głównych i stowarzyszonych – topologia i geometria

Przedstawimy obecnie fundamentalne zastosowanie konstrukcji wiązek głównych i stowarzyszonych w mechanice i teorii pola, jakim jest uniwersalny schemat **cechowania** (tj. **ulokalniania**) ich symetrii globalnych. Zaczniemy od pomocniczej

Definicja 1. Niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$ nad pokryciem trywializującym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i^B\}_{i \in I}$, przy czym zakładamy[1], że elementy pokrycia są zarazem dziedzinami map $\kappa_i^B : \mathcal{O}_i^B \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{\times m}$, $m = \dim B$ pewnego atlasu $\widehat{\mathscr{A}_B}$ bazy B. Zdefiniujmy pomocnicze dyfeomorfizmy

$$T_v^i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\cong} T_v^i(\mathcal{U}_i) =: \mathcal{U}_i^0 : w \longmapsto w - v, \quad v \in \mathcal{U}_i$$

odwzorowujące zbiory otwarte $\mathcal{U}_i$ w odnośne otoczenia $\mathbf{0}_m \equiv T_v^i(v) \in \mathbb{R}^{\times m}$. Wybrawszy dowolny atlas $\widehat{\mathscr{A}_F} = \{\kappa_\alpha^F\}_{\alpha \in J}$ włókna typowego F, złożony z map $\kappa_\alpha^F : \mathcal{O}_\alpha^F \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^{\times n}$, $n = \dim F$, $\alpha \in J$, indukujemy na E atlas $\widehat{\mathscr{A}_E} = \{\kappa_{i,\alpha}^E\}_{(i,\alpha) \in I \times J}$, który tworzą mapy

$$\kappa_{i,\alpha}^E \equiv (\kappa_i^B \times \kappa_\alpha^F) \circ \tau_i \restriction_{\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F)} : \tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^{\times m+n},$$

zwane **mapami dostosowanymi**. Na zbiorze

$$\Gamma_x(E) := \{ \ \phi \in \Gamma_{\rm loc}(E) \quad | \quad (\pi_E \circ \phi)^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset \ \}$$

cięć lokalnych wiązki E określonych w punkcie $x \in B$ zadajemy relację równoważności:

$$\phi_1 \sim_{j_x^1} \phi_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(\phi_1(x), \mathsf{T}_x\phi_1\big) = \big(\phi_2(x), \mathsf{T}_x\phi_2\big).$$

Klasę abstrakcji cięcia $\phi \in \Gamma_x(E)$ względem tej relacji oznaczamy symbolem

$$j_x^1\phi \equiv [\phi]_{\sim_{j_x^1}}$$

i określamy mianem **pierwszego miotu różniczkowego cięcia** ϕ. Zbiór tych klas abstrakcji nad ustalonym punktem $x \in B$ będziemy oznaczać symbolem

$$\mathsf{J}_x^1 E \equiv \{ \ j_x^1\phi \quad | \quad \phi \in \Gamma_x(E) \ \}.$$

Wiązka pierwszych miotów różniczkowych cięć wiązki E to wiązka włóknista o składowych

- baza B o strukturze rozmaitości zadawanej przez atlas $\widehat{\mathscr{A}_B}$;
- przestrzeń totalna

  $$\mathsf{J}^1 E := \bigsqcup_{x \in B} \mathsf{J}_x^1 E$$

  o strukturze rozmaitości opisanej poniżej;
- włókno typowe $\mathsf{J}_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{\times m} \times F)$ o strukturze rozmaitości różniczkowalnej opisanej poniżej;
- rzut na bazę

  $$\pi_{\mathsf{J}^1 E} : \mathsf{J}^1 E \longrightarrow B : (j_x^1\phi, x) \longmapsto x.$$

[1] Założenie to nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań, oto bowiem pokrycie takie uzyskujemy dokonując rozdrobnienia dowolnego pokrycia trywializującego względem wybranego (dowolnie) atlasu na B.

Przy tym odwzorowania

$$\begin{aligned}\mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha} \quad &: \quad \mathsf{J}^1E_{i,\alpha} \equiv \{\ j^1_x\phi \quad | \quad \phi(x) \in \tau_i^{E\,-1}(\mathcal{O}^B_i \times \mathcal{O}^F_\alpha)\ \} \xrightarrow{\cong} \mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha}(\mathsf{J}^1E_{i,\alpha}) \\ &: \quad j^1_x\phi \longmapsto \big(\kappa^B_i(x), \kappa^F_\alpha \circ \phi(x), \mathsf{D}(\kappa^F_\alpha \circ \phi \circ \kappa^{B\,-1}_i)\big(\kappa^B_i(x)\big)\big), \quad (i,\alpha) \in I \times J\end{aligned}$$

indukują na J^1E mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha}(\mathsf{J}^1E_{i,\alpha}) \subset \mathbb{R}^{\times m+n+mn}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset \mathsf{J}^1E$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{(i,\alpha)\in I\times J}\ :\ \mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha}(\mathcal{V} \cap \mathsf{J}^1E_{i,\alpha}) \in \mathscr{T}\big(\mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha}(\mathsf{J}^1E_{i,\alpha})\big).$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha}$ są – wprost na mocy jej konstrukcji – homeomorfizmami i (dzięki temu) możemy ich użyć jako map, zwanych **mapami indukowanymi** (lub **naturalnymi**), o odnośnych transformacjach współrzędniowych na

$$\mathsf{J}^1E_{ij,\alpha\beta} \equiv \{\ j^1_x\phi \quad | \quad \phi(x) \in \tau_i^{E\,-1}(\mathcal{O}^B_{ij} \times \mathcal{O}^F_{\alpha\beta})\ \}$$

w postaci

$$\begin{aligned}\mathsf{J}^1\kappa^E_{ij,\alpha\beta} := \mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha} \circ \big(\mathsf{J}^1\kappa^E_{j,\beta}\big)^{-1}\ :\ \mathsf{J}^1\kappa^E_{j,\beta}(\mathsf{J}^1E_{ij,\alpha\beta}) &\xrightarrow{\cong} \mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha}(\mathsf{J}^1E_{ij,\alpha\beta}) \\ :\ \big(\kappa^B_j(x), \kappa^F_\beta \circ \phi(x), \mathsf{D}(\kappa^F_\beta \circ \phi \circ \kappa^{B\,-1}_j)\big(\kappa^B_j(x)\big)\big)& \\ \longmapsto \big(\kappa^B_i(x), \kappa^F_\alpha \circ \phi(x), \mathsf{D}(\kappa^F_\alpha \circ \phi \circ \kappa^{B\,-1}_i)\big(\kappa^B_i(x)\big)\big)& \\ = \big(t^B_{ij}\big(\kappa^B_j(x)\big), t^F_{\alpha\beta}\big(\kappa^F_\alpha \circ \phi(x)\big),& \\ \mathsf{D}t^F_{\alpha\beta}\big(\kappa^F_\beta \circ \phi(x)\big) \circ \mathsf{D}(\kappa^F_\beta \circ \phi \circ \kappa^{B\,-1}_j)\big(\kappa^B_j(x)\big) \circ \mathsf{D}t^B_{ij}\big(\kappa^B_j(x)\big)^{-1}\big)&\end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy C^∞ w składowej bazowej oraz w składowej z włókna wiązki E (z założenia),

$$t^B_{ij} \in \mathrm{Diff}^\infty\big(\kappa^B_j(\mathcal{O}^B_{ij}), \kappa^B_i(\mathcal{O}^B_{ij})\big), \qquad t^F_{\alpha\beta} \in \mathrm{Diff}^\infty\big(\kappa^F_\beta(\mathcal{O}^F_{\alpha\beta}), \kappa^F_\alpha(\mathcal{O}^F_{\alpha\beta})\big),$$

i tejże klasy C^∞ w składowej ostatniej w argumencie bazowym oraz tym z włókna wiązki E,

$$\mathsf{D}t^F_{\alpha\beta} \in C^\infty\big(\kappa^F_\beta(\mathcal{O}^F_{\alpha\beta}), \mathbb{R}^{\times n^2}\big), \qquad \mathsf{D}t^B_{ij} \in C^\infty\big(\kappa_j(\mathcal{O}^B_{ij}), \mathbb{R}^{\times m^2}\big)$$

a nadto liniowa, więc klasy C^∞ w argumencie ostatnim $\mathsf{D}(\kappa^F_\beta \circ \phi \circ \kappa^{B\,-1}_j)\big(\kappa^B_j(x)\big)$, zatem w sumie klasy C^∞, tym samym więc zadaje na J^1E strukturę rozmaitości różniczkowalnej. Zauważmy przy tym, że rzut na bazę jest surjekcją klasy C^∞ jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{\mathsf{J}^1E} \restriction_{\mathsf{J}^1E_{i,\alpha}} = \kappa^{B\,-1}_i \circ \mathrm{pr}_1 \circ \mathsf{J}^1\kappa^E_{i,\alpha}.$$

Strukturę rozmaitości różniczkowalnej na zbiorze $\mathsf{J}^1_{\mathbf{0}_m}(\mathbb{R}^{\times m} \times F)$ zadajemy w sposób analogiczny do opisanego powyżej, przy czym wykorzystujemy tu globalną mapę na bazie $\mathbb{R}^{\times m}$ wiązki trywialnej $\mathbb{R}^{\times m} \times F$ oraz mapy lokalne κ^F_α, $\alpha \in J$ na jej włóknie. Mamy więc na podzbiorach

$$\mathsf{J}^1_{\mathbf{0}_m}\big(\mathbb{R}^{\times m} \times \mathcal{O}^F_\alpha\big) \equiv \{\ j^1_{\mathbf{0}_m}\phi \quad | \quad \phi(0) \in \tau_i^{E\,-1}\big(\{\mathbf{0}_m\} \times \mathcal{O}^F_\alpha\big)\ \}$$

odwzorowania

$$\begin{aligned}\mathsf{J}^1_{\mathbf{0}_m}\kappa^F_\alpha \quad &: \quad \mathsf{J}^1_{\mathbf{0}_m}\big(\mathbb{R}^{\times m} \times \mathcal{O}^F_\alpha\big) \xrightarrow{\cong} \mathsf{J}^1_0\tau^F_\alpha\big(\mathsf{J}^1_0\big(\mathbb{R}^{\times m} \times \mathcal{O}^F_\alpha\big)\big) \\ &: \quad j^1_{\mathbf{0}_m}\phi \longmapsto \big(\kappa^F_i \circ \phi(\mathbf{0}_m), \mathsf{D}\big(\kappa^F_i \circ \phi\big)(\mathbf{0}_m)\big),\end{aligned}$$

które indukują na $\mathsf{J}^1_{\mathbf{0}_m}(\mathbb{R}^{\times m} \times F)$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathsf{J}^1_0\tau^F_\alpha\big(\mathsf{J}^1_0\big(\mathbb{R}^{\times m} \times \mathcal{O}^F_\alpha\big)\big) \subset \mathbb{R}^{\times n(1+m)}$ i względem tej topologii pełnią rolę map lokalnych klasy C^∞.

Trywializacje lokalne wiązki J^1E są zadane w postaci

$$J^1\tau^E_i \quad : \quad \pi^{-1}_{\mathsf{J}^1E}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathsf{J}^1_{\mathbf{0}_m}(\mathbb{R}^{\times m} \times F)$$

$$: \quad (j^1_x\phi, x) \longmapsto \Big(x, j^1_{\mathbf{0}_m}\Big(\big(T_{\kappa_i^B(x)} \circ \kappa_i^B \times \mathrm{id}_F\big) \circ \tau_i^E \circ \phi \circ \kappa_i^{B\,-1} \circ T^{-1}_{\kappa_i^B(x)}\Big)\Big)$$

W odwołaniu do powyższej definicji, która formalizuje intuicyjne pojęcie klas współstyczności (pierwszego rzędu) cięć lokalnych wiązki (w analogii do konstrukcji wiązki stycznej jako wiązki klas współstyczności ścieżek w rozmaitości) możemy wprowadzić podstawowy koncept fizykalny.

Definicja 2. Niechaj Σ będzie gładką rozmaitością różniczkowalną wyposażoną w strukturę metryczną $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathsf{T}^*\Sigma \otimes_{\mathbb{R},\Sigma} \mathsf{T}^*\Sigma)$ o sygnaturze $(d,1)$, $d \in \mathbb{N}$ i niech F będzie gładką rozmaitością o grupie automorfizmów (dyfeomorfizmów zachowujących ewentualną dodatkową strukturę, np. liniową lub torsora grupy) $\mathrm{Aut}(F)$. **Lagranżowska teoria pola typu F nad (Σ, g)** to para

$$\mathscr{F} := \big((\mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathcal{F}}), \mathcal{A}_{\mathrm{DF}}\big)$$

złożona z wiązki włóknistej $(\mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathcal{F}})$, noszącej miano **kowariantnej wiązki konfiguracyjnej typu F** (albo po prostu **wiązki pól typu F**), o włóknie typowym F i trywializacjach lokalnych

$$\tau_i \;:\; \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F\,, \quad i \in I$$

stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy Σ, zwanej **czasoprzetrzenią**, oraz funkcjonału

$$\mathcal{A}_{\mathrm{DF}}^{\mathscr{F}} \;:\; \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{U}(1)\,,$$

zwanego **amplitudą Diraca–Feynmana**, którego punkty krytyczne są określane jako **klasyczne konfiguracje pola typu F**. Przy tym zakładamy istnienie funkcjonału[2]

$$S_{\mathscr{F}} \;:\; \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

wyznaczającego amplitudę Diraca–Feynmana wedle wzoru

$$\mathcal{A}_{\mathrm{DF}}^{\mathscr{F}} = \exp \circ \big(\mathrm{i}\, S_{\mathscr{F}}\big)\,,$$

który nazywamy **funkcjonałem działania teorii pola $\mathscr{F}$**, a który jest zadany w postaci klasy *modulo* 2π całek po Σ z morfizmu wiązek włóknistych

$$\mathcal{L}_{\mathscr{F}} \;:\; \mathsf{J}^1\mathcal{F} \longrightarrow \bigwedge\nolimits^{d+1}\mathsf{T}^*\Sigma$$

zwanego **gęstością lagranżjanu teorii pola $\mathscr{F}$**, tj. dla dowolnego cięcia $\phi \in \Gamma(\mathcal{F})$ zachodzi

$$S_{\mathscr{F}}[\phi] = \int_\Sigma \mathcal{L}_{\mathscr{F}}(\mathrm{j}^1_\cdot\phi) + 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Cięcia globalne wiązki $\mathcal{F}$ zyskują w tym kontekście przydomek **pól typu F**, a ich przestrzeń $\Gamma(\mathcal{F})$ jest nazywana **przestrzenią konfiguracyjną teorii pola $\mathscr{F}$**.

Symetrią globalną teorii pola $\mathscr{F}$ nazywamy dowolny automorfizm $(\Phi, \mathrm{id}_\Sigma) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Bun}(\Sigma)}(\mathcal{F}\,|\,\Sigma)$ (pokrywający identyczność na bazie) wiązki pól tejże teorii modelowany (globalnie) na automorfizmie włókna typowego $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$ (niezależnym od punktu w bazie, a nawet – od elementu pokrycia trywializującego) w sensie wyrażanym przez rodzinę diagramów przemiennych indeksowaną przez $I \ni i$

$$\begin{tikzcd}
\pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\tau_i"'] & \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\
\mathcal{O}_i \times F \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \varphi"'] & \mathcal{O}_i \times F
\end{tikzcd}$$

i indukujący automorfizm

$$\Gamma\Phi \;:\; \Gamma(\mathcal{F}) \circlearrowleft \;:\; \phi \longmapsto \Phi \circ \phi$$

[2] Wybór przeciwdziedziny funkcjonału działania został wyjaśniony na etapie wcześniejszym, kiedy dyskutowaliśmy kwantowomechaniczną interpretację amplitud Diraca–Feynmana.

przestrzeni konfiguracyjnej o własności

$$\mathcal{A}_{\rm DF}^{\mathscr{F}} \circ \Phi = \mathcal{A}_{\rm DF}^{\mathscr{F}}\,.$$

Grupie złożonej ze wszystkich automorfizmów wiązki pól opisanej wyżej postaci nadajemy miano **grupy symetrii globalnych teorii pola** $\mathscr{F}$. Będziemy ją oznaczać symbolem

$$\mathrm{Symm}(\mathscr{F} \nwarrow F)\,.$$

W świetle powyższej definicji naturalnym jest przyjąć, że grupa ta jest zawarta w komutancie grupy strukturalnej wiązki (w której przyjmują wartości odwzorowania przejścia określające relacje pomiędzy lokalnymi trywializacjami, o *wspólnej* prezentacji φ automorfizmu Φ).

W powyższej definicji symetrie globalne zyskują *implicite* interpretację ***czynną***, w ramach której Φ przeprowadza w siebie *różne* konfiguracje pola, w szczególności zaś – konfiguracje krytyczne (czyli klasyczne) na *nietożsame* z nimi (w sensie fizykalnym) konfiguracje krytyczne. Jako takie, symetrie globalne określają na przestrzeni stanów teorii fizycznej odpowiedniość pomiędzy *różnymi* konfiguracjami klasycznymi.

Automorfizmy włókna typowego wiązki pól można także interpretować w ujęciu ***biernym*** jako transformacje współrzędniowe na F, czyli – innymi słowy – jako zmiany *opisu* jednej i tej samej konfiguracji pola. Ażeby to lepiej zrozumieć, oznaczmy przez $D \equiv \dim F$ liczbę niezależnych stopni swobody teorii pola $\mathscr{F}$ i rozważmy lokalne mapy: $\kappa_1 : \mathcal{O}_x^F \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^D$ na otoczeniu $x \in F$ i $\kappa_2 : \mathcal{O}_{\varphi(x)}^F \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{\phi(x)} \subset \mathbb{R}^D$ na otoczeniu $\varphi(x) \in F$, zakładając przy tym dla prostoty dalszych rozważań, że $\varphi(\mathcal{O}_x^F) \subset \mathcal{O}_{\varphi(x)}^F$. W tych okolicznościach możemy traktować dyfeomorfizm φ, a ściślej – jego lokalną prezentację współrzędniową $\varphi_{21} \equiv \kappa_2 \circ \varphi \circ \kappa_1^{-1}$, jako (gładką) redefinicję współrzędnych punktów $y \in \mathcal{O}_x^F$ z wyjściowych $\kappa_1(y)$ na nowe $\kappa_2 \circ \varphi(y)$, oto bowiem

$$\kappa_2 \circ \varphi(y) \equiv \varphi_{21}\big(\kappa_1(y)\big)\,.$$

Gdy spojrzeć na transformacje symetrii jako na takie właśnie arbitralne zmiany układu współrzędnych (lokalnych) w przestrzeni wewnętrznych stopni swobody teorii pola, wówczas staje się całkowicie jasnym, że nie ma żadnego powodu oczekiwać (w czasoprzestrzeni, w której informacja propaguje się ze skończoną szybkością), iżby obserwatorzy opisujący zjawiska teoriopolowe z *różnych* punktów czasoprzestrzeni Σ dokonywali *równoczesnych* redefinicji swych lokalnych opisów. W powszechnie przyjętym (choć nie jedynym) paradygmacie gładkiego opisu zjawisk fizykalnych postulujemy przeto ***ulokalnienie*** albo inaczej ***wycechowanie*** symetrii globalnej. Polega ono na zastąpieniu wyjściowej wiązki pól $\mathcal{F}$ nową wiązką o *tym samym* włóknie typowym F (więc o tych samych stopniach swobody), na której, jednakowoż, symetrie modelowane przez $\mathrm{G} \equiv \mathrm{Symm}(\mathscr{F} \nwarrow F)$ (w obrazie lokalnych trywializacji) są realizowane *lokalnie*, tj. mamy do czynienia z (lokalnie) gładkimi profilami transformacji symetrii w $\mathrm{Symm}(\mathscr{F} \nwarrow F)$, czyli z ***lokalnymi transformacjami cechowania*** $\gamma : \mathcal{O}^B \longrightarrow \mathrm{G}$, które nie zmieniają wartości amplitudy Diraca–Feynmana teorii z ***wycechowaną*** symetrią G. Ta ostatnia powinna być w jakimś sensie[3] strukturalnie pokrewna wyjściowej teorii pola $\mathscr{F}$, tj. powinien istnieć (zasadniczo) algorytmiczny schemat przepisywania $\mathscr{F}$ do nowej postaci z symetrią wycechowaną. Punktu wyjścia do uniwersalnej formalizacji *niedynamicznego* aspektu takiej transkrypcji, tj. tego, który dotyczy redefinicji samej wiązki pól $\mathcal{F}$, nie zaś – dodatkowych struktur na wiązce stycznej $\mathsf{T}\mathscr{F}$ nad nią, pozwalających zdefiniować człony gęstości langranżjanu zależne od cięć gładkich poprzez ich *pochodne*, dostarcza konstrukcja wiązki stowarzyszonej z wiązką główną o grupie strukturalnej G, o czym przekonuje nas chwila refleksji nad treścią Stw. 12&13.2 w połączeniu ze Stw. 12&13.3 i 12&13.4. Jedynym uogólnieniem konstrukcji prowadzącej do Def. 6.1 podyktowanym przez potrzebę uwzględnienia generycznej struktury wiązki pól nad czasoprzestrzenią Σ oraz – przede wszystkim – ewentualną dodatkową strukturę na jej przestrzeni totalnej, do której możemy chcieć

[3]Nie ma całkowicie uniwersalnego schematu transkrypcji wyjściowej teorii pola $\mathscr{F}$ do postaci z symetrią wycechowaną. Istnieją natomiast pewne standardowe schematy cechowania o ograniczonym zakresie stosowalności, z których najbardziej rozpowszechniony jest tzw. schemat minimalny – ten jest omawiany krytycznie acz konstruktywnie np. na trzecim semestrze wykładu monograficznego Autora pt. „Elementy Algebry i Geometrii Wyższej w Fizyce".

podnieść ulokalnianą symetrię – jest zastąpienie rozmaitości M w tejże definicji (odpowiadającej wiązce *trywialnej* $\Sigma \times M \longrightarrow \Sigma$) dowolną wiązką nad bazą Σ wiązki głównej $\mathsf{P}_{\rm G}$. Poniżej przedstawiamy analogony definicji, stwierdzeń i twierdzeń z Wykładów 12. i 13. uwzględniające to umotywowane fizykalnie uogólnienie. Uważny Czytelnik dotychczasowych wykładów bez trudu znajdzie w nich wszelkie narzędzia formalne niezbędne do sprawdzenia sensowności i poprawności definicji i udowodnienia (s)twierdzeń, co też pozostawiamy Mu w charakterze ćwiczenia.

Zaczynamy od

Definicja 3. Niechaj $(\mathsf{P}_{\rm G}, B, {\rm G}, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}})$ będzie wiązką główną o trywializacjach lokalnych $\tau_i^{\mathsf{P}_{\rm G}} : \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times {\rm G}$, $i \in I$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, a (E, B, F, π_E) – wiązką włóknistą o trywializacjach lokalnych $\tau_i^E : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$ stowarzyszonych z tym samym pokryciem $\mathscr{O}$, na której jest określone gładkie działanie (lewostronne) $\Lambda_\cdot : {\rm G} \times E \longrightarrow E$ grupy Liego ${\rm G}$ wyznaczające rodzinę automorfizmów $\{(\Lambda_g, {\rm id}_B)\}_{g \in {\rm G}}$ tejże wiązki modelowanych lokalnie na automorfizmach $\{\lambda_g\}_{g \in {\rm G}}$ włókna typowego w sposób opisany przez diagram przemienny

(1)
$$\begin{tikzcd} {\rm G} \times \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[rr, "\Lambda_\cdot"] \arrow[d, "{\rm id}_{\rm G} \times \tau_i^E"'] & & \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i^E"] \\ {\rm G} \times \mathcal{O}_i \times F \arrow[rr, "({\rm pr}_2, \lambda_\cdot \circ {\rm pr}_{1,3})"'] & & \mathcal{O}_i \times F \end{tikzcd} .$$

Wiązka produktowa stowarzyszona z $\mathsf{P}_{\rm G}$ poprzez $\Lambda_\cdot$ to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E, B, F, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E}\big)$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $\mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E \equiv (\mathsf{P}_{\rm G} \times_B E)/{\rm G}$ będąca rozmaitością ilorazową określoną przez działanie
$$\widetilde{\Lambda}_\cdot : {\rm G} \times (\mathsf{P}_{\rm G} \times_B E) \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G} \times_B E : \big(g, (p, \epsilon)\big) \longmapsto \big(r_{g^{-1}}(p), \Lambda_g(\epsilon)\big),$$
indukowane na produkcie włóknistym wiązek $\mathsf{P}_{\rm G}$ i E przez $\Lambda_\cdot$ i działanie definiujące $r_\cdot$ grupy ${\rm G}$ na $\mathsf{P}_{\rm G}$;
- rzut na bazę
$$\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E} : \mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E \longrightarrow B : [(p, \epsilon)] \longmapsto \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p).$$

Przy tym trywializacje lokalne indukowane przez trywializacje składowych przyjmują postać

$$[\tau_i] : \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F : [(p, \epsilon)] \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p), \lambda_{{\rm pr}_2 \circ \tau_i^{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)}\big({\rm pr}_2 \circ \tau_i^E(m)\big)\big),$$

a odnośne odwzorowania przejścia są określone przez odwzorowanie

$$[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times F \circlearrowleft : (x, f) \longmapsto \big(x, \lambda_{g_{ij}^{\mathsf{P}_{\rm G}}(x)} \circ g_{ij}^E(x)(f)\big)\big).$$

Fizykalne zastosowania powyższej konstrukcji wynikają wprost z

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 3. Struktura grupy (Frécheta) na przestrzeni cięć globalnych $\Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})$ wiązki dołączonej ma swą realizację na przestrzeni cięć globalnych $\Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E)$ wiązki produktowej stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E$ indukowaną przez odwzorowanie gładkie

$$[\Lambda]_\cdot^\times : {\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G} \times_B \mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G}^\Lambda E$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty działania grupy ${\rm G}$ na rozmaitości M i modelowane lokalnie na $\Lambda_\cdot$.

Mamy także istotne w konstrukcji lokalnego opisu symetrii cechowania i pól materii w teorii z symetrią wycechowaną

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 3 i oznaczmy symbolem $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)$ zbiór morfizmów wiązek włóknistych $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow E$ pokrywających identyczność na (wspólnej) bazie B. Istnieje bijekcja

$$\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)\big(=: \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}}\big)\,,$$

określona przez wzajem odwrotne odwzorowania (zapisane w terminach $(\pi, \epsilon) \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma_{\mathrm{loc}}(E)$ składających się na globalne cięcie $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E$):

$$\Phi_{\Lambda}^{\times} \ :\ \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}}\,,$$

$$\Phi_{\Lambda}^{\times}[(\pi,\epsilon)] \ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow E \ :\ p \longmapsto \Lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\epsilon \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)$$

i

$$S_{\Lambda}^{\times} \ :\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}} \longrightarrow \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E)\,,$$

$$S_{\Lambda}^{\times}[\Phi] \ :\ B \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E \ :\ \big(\mathcal{O}_i \ni\big)x \longmapsto \big[\big(\tau_i^{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,-1}(x,e), \Phi \circ \tau_i^{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,-1}(x,e)\big)\big]\,.$$

oraz

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Stw. 1 i 2. Bijekcja $\Phi_{\Lambda}^{\times}$ jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$: działania

$$\begin{aligned} \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}^{\times}]]^{\Lambda}_{\cdot} \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E) \longrightarrow \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E) \\ &: \quad \big(\sigma, [(\pi,\epsilon)]\big) \longmapsto \big[\big([r]_{\sigma\circ\pi_P\circ\pi(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \epsilon(\cdot)\big)\big] \equiv \big[\big([r]_{\sigma(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \mu(\cdot)\big)\big] \end{aligned} \tag{2}$$

na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E)$ oraz naturalnego działania

$$\begin{aligned} [\Phi_{\mathrm{Ad}}^{\times}\Lambda] \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}} \\ &: \quad (\gamma, \Phi) \longmapsto \Lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi(\cdot)\big) \end{aligned}$$

na przestrzeni odwzorowań G-ekwiwariantnych $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$, czyli działanie

$$\Phi_{\mathrm{Ad}}^{\times}\Lambda_{\cdot} \equiv [\Phi_{\mathrm{Ad}}^{\times}\Lambda]_{\cdot} \circ \big(\Phi_{\mathrm{Ad}}^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}}}\big)$$

grupy $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G}\,|\,B)^{\mathrm{G}}$ czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E) \arrow[r, "\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}^{\times}]]^{\Lambda}_{\cdot}"] \arrow[d, "\Phi_{\mathrm{Ad}} \times \Phi_{\Lambda}^{\times}"'] & \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E) \arrow[d, "\Phi_{\Lambda}^{\times}"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G}\,|\,B)^{\mathrm{G}} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}} \arrow[r, bend right, "\Phi_{\mathrm{Ad}}^{\times}\Lambda_{\cdot}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, E\,|\,B)^{\mathrm{G}} \end{tikzcd}\,.$$

Mamy również oczywiste, lecz pomocne

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj $\mathcal{P}_{\mathrm{G}}^{\alpha} \equiv (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\alpha}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\alpha}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami głównymi o grupie strukturalnej G nad wspólną bazą B, a (E, B, F, π_E) – wiązką włóknistą z działaniem $\Lambda\ :\ \mathrm{G} \times E \longrightarrow E$ opisanym tamże. Dowolny (izo)morfizm wiązek głównych $(\Phi, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})\ :\ \mathcal{P}_{\mathrm{G}}^1 \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathrm{G}}^2$ indukuje kanonicznie (izo)morfizm wiązek włóknistych

$$\widetilde{\Phi} \ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{1\,\Lambda}E \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{2\,\Lambda}E \ :\ [(p,\varepsilon)] \longmapsto \big[\big(\Phi(p), \varepsilon\big)\big]\,,$$

ten zaś określa bijekcję między odnośnymi przestrzeniami cięć globalnych

$$\Gamma\widetilde{\Phi} \ :\ \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{1\,\Lambda}E) \longrightarrow \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{2\,\Lambda}E) \ :\ \phi \longmapsto \widetilde{\Phi} \circ \phi\,.$$

Uwaga 1. Mając na uwadze przyszłe zastosowania powyższego stwierdzenia, warto przyjrzeć się odwzorowaniu $\Gamma\widetilde{\Phi}$ w obrazie trywializacji lokalnych $\tau_i^\alpha \,:\, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G},\ \alpha \in \{1,2\}$ nad pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B współtrywializującym obie wiązki główne – w tym obrazie (izo)morfizm Φ jest reprezentowany przez rodzinę $\{h_i \,:\, \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}\}_{i\in I}$ odwzorowań lokalnie gładkich, które spełniają warunki z Równ. (6&7.2), patrz: Tw. 6&7.2. Rozważmy cięcie globalne $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{1\Lambda}E)$ o ograniczeniach

$$\phi\restriction_{\mathcal{O}_i} \,:\, \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{1\Lambda}E \,:\, x \longmapsto \big[\big(\tau_i^{1\,-1}(x,e),\varphi_i(x)\big)\big]$$

utworzonych przy użyciu cięć lokalnych $\varphi_i \in \Gamma(E\restriction_{\mathcal{O}_i})$ i spełniających w dowolnym punkcie $y \in \mathcal{O}_{ij}$ warunek zszycia

$$\begin{aligned}\big[\big(\tau_i^{1\,-1}(y,e),\varphi_i(y)\big)\big] &= \big[\big(\tau_j^{1\,-1}(y,e),\varphi_j(y)\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{1\,-1}(y,e) \triangleleft g_{ij}^1(y),\varphi_j(y)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{1\,-1}(y,e), g_{ij}^1(y) \triangleright \varphi_j(y)\big)\big]\,,\end{aligned}$$

czyli, innymi słowy,

$$\forall_{y\in\mathcal{O}_{ij}} \,:\, \varphi_i(y) = g_{ij}^1(y) \triangleright \varphi_j(y)\,.$$

Tym samym informacja o istnieniu cięcia globalnego $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{1\Lambda}E)$ jest zawarta w rodzinie cięć lokalnych $\{\varphi_i\}_{i\in I}$. Cięcie $\Gamma\widetilde{\Phi}[\phi]$ jest reprezentowane lokalnie przez rodzinę odwzorowań gładkich (wszak powstają ze złożenia odwzorowań jawnie gładkich z surjektywną submersją $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2\times_B E)/\mathrm{G}}$)

$$\Gamma\widetilde{\Phi}[\phi]_i \,:\, \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{2\Lambda}E \,:\, x \longmapsto \big[\big(\tau_i^{2\,-1}(x,e), h_i(x) \triangleright \varphi_i(x)\big)\big]\,.$$

Bez trudu upewniamy się, że tak określone cięcia lokalne wiązki $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{2\Lambda}E$ są w istocie ograniczeniami cięcia globalnego

$$\Gamma\widetilde{\Phi}[\phi] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{2\Lambda}E)\,, \qquad \Gamma\widetilde{\Phi}[\phi]\restriction_{\mathcal{O}_i} \equiv \Gamma\widetilde{\Phi}[\phi]_i\,.$$

W rzeczy samej, w punktach $y \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}\big[\big(\tau_j^{2\,-1}(y,e), h_j(y) \triangleright \varphi_j(y)\big)\big] &= \big[\big(\tau_i^{2\,-1} \circ \tau_{ij}^2(y,e), \big(h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)\big) \triangleright \varphi_i(y)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{2\,-1}(y,e) \triangleleft g_{ij}^2(y), \big(h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)\big) \triangleright \varphi_i(y)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{2\,-1}(y,e), \big(g_{ij}^2(y) \cdot h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)\big) \triangleright \varphi_i(y)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{2\,-1}(y,e), h_i(y) \triangleright \varphi_i(y)\big)\big]\,.\end{aligned}$$

Możemy już teraz wrócić do interesujących nas struktur fizykalnych. Bez trudu identyfikujemy naturalnych kandydatów do roli wiązki pól z symetrią wycechowaną i działającej na niej wiązki grup.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 2 oraz Stw. 1. Niechaj $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{Symm}(\mathscr{F} \nwarrow F)$ będzie podgrupą grupy symetrii globalnych teorii pola $\mathscr{F}$ o strukturze skończenie wymiarowej grupy Liego i niech $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \Sigma, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie dowolną wiązką główną o grupie strukturalnej G nad czasoprzestrzenią Σ. **Wiązka pól typu F z cechowaniem typu P_{G}** to wiązka

$$\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{ev}}\mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{ev}}\mathcal{F}}\big)$$

stowarzyszona z P_{G} poprzez odwzorowanie ewaluacji

$$\mathrm{ev.} \,:\, \mathrm{G} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \,:\, (\alpha,\varphi) \longmapsto \alpha(\varphi) \equiv \mathrm{ev}_\alpha(\varphi)\,,$$

a jej cięcia globalne to **pola typu F z cechowaniem typu** P_{G}. Grupę (Frécheta) $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \cong \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(\Sigma)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,\Sigma)$ określamy w tym kontekście mianem **grupy cechowania typu** P_{G}. Odwzorowania

$$\Gamma\big[\Gamma[\widetilde{r}^{\times}]\big]_\chi^\Lambda \,:\, \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{ev}}\mathcal{F}) \circlearrowleft\,, \qquad \chi \in \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$$

zdefiniowane w Stw. 3 (patrz: Równ. (2)) są przy tym nazywane **transformacjami cechowania**, a sama wiązka P_{G} zyskuje przydomek **wiązki cechowania**.

Transkrypcja wyjściowej teorii pola, skonstruowanej z niezmienników działania grupy symetrii globalnej $\mathrm{Symm}(\mathscr{F} \nwarrow F)$, w terminach cięć globalnych wiązek stowarzyszonych $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}\mathcal{F}$ z (dowolną) wiązką cechowania P_{G} podporządkowana postulatowi – w istocie swej dość nieprecyzyjnemu, wręcz heurystycznemu – *minimalności* zmian struktury funkcjonału działania w procedurze ulokalniania symetrii z grupy $\mathrm{G} \subset \mathrm{Symm}(\mathscr{F} \nwarrow F)$, wydaje się zadaniem wysoce nieoczywistym, a same cięcia – nader niewygodnymi obiektami ewentualnych manipulacji formalnych. W sukurs przychodzi nam tutaj odpowiedniość pomiędzy rzeczonymi cięciami a G-ekwiwariantnymi morfizmami odwzorowującymi wiązkę cechowania P_{G} w wyjściową wiązkę pól $\mathcal{F}$, opisana w Stw. 2, w połączeniu z elementarną własnością strukturalną wiązki cechowania, jaką jest jej trywialność lokalna, przy czym ta ostatnia jest – w świetle Stw. 6&7.3 – *równoważna* istnieniu cięć lokalnych. Te pozwalają na lokalną imitację struktury obecnej w wyjściowym modelu teoriopolowym na gruncie

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw. 2 i niechaj $\sigma_* \; : \; \mathcal{O} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ będzie dowolnym cięciem (lokalnym) wiązki głównej P_{G} nad zbiorem otwartym $\mathcal{O} \subset B$. **Prezentacja lokalna pola** (**typu** F **z cechowaniem typu** P_{G}) $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}\mathcal{F})$ **w cechowaniu** σ_* to cięcie lokalne

$$\phi_{\sigma_*} := \Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi] \circ \sigma_* \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}) .$$

Podobnie **prezentacja lokalna transformacji cechowania** $\gamma \in \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ **w cechowaniu** σ_* to odwzorowanie (lokalnie) gładkie

$$\gamma_{\sigma_*} := \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_* \; : \; \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{G} .$$

Wybór cięcia σ_* zyskuje w tym kontekście miano (**wyboru**) **cechowania lokalnego**.

Uwaga 2. To, że odwzorowanie $\phi_{\sigma_*} \; : \; \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}$ jest w istocie cięciem lokalnym wiązki pól $\mathcal{F}$ nad $\mathcal{O}$, wynika wprost z przemienności diagramu

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi]"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{F}}"] \\ \Sigma \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{\Sigma}"'] & \Sigma \end{tikzcd} ,$$

ten bowiem pozwala zapisać

$$\pi_{\mathcal{F}} \circ \phi_{\sigma_*} \equiv \big(\pi_{\mathcal{F}} \circ \Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi]\big) \circ \sigma_* = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \sigma_* = \mathrm{id}_{\mathcal{O}} .$$

Stwierdzenie 5. W zapisie Def. 5 oraz Stw. 3 i przy oznaczeniach

$${}^{\gamma}\phi := \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}^{\times}]]_{\gamma}^{\Lambda}(\phi) , \qquad {}^{\mathrm{Invo}\circ\gamma}\sigma_* := r_{\mathrm{Invo}\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\circ\sigma_*(\cdot)}\big(\sigma_*(\cdot)\big)$$

zachodzą tożsamości

$$\big({}^{\gamma}\phi\big)_{\sigma_*}(\cdot) = \Lambda_{\gamma_{\sigma_*}(\cdot)}\phi_{\sigma_*}(\cdot) = \phi_{{}^{\mathrm{Invo}\circ\gamma}\sigma_*}(\cdot) .$$

<u>*Dowód:*</u> W świetle Stw. 3 oraz G-ekwiwariantności $\Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi]$ otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} \big({}^{\gamma}\phi\big)_{\sigma_*}(\cdot) &\equiv \Phi_{\Lambda}^{\times}\big[{}^{\gamma}\phi\big] \circ \sigma_*(\cdot) = \Phi_{\mathrm{Ad}}^{\times}\Lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi]\big) \circ \sigma_*(\cdot) \\ &\equiv \Lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\circ\sigma_*(\cdot)}\big(\Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi] \circ \sigma_*(\cdot)\big) \equiv \Lambda_{\gamma_{\sigma_*}(\cdot)}\phi_{\sigma_*}(\cdot) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\circ\sigma_*(\cdot)}\big(\Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi] \circ \sigma_*\big)(\cdot) &= \Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi] \circ \big(r_{\mathrm{Invo}\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\circ\sigma_*(\cdot)}\big(\sigma_*(\cdot)\big)\big) \\ &\equiv \Phi_{\Lambda}^{\times}[\phi] \circ {}^{\mathrm{Invo}\circ\gamma}\sigma_*(\cdot) \equiv \phi_{{}^{\mathrm{Invo}\circ\gamma}\sigma_*}(\cdot) . \end{aligned}$$

$\square$

Uwaga 3. Powyższe stwierdzenie dowodnie pokazuje sens nazwy nadanej wyborowi cięcia referencyjnego σ_* – oto zmiana tego wyboru,

$$\sigma_* \longmapsto {}^{\mathrm{Inv}\circ\gamma}\sigma_* \,,$$

prowadzi do przecechowania (czyli transformacji cechowania) pola fizycznego,

$$\phi \longmapsto {}^{\gamma}\phi \,.$$

Dotychczasowa dyskusja nie rozstrzyga naturalnych (a powiązanych ze sobą) kwestii: Które z (nieizomorficznych) wiązek cechowania *wybrać* do wycechowania danej symetrii globalnej w teorii pola? Co dokładnie kwantyfikuje ewentualna swoboda wyboru wiązki cechowania? Wrócimy do tych pytań przy jakiejś przyszłej okazji, która z pewnością nastanie…