GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II
WYKŁADY 4. I 5.
WIĄZKI WEKTOROWE

1. Wiązki z dodatkową strukturą (we włóknie) – studium kanoniczne

Rozważania fizykalne doprowadziły nas ostatnio do nader pojemnego pojęcia wiązki włóknistej, którą zasadnie jest postrzegać jako naturalne uogólnienie konstrukcji produktu kartezjańskiego rozmaitości, przez co rozumiemy, że ten dostarcza jej (wiązki) modelu lokalnego w tym samym znaczeniu, w jakim podzbiór otwarty przestrzeni topologicznej $\mathbb{R}^n$ z naturalną strukturą gładką dostarcza modelu lokalnego rozmaitości. W konkretnych sytuacjach teoretycznych pojawia sią zazwyczaj potrzeba geometryzacji przy użyciu wiązki właśnie dodatkowych struktur algebraicznych lub teoriogrupowych, a to celem umodelowania gładkiej dystrybucji takowych struktur nad zadaną rozmaitością (np. gładkiej dystrybucji iloczynów skalarnych na przestrzeniach stycznych do punktów rozmaitości lub gładkiej dystrybucji spinorów nad czasoprzestrzenią). Naszą tak właśnie umotywowaną peregrynację po rozległym uniwersum wiązek zaczynamy od konstrukcji kanonicznej stowarzyszonej z *każdą* rozmaitością różniczkowalną i stanowiącej fundamentalną składową opisu pól tensorowych na rozmaitościach, jaką jest konstrukcja opisana w poniższej

Definicja 1. Wiązka styczna nad rozmaitością gładką $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$ o atlasie $\widehat{\mathscr{A}}$ złożonym z map lokalnych $\kappa_i \ : \ \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $i \in I$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ rozmaitości M,

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i = M \,,$$

to wiązka włóknista o składowych:

- baza M, o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ zadawanej przez atlas $\widehat{\mathscr{A}}$;
- przestrzeń totalna będąca sumą rozłączną

$$\mathsf{T}M := \bigsqcup_{x \in M} \mathsf{P}_x$$

zbiorów klas abstrakcji

$$\mathsf{P}_x = \{ \ \gamma \ : \ ]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M \quad | \quad \varepsilon > 0 \ \wedge \ \gamma(0) = x \ \} / \sim_x$$

ścieżek (lokalnych) klasy C^1 przez $x \in M$ względem relacji równoważności (współstyczności)

$$\gamma_1 \sim_x \gamma_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \gamma_2(0) = x = \gamma_1(0) \\ D(\kappa \circ \gamma_2)(0) = D(\kappa \circ \gamma_1)(0) \end{cases}$$

(zapisanej w *dowolnej* mapie lokalnej $\kappa \ : \ \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_x$ punktu x) o strukturze rozmaitości opisanej poniżej;
- włókno typowe $\mathbb{R}^{\times n}$ o naturalnej strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞;
- rzut na bazę

$$\pi_{\mathsf{T}M} \ : \ \mathsf{T}M \longrightarrow M \ : \ ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto x \,.$$

Przy tym odwzorowania

$$\mathsf{T}\kappa_i \ : \ \mathsf{T}\mathcal{O}_i := \pi_{\mathsf{T}M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \ : \ [\gamma]_{\sim_x} \longmapsto \big(\kappa_i(x), \mathsf{D}(\kappa_i \circ \gamma)(0)\big)$$

indukują na $\mathsf{T}M$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \subset \mathbb{R}^{\times 2n}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset \mathsf{T}M$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i\in I}\ :\ \mathsf{T}\kappa_i(\mathcal{V}\cap\mathsf{T}\mathcal{O}_i)\in\mathscr{T}\big(\mathcal{U}_i\times\mathbb{R}^{\times n}\big)\,.$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{T}\kappa_i$ są jawnie homeomorficzne, stanowią przeto mapy lokalne, zwane **mapami naturalnymi**, dla których odwzorowania przejścia to

$$\begin{aligned}\mathsf{T}t_{ij}:=\mathsf{T}\kappa_i\circ\big(\mathsf{T}\kappa_j\big)^{-1}\quad &:\quad \kappa_j(\mathcal{O}_{ij})\times\mathbb{R}^{\times n}\xrightarrow{\cong}\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})\times\mathbb{R}^{\times n}\\ &:\quad \big(\kappa_j(x),\mathsf{D}(\kappa_j\circ\gamma)(0)\big)\longmapsto\big(\kappa_i(x),\mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)\big)\\ &\qquad\equiv\big(t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big),\mathsf{D}(t_{ij}\circ\kappa_j\circ\gamma)(0)\big)\\ &\qquad=\big(t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big),\mathsf{D}t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big)\big(\mathsf{D}(\kappa_j\circ\gamma)(0)\big)\big)\,.\end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy C^∞ w składowej bazowej (z założenia),

$$t_{ij}\in\mathrm{Diff}^\infty\big(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}),\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})\big)\,,$$

i klasy C^∞ w składowej z włókna w argumencie bazowym,

$$\mathsf{D}t_{ij}\in C^\infty\big(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}),\mathbb{R}^{\times n^2}\big)\,,$$

a nadto liniowa, więc klasy C^∞ w argumencie z włókna $\mathsf{D}(\kappa_j\circ\gamma)(0)$, czyli ostatecznie klasy C^∞, i jako taka zadaje na $\mathsf{T}M$ strukturę gładkiej rozmaitości różniczkowalnej. Zarazem odwzorowania $\mathsf{T}\kappa_i$ pełnią też rolę lokalnych trywializacji, tautologicznie C^∞-gładkich względem zdefiniowanej tu (przy ich użyciu) struktury różniczkowej. Wreszcie też rzut na bazę jest surjekcją klasy C^∞ jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{\mathsf{T}M}\restriction_{\mathsf{T}\mathcal{O}_i}=\kappa_i^{-1}\circ\mathrm{pr}_1\circ\mathsf{T}\kappa_i\,.$$

Na włóknie P_x tak określonej wiązki stycznej znajdujemy naturalną ***strukturę liniową***. Istotnie, oznaczywszy $v_\gamma:=\mathsf{D}(\kappa\circ\gamma)(0)\in\mathbb{R}^{\times n}$ dla skrótu, na zbiorze P_x klas abstrakcji ścieżek względem relacji współstyczności określamy strukturę grupy przemiennej z działaniem

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}_x\times\mathsf{P}_x\longrightarrow\mathsf{P}_x\\ :\quad &\big([\gamma_1]_{\sim_x},[\gamma_2]_{\sim_x}\big)\longmapsto\big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t\mapsto\kappa^{-1}\big(\kappa(x)+t\triangleright(v_{\gamma_1}+v_{\gamma_2})\big)\in\mathcal{O}_x\big]_{\sim_x}\\ &\qquad=:[\gamma_1]_{\sim_x}+[\gamma_2]_{\sim_x}\end{aligned}$$

i elementem neutralnym danym w postaci klasy $[\gamma_x]_{\sim_x}$ ścieżki stałej

$$x\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow M\ :\ t\longmapsto x\,,$$

a następnie działanie ciała $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}\times\mathsf{P}_x\longrightarrow\mathsf{P}_x\ :\ \big(\lambda,[\gamma]_{\sim_x}\big)\longmapsto\big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t\mapsto\kappa^{-1}\big(\kappa(x)+t\cdot\lambda\triangleright v_\gamma\big)\in\mathcal{O}_x\big]_{\sim_x}\,,$$

przy czym w obu przypadkach $\varepsilon>0$ jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wynikiem działania leżała w całości w $\mathcal{O}_x$.

Zadanie domowe 1. Sprawdź niezależność definicji relacji współstyczności oraz struktury liniowej na P_x od użytych w nich map lokalnych κ, ustalonych dowolnie.

Zadanie domowe 2. Biorąc za punkt wyjścia sumę rozłączną

$$\bigsqcup_{i\in I}\mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n}$$

i wykorzystując odwzorowania przejścia pomiędzy dziedzinami map lokalnych na M (a ściślej – odwzorowania styczne do nich), a podpierając się przy tym intuicjami wyrobionymi przy dowodzie Twierdzenia o rekonstrukcji wiązki włóknistej z poprzedniego wsadu notatek wykładowych, skonstruuj alternatywny model wiązki stycznej nad M i wskaż naturalny izomorfizm z modelem z powyższej definicji. Następnie zidentyfikuj kanoniczną strukturę $\mathbb{R}$-liniową w tym nowym modelu i zdefiniuj izomorfizm (włókno po włóknie) pomiędzy tą strukturą a strukturą opisaną pod definicją.

2. Wiązki wektorowe

Strukturę wiązki przestrzeni liniowych zaobserwowaną w poprzednim rozdziale formalizujemy w

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasową notację, ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞. **Wiązka wektorowa rzędu** n **nad ciałem** $\mathbb{K}$ klasy C^∞ to wiązka włóknista $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ o własnościach

- włókno $\mathbb{V}_x \equiv \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\{x\})$ nad dowolnym punktem $x \in B$ jest przestrzenią $\mathbb{K}$-liniową;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^∞ (lokalnych trywializacji)

$$\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \restriction_{\mathbb{V}_x} \;:\; \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times n}, \quad x \in B$$

  są izomorfizmami przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę $\mathbb{K}$-liniową na włóknach $\mathbb{V}$ są klasy C^∞, w szczególności więc mamy dyfeomorfizm

$$\mathbb{A} \;:\; \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \tag{1}$$

modelowany na definiującej operacji binarnej $A^n \;:\; \mathbb{K}^{\times n} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ (dodawanie „po współrzędnych") w rozumieniu diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{A}"] \arrow[d, "\tau_i \times \tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \big(\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}\big) \times_{\mathcal{O}_i} \big(\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}\big) \arrow[r, "(\mathrm{pr}_1, A^n \circ \mathrm{pr}_{2,4})"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{tikzcd} \tag{2}$$

oraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$\mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathrm{Diff}^k(\mathbb{V}) \;:\; \lambda \longmapsto \mathbb{L}_\lambda \tag{3}$$

o $\mathbb{K}$-liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^n \;:\; \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ (mnożenie w $\mathbb{K}$ „po współrzędnych") w rozumieniu diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{L}_\lambda"] \arrow[d, "\tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \arrow[r, "\ell^n_\lambda"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{tikzcd}\;. \tag{4}$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{rk}\,\mathbb{V}$. Ilekroć $\mathrm{rk}\,\mathbb{V} = 1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r] & L \arrow[d, "\pi_L"] \\ & B \end{tikzcd}\;.$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^∞)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}} \,:\, B \longrightarrow \mathbb{V} \,:\, x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \mathbf{0}^n)\,, \quad x \in \mathcal{O}_i\,,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej $\mathbb{V}$. Jest ono cięciem globalnym $\mathbb{V}$. Zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\rm loc}(\mathbb{V})$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(\mathbb{V})$ niosą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(B, \mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa rzędu m wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ to podwiązka $(\mathbb{W}, B, \mathbb{K}^{\times m}, \pi_{\mathbb{V}}\restriction_{\mathbb{W}})$, $m < n$ tejże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jej włókno $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{V}_x$ jest podprzestrzenią $\mathbb{K}$-liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem $\mathbb{K}$) $(\mathbb{V}_A, B_A, \mathbb{K}^{\times n_A}, \pi_{\mathbb{V}_A})$, $n_A \in \mathbb{N}$, $A \in \{1, 2\}$ to morfizm wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) \,:\, (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})\,,$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x \in B_1$,

$$\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}} \,:\, \mathbb{V}_{1\,x} \longrightarrow \mathbb{V}_{2\,f(x)}\,, \tag{5}$$

jest odwzorowaniem $\mathbb{K}$-liniowym. **Rząd morfizmu wiązek wektorowych** (Φ, f) to odwzorowanie

$$\mathrm{rk}\,(\Phi, f) \,:\, B_1 \longrightarrow \mathbb{N} \,:\, x \longmapsto \mathrm{rk}\big(\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\big)\,.$$

Mamy istotne

Twierdzenie 1. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między nigdzie nieznikającymi cięciami lokalnymi klasy C^∞ wiązki liniowej klasy C^∞ i jej trywializacjami lokalnymi (tejże klasy). W szczególności wiązka liniowa jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma nigdzie nieznikające cięcie globalne.

<u>Dowód</u>: Każde nigdzie nieznikające cięcie $\sigma \,:\, \mathcal{O} \longrightarrow L \setminus \{\mathbf{0}_L(B)\}$ wiązki liniowej L nad zbiorem $\mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ jest gładko indeksowaną przez bazę $\mathcal{O}$ wiązki rodziną baz $\sigma(x)$, $x \in \mathcal{O}$ poszczególnych jednowymiarowych włókien L_x, zatem dowolnemu wektorowi $v \in \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ z włókna $L_{\pi_L(v)}$ możemy przypisać w jednoznaczny sposób skalar $\lambda(v) \in \mathbb{K}$ o własności

$$v = \mathbb{L}_{\lambda(v)}\big(\sigma \circ \pi_L(v)\big)\,,$$

przy czym zależność tegoż skalara od wektora v jest gładka (wszak własność tę ma superpozycja odwzorowań gładkich $\sigma \circ \pi_L$) i

$$\lambda(v) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v = 0_{L_{\pi_L(v)}}$$

wobec niezerowości σ. To pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma \,:\, \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K} \,:\, v \longmapsto \big(\pi_L(v), \lambda(v)\big)\,,$$

jawnie $\mathbb{K}$-liniowe i gładkie (klasy C^∞). Bez trudu wskazujemy jego odwrotność:

$$\tau_\sigma^{-1} \,:\, \mathcal{O} \times \mathbb{K} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \,:\, (x, \lambda) \longmapsto \mathbb{L}_\lambda\big(\sigma(x)\big)\,,$$

o tych samych cechach strukturalnych.

Cięcie lokalne przyporządkowane dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau \,:\, \pi_{\mathsf{PG}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}$ to

$$\sigma_\tau \,:\, \mathcal{O} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \,:\, x \longmapsto \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}})\,.$$

O jego niezerowości przekonuje prosty argument: jeśli dopuścimy równość

$$0_{L_x} = \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}})$$

nad pewnym punktem $x \in \mathcal{O}$, to wówczas wobec założonej przez nas $\mathbb{K}$-liniowości τ dochodzimy do sprzeczności

$$(x, 0_{\mathbb{K}}) \equiv \tau(0_{L_x}) = \tau \circ \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = (x, 1_{\mathbb{K}})\,.$$

Wypisane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}$ wyznaczamy

$$\sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = \mathbb{L}_{1_{\mathbb{K}}}\big(\sigma(x)\big) = \sigma(x)\,,$$

zatem

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma\,.$$

Ponadto jeśli dla dowolnego wektora $v \in L_{\pi_L(v)} \subset \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ zdefiniować (w sposób jednoznaczny) skalar $\lambda(v)$ równaniem

$$v =: \mathbb{L}_{\lambda(v)}\big(\sigma_\tau \circ \pi_L(v)\big) \equiv \mathbb{L}_{\lambda(v)} \circ \tau^{-1}\big(\pi_L(v), 1_{\mathbb{K}}\big) = \tau^{-1}\big(\pi_L(v), \lambda(v)\big)\,,$$

to wyznaczamy

$$\lambda(v) = \mathrm{pr}_2 \circ \tau(v)\,,$$

a stąd także

$$\tau_{\sigma_\tau}(v) = \big(\pi_L(v), \mathrm{pr}_2 \circ \tau(v)\big) \equiv \tau(v)\,,$$

czyli

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau\,.$$

□

Zadanie domowe 3. Udowodnij następujące uogólnienie powyższego twierdzenia na przypadek $\mathrm{rk}\,\mathbb{V} > 1$.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy oznaczenia Def. 2. Wiązka wektorowa rzędu $n \in \mathbb{N}^\times$ nad bazą B jest globalnie trywialna, tj. izomorficzna z wiązką $(B \times \mathbb{K}^{\times n}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \mathrm{pr}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n jej cięć globalnych σ^k, $k \in \overline{1,n}$, które nad każdym punktem $x \in B$ bazy definiują n wektorów liniowo niezależnych $\sigma^k(x)$, $k \in \overline{1,n}$.

Podobnie jak same wiązki wektorowe, morfizmy tych wiązek pokrywające dyfeomorfizm identycznościowy na bazie mają prosty opis lokalny, z którego nieraz przyjdzie nam korzystać.

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 2. Dowolny morfizm (Φ, id_B) wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_A, B, \mathbb{K}^{\times n_A}, \pi_{\mathbb{V}_A})$, $A \in \{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^A : \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_A}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^A : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n_A; \mathbb{K})$, opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_1}"'] & \mathbb{V}_2 \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_2}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}\,,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2, \mathbb{K})\,, \quad i \in I$$

o własności

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)\,. \tag{6}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) bazę $\{e_a\}_{a\in\overline{1,n_1}}$ w przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n_1}$ i na tej podstawie zdefiniujmy cięcia lokalne

$$\varepsilon_a^{(i)} \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_1 \;:\; x \longmapsto \tau_i^{1\,-1}(x, e_a)\,. \tag{7}$$

Zauważmy, że odwzorowanie Φ jest w pełni określone przez wartości przyjmowane przezeń na powyższych cięciach, oto bowiem wobec założonej $\mathbb{K}$-liniowości τ_i oraz Φ w dowolnym punkcie

$$v \equiv \tau_i^{-1}\big(x, v^a \triangleright_n e_a\big) \equiv \mathbb{L}^{(1)}_{v^a}\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,, \qquad x \in \mathcal{O}_i$$

otrzymujemy

$$\Phi(v) = \Phi\big(\mathbb{L}^{(1)}_{v^a}\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\big) = \mathbb{L}^{(2)}_{v^a} \circ \Phi\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,.$$

Wybierzmy zatem (dowolnie) bazę $\{f_r\}_{r\in\overline{1,n_2}}$ w $\mathbb{K}^{\times n_2}$, o bazie dualnej $\{f_r^*\}_{r\in\overline{1,n_2}}$, i oznaczmy odnośne cięcia lokalne $\mathbb{V}_2$ jako

$$\phi_r^{(i)} \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_2 \;:\; x \longmapsto \tau_i^{2\,-1}(x, f_r)\,,$$

po czym zdefiniujmy

$$h_{i\,ar} := f_r^* \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}(\cdot, e_a) \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})\,,$$

czyli poprzez formułę

$$\mathbb{L}^2_{h_{i\,ar}(x)}\big(\phi_r^{(i)}(x)\big) := \Phi\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,. \tag{8}$$

Powyższe dane lokalne morfizmu Φ możemy zapisać w postaci macierzy

$$h_i(x) := h_{i\,ar}(x) \triangleright (e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r)\,, \quad x \in \mathcal{O}_i\,,$$

podobnie reprezentujemy też odwzorowania przejścia:

$$g^1_{ij}(x) = g^1_{ij\,ab}(x) \triangleright (e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b)\,, \qquad g^2_{ij}(x) = g^2_{ij\,rs}(x) \triangleright (f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s)\,.$$

Przywołując definicję tych ostatnich, ustalamy relację

$$\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)(e_a)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, g^2_{ij}(x) \cdot h_j(x)(e_a)\big)\,,$$

a jednocześnie, wobec $\mathbb{K}$-liniowości τ_i^α oraz Φ, znajdujemy

$$\begin{aligned}
\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)(e_a)\big) &= \Phi\big(\tau_j^{1\,-1}(x, e_a)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}\big(x, g^1_{ij}(x)(e_a)\big)\big) \\
&= \mathbb{L}^2_{g^1_{ij\,ab}(x)} \circ \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x, e_b)\big) = \mathbb{L}^2_{g^1_{ij\,ab}(x)} \circ \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(e_b)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x) \cdot g^1_{ij}(x)(e_a)\big)\,.
\end{aligned}$$

Niechaj teraz $(\mathbb{V}_A, B, \mathbb{K}^{\times n_A}, \pi_{\mathbb{V}_A})$, $A \in \{1,2\}$ będą wiązkami wektorowymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^A \;:\; \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ i odwzorowaniach przejścia $g^A_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n_A; \mathbb{K})$. Niech też $h_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$, $i \in I$ będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego stwierdzenia, przy użyciu której określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i \;:\; \pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) \;:\; \tau_i^{1\,-1}(x, v) \longmapsto \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(v)\big)\,,$$

które w świetle tożsamości, spełnionej dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $v \in \mathbb{K}^{\times n_1}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_j\big(\tau_i^{1\,-1}(x, v)\big) &= \Phi_j\big(\tau_j^{1\,-1}\big(x, g^1_{ji}(x)(v)\big)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x) \cdot g^1_{ji}(x)(v)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, g^2_{ij}(x) \cdot h_j(x) \cdot g^1_{ji}(x)(v)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(v)\big) \\
&= \Phi_i\big(\tau_i^{1\,-1}(x, v)\big)\,,
\end{aligned}$$

jawią się ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi \;:\; \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2\,, \qquad \Phi\restriction_{\pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i\,.$$

Odwzorowanie to jest w oczywisty sposób $\mathbb{K}$-liniowe i zachowuje włókna. □

Proste zastosowanie powyższego wyniku stanowi

Twierdzenie 4. Przyjmijmy notację Tw. 3. Ilekroć ograniczenie Φ do włókna $\mathbb{V}_{1\,x}$ nad dowolnym punktem $x \in B$ jest $\mathbb{R}$-liniowym izomorfizmem $\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}} : \mathbb{V}_{1\,x} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_{2\,x}$, wówczas Φ jest izomorfizmem wiązek wektorowych.

Dowód: Niechaj $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ będzie otwartym pokryciem bazy, którego elementy są nośnikami lokalnych trywializacji $\tau_i^A : \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times r}$, $i \in I$, o odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^A : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(r;\mathbb{R})$. W obrazie tych trywializacji morfizm (Φ, id_B) przyjmuje postać macierzową

$$\tau_i^{2\,-1} \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1} : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times r} \circlearrowleft : (x, v_1) \longmapsto \big(x, h_i(x)(v_1)\big),$$

w której odwzorowania $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{R}(r)$ są (lokalnie) gładkie i przyjmują wartości w podprzestrzeni $\mathrm{GL}(r;\mathbb{R})$ (w konsekwencji założenia o izomorficznej naturze ograniczeń do włókna) spełniające tożsamości

$$g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x), \qquad x \in \mathcal{O}_{ij}.$$

Zdefiniujmy odwzorowania lokalnie gładkie[1]

$$\Psi_i : \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{2\,-1}(x, v_2) \longmapsto \big(x, h_i(x)^{-1}(v_2)\big).$$

Otrzymujemy, dla dowolnego $(x, v_2) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R}^{\times r}$,

$$\begin{aligned}
\Psi_j\big(\tau_i^{2\,-1}(x, v_2)\big) &= \Psi_j\big(\tau_j^{2\,-1}\big(x, g_{ji}^2(x)(v_2)\big)\big) \equiv \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)^{-1} \cdot g_{ji}^2(x)(v_2)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, g_{ij}^1(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot g_{ji}^2(x)(v_2)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)^{-1} \cdot g_{ij}^2 \cdot g_{ji}^2(x)(v_2)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)^{-1} \cdot g_{ii}^2(x)(v_2)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)^{-1}(v_2)\big) \equiv \Psi_i\big(\tau_i^{2\,-1}(x, v_2)\big),
\end{aligned}$$

gdzie przy przejściu do trzeciego wiersza oraz w pierwszej jego równości użyliśmy warunku 1-kocycklu spełnianego przez odwzorowania przejścia $\mathbb{V}_2$. Stwierdzamy przeto, że odwzorowania Ψ_i są ograniczeniami globalnie gładkiego morfizmu

$$\Psi : \mathbb{V}_2 \longrightarrow \mathbb{V}_1, \qquad \Psi\restriction_{\pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i)} \equiv \Psi_i,$$

o pożądanej własności

$$\Psi = \Phi^{-1}.$$

□

Twierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})$ będzie morfizmem wiązek wektorowych $\mathbb{V}_A$, $A \in \{1, 2\}$ stałego rzędu $\mathrm{rk}\,(\Phi, f) \equiv r \in \mathbb{N}$. Wówczas **jądro morfizmu** (Φ, f)

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) := \bigsqcup_{x\in B_1} \ker\big(\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\big)$$

niesie kanoniczną strukturę podwiązki wektorowej jego dziedziny $\mathbb{V}_1$, przy czym

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) = n_1 - r.$$

Dowód: Na mocy algebraicznego bilansu wymiarów zachodzi

$$(\pi_{\mathbb{V}_1}\restriction_{\mathrm{Ker}\,(\Phi,f)})^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 - r},$$

wystarczy zatem skonstruować gładkie trywializacje lokalne tak otrzymanej wiązki (wzajem izomorficznych) przestrzeni wektorowych. Zważywszy lokalny charakter zagadnienia, ograniczymy się

[1] Odwracanie macierzy jest operacją algebraiczną, zatem jawnie gładką.

do (dostatecznie małych) otoczeń otwartych: $\mathcal{O}_1$ (ustalonego dowolnie) punktu $x_1 \in B_1$ oraz $\mathcal{O}_2 \supset f(\mathcal{O}_1)$ punktu $f(x_1)$, na których określone są dyfeomorfizmy (klasy C^∞)

$$\tau_{\mathcal{O}_A} \;:\; \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_A \times \mathbb{K}^{\times n_A}\,, \quad A \in \{1,2\}\,.$$

W obrazie tychże morfizm (Φ, f) przybiera postać

$$\Phi_{21} \equiv \tau_{\mathcal{O}_2} \circ \Phi \circ \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1} \;:\; \mathcal{O}_1 \times \mathbb{K}^{\times n_1} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \times \mathbb{K}^{\times n_2} \;:\; (x, v) \longmapsto \big(f(x), L_\Phi(x)(v)\big)$$

dla pewnego gładkiego odwzorowania

$$L_\Phi \;:\; \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_2 \times n_1; \mathbb{K}) \;:\; x \longmapsto L_\Phi(x)$$

o własności

$$\mathrm{Ker}\,\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}} \cong \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x)\,,$$

więc też o rzędzie

$$\mathrm{rk}\,L_\Phi(x) = r\,.$$

Dokonajmy rozkładu

$$\mathbb{K}^{\times n_1} = \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1\,, \qquad\qquad \mathbb{K}^{\times n_2} = \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2\,,$$

określonego dla pewnych przestrzeni dopełniających $\Delta_A \subset \mathbb{K}^{\times n_A}$ o wymiarach

$$\dim_{\mathbb{K}} \Delta_1 = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1) = n_2 - \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2\,.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\Delta_1 \cong \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1)$$

możemy następnie skonstruować indeksowaną przez $\mathcal{O}_1 \ni x$ rodzinę odwzorowań $\mathbb{K}$-liniowych

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_\Phi(x) \quad &: \quad \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2 \equiv \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \\ &: \quad (k, \delta_1, \delta_2) \longmapsto (k, 0_{\mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1)}, \delta_2) +_\oplus \big(0, L_\Phi(x)\big)(k, \delta_1)\,,\end{aligned}$$

o jawnie odwracalnym elemencie

$$\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)} \oplus L_\Phi(x_1)\restriction_{\Delta_1} \oplus \mathrm{id}_{\Delta_2}\,.$$

Jako że odwzorowania odwracalne tworzą podzbiór otwarty w $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2,\ \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2})$ (a mianowicie: dopełnienie przeciwobrazu zbioru domkniętego $\{0_{\mathbb{K}}\}$ względem odwzorowania $\det_{(n_1+\dim_{\mathbb{K}} \Delta_2)}$ będącego superpozycją odwzorowań ciągłych, więc też ciągłego), przeto $\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1)$ należy do tego podzbioru wraz z pewnym swoim otoczeniem otwartym $\mathcal{U}$, którego przeciwobraz względem (ciągłego) odwzorowania $\widetilde{\Lambda}_\Phi$ jest otoczeniem otwartym $\mathcal{V}_1 \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi^{-1}(\mathcal{U}) \ni x_1$ o własności $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{O}_1$. Oto więc obok C^∞-gładkiego odwzorowania

$$\Lambda_\Phi \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi\restriction_{\mathcal{V}_1} \;:\; \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}\big)\,,$$

mamy też C^∞-gładkie odwzorowanie

$$V_\Phi \equiv \mathrm{Inv} \circ \Lambda_\Phi \;:\;:\; \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2\big)\,,$$

(punktowo) odwrotne do Λ_Φ w każdym $x \in \mathcal{V}_1$. Rozważmy dowolny wektor

$$(k, \delta_1) \in \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \equiv \mathbb{K}^{\times n_1}\,.$$

Ustaliwszy $x \in \mathcal{V}_1$, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}(k, \delta_1) \in \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \Lambda_\Phi(x)(k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = (k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) \\ &\Longleftrightarrow \qquad (k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = V_\Phi(x)(k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2})\,.\end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę włożenia kanoniczne:

$$\jmath_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)} \;:\; \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \rightarrowtail \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}$$

oraz

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \ : \ \mathbb{K}^{\times n_1} \rightarrowtail \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2 \,,$$

możemy zatem zapisać

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x)\big) \subseteq V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

ale też

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{K}} \jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x)\big) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x) = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\, L_\Phi(x) \\ = \ & n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\, L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)} \\ \equiv \ & \dim_{\mathbb{K}} V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)}\big)\,, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z odwracalności $V_\Phi(x)$. Widzimy więc, że

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x)\big) = V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\, \jmath_{\mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

i na tej podstawie konstatujemy, że dla dowolnie ustalonego izomorfizmu

$$\iota_{x_1} \ : \ \mathrm{Ker}\, L_\Phi(x_1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times n_1 - r}$$

odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1}^{-1} \quad : \quad & \mathcal{V}_1 \times \mathbb{K}^{\times n_1 - r} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\Phi, f)\restriction_{\mathcal{V}_1} \\ : \quad & (x, k) \longmapsto \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1}\big(x, \mathrm{pr}_{1,2} \circ V_\Phi(x)\big(\iota_{x_1}^{-1}(k), 0_{\mathrm{Image}\, L_\Phi(x_1)}, 0_{\Delta_2}\big)\big) \end{aligned}$$

jest (C^∞-)gładką odwrotnością trywializacji lokalnej (także (C^∞-)gładkiej)

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1} \quad : \quad & \mathrm{Ker}\,(\Phi, f)\restriction_{\mathcal{V}_1} \longrightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathbb{K}^{\times n_1 - r} \\ : \quad & \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1}(x, v) \longmapsto \big(x, \iota_{x_1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \Lambda_\Phi(x)(v, 0_{\Delta_2})\big)\,. \end{aligned}$$

□

Corollarium 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, w tym ten ze Stw. 5, i niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą klasy C^∞. Jądro epimorfizmu wiązek wektorowych

$$(\mathsf{T}\pi_E, \pi_E) \ : \ \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}B$$

jest podwiązką wektorową klasy C^∞

$$\big(\mathsf{V}E \equiv \mathrm{Ker}\,(\mathsf{T}\pi_E, \pi_E), E, \mathbb{K}^{\times \dim F}, \pi\big)$$

wiązki stycznej $\mathsf{T}E$. Określamy ją mianem (**pod**)**wiązki pionowej** (lub **wertykalnej**) nad E. Jej włókno $\mathsf{V}_pE \equiv (\mathsf{V}E)_p$ nad $p \in E$, zwane (**pod**)**przestrzenią pionową** (lub **wertykalną**), rozpinają **wektory pionowe** (lub **wertykalne**).

Zadanie domowe 4. Udowodnij corollarium.

3. Geometryzacje konstrukcji liniowych

Definicja wiązki wektorowej nad rozmaitością dostarcza schematu geometryzacji czysto algebraicznej struktury przestrzeni wektorowej. W ślad za nią możemy – na gruncie Tw. 1-2-3.4 – dokonać geometryzacji rozmaitych naturalnych operacji na przestrzeniach wektorowych. Poniżej przedstawiamy kilka z nich, niektóre z nich napotkamy w dalszej części kursu.

3.1. **Suma prosta wiązek wektorowych.**

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 2. **Suma prosta (Whitneya) wiązek wektorowych** $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ nad $\mathbb{K}$, o wspólnej bazie B to wiązka wektorowa

$$\big(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2 \equiv \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \equiv \mathbb{K}^{\times n_1+n_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ \mathrm{pr}_1 \restriction_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2}\big),$$

w której $\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2$ jest produktem włóknistym rozmaitości $\mathbb{V}_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ opisywanym przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1 \restriction_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2 \restriction_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2}"] & \\
\mathbb{V}_1 \arrow[dr, "\pi_{\mathbb{V}_1}"'] & & \mathbb{V}_2 \arrow[dl, "\pi_{\mathbb{V}_2}"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

i wyposażonym w strukturę podrozmaitości gładko włożonej w rozmaitość produktową $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$, zgodnie z tezą Tw. 4. z Niezbędnika Rozmaitości.

Włókno sumy Whitneya nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ przyjmuje postać

$$\big(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2\big)_x \equiv \mathbb{V}_{1\,x} \oplus \mathbb{V}_{2\,x}\,,$$

stanowi więc suma Whitneya naturalną adaptację konstrukcji sumy prostej przestrzeni wektorowych do geometrycznej kategorii przestrzeni modelowanych lokalnie na produktach (elementów topologii) rozmaitości różniczkowalnej z topologicznymi przestrzeniami wektorowymi $\mathbb{K}^{\times n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wiązkę tę można również opisać – w duchu Tw. 1-2-3.4 – w terminach danych lokalnych jej składników, tj. wspólnego pokrycia trywializującego $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ wiązek $\mathbb{V}_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ (otrzymanego np. poprzez wspólne rozdrobnienie odnośnych pokryć trywializujących) wraz z określonymi dlań odwzorowaniami przejścia $g^\alpha_{ij} \,:\, \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$, $(i,j) \in \big\langle I^{\times 2}\big\rangle_{\mathscr{O}}$. Odwzorowania przejścia sumy Whitneya obu wiązek, stowarzyszone z tym samym pokryciem trywializującym i stanowiące podstawę rekonstrukcji (klasy równoważności) wiązki $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2$, to

$$g^{1\oplus 2}_{ij} := g^1_{ij} \oplus g^2_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \oplus \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1+n_2)\,.$$

Z sumą Whitneya wiązek wektorowych stowarzyszona jest para epimorfizmów wiązek wektorowych

$$\mathrm{pr}_{\alpha\,\cdot} \;:\; \mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{V}_\alpha\,, \quad \alpha \in \{1,2\}$$

przyjmujących nad (dowolnym) punktem $x \in B$ postać

$$\mathrm{pr}_{\alpha\,x} \;:\; \mathbb{V}_{1\,x} \oplus \mathbb{V}_{2\,x} \twoheadrightarrow \mathbb{V}_{\alpha\,x} \;:\; (v_1, v_2) \longmapsto v_\alpha\,.$$

Odnosząc Tw. 4 do konstrukcji Whitneya otrzymujemy

Corollarium 2. Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $r \in \mathbb{N}^\times$, i niech $(\mathbb{W}_A, B, \mathbb{R}^{\times r_A}, \pi_{\mathbb{W}_A})$, $A \in \{1,2\}$ będą wiązkami wektorowymi odnośnych rzędów $r_A \in \mathbb{N}^\times$ spełniających tożsamość $r_1 + r_2 = r$, zanurzonymi w tej pierwszej poprzez $\jmath_{\mathbb{W}_A} \,:\, \mathbb{W}_A \hookrightarrow \mathbb{V}$. Ilekroć w dowolnym punkcie $x \in B$ spełniona jest tożsamość

$$\mathbb{V}_x = \jmath_{\mathbb{W}_1}\big(\mathbb{W}_{1\,x}\big) \oplus_{\mathbb{R}} \jmath_{\mathbb{W}_2}\big(\mathbb{W}_{2\,x}\big)\,,$$

istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{W}_1 \oplus_{B,\mathbb{R}} \mathbb{W}_2\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Zdefiniujmy

$$\alpha \;:\; \mathbb{W}_1 \oplus_{B,\mathbb{R}} \mathbb{W}_2 \longrightarrow \mathbb{V} \;:\; (w_1, w_2) \longmapsto \mathbb{A}\big(\jmath_{\mathbb{W}_1}(w_1), \jmath_{\mathbb{W}_2}(w_2)\big)\,,$$

korzystając z gładkiego odwzorowania $\mathbb{A} \,:\, \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ stanowiącego element struktury wiązki wektorowej na $\mathbb{V}$. W świetle poczynionych założeń ograniczenie wypisanego odwzorowania do dowolnego włókna jest izomorfizmem, a zatem określa pożądany izomorfizm wiązek wektorowych wprost na mocy Tw. 4. □

3.2. Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 2. **Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych** $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ nad $\mathbb{K}$, o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$\big(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times n_2} \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ \mathrm{pr}_1\big)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 1-2-3.4, z danych lokalnych

$$g^{1\otimes 2}_{ij} := g^1_{ij} \otimes g^2_{ij} \ : \ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \otimes \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1 \cdot n_2)\,.$$

Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych można w szczególności utworzyć wychodząc od sumy rozłącznej włókien nad punktami bazy $B \ni x$ w postaci

$$\big(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2\big)_x \equiv \mathbb{V}_{1\,x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_{2\,x}$$

i dokonując stosownej 'minimalnej' topologizacji tego zbioru, przy której (naturalne) lokalne trywializacje tautologicznie stają się homeomorfizmami, a następnie indukując strukturę gładą na sumie rozłącznej wzdłuż tychże (pre-)trywializacji z rozmaitości modelowej (iloczynu podzbioru otwartego bazy i włókna typowego) – por.: Tw. 5 oraz Rozdz. 3.6. Mamy tu zatem do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji iloczynu tensorowego przestrzeni wektorowych.

3.3. Wiązka homomorfizmów i wiązka dualna.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 2. **Wiązka homomorfizmów** (zwana także **wiązką** Hom) wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ nad $\mathbb{K}$, o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K},B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2), B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}\big) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2)}\big)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 1-2-3.4, z danych lokalnych

$$\begin{aligned} g^{1\to 2}_{ij} &:= \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_2}, g^2_{ij}(\cdot)\big) \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(g^1_{ij}(\cdot)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2}\big) \\ &\ : \ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}\big)\big)\,, \end{aligned}$$

zapisanych w terminach odwzorowań $\mathbb{K}$-liniowych, które w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ przyjmują postać – odpowiednio –

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(g^1_{ij}(x)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2}\big) \quad &: \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}\big) \circlearrowleft \\ &: \quad \chi \longmapsto \chi \circ g^1_{ij}(x)^{-1}\,, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_2}, g^2_{ij}(x)\big) \quad &: \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}\big) \circlearrowleft \\ &: \quad \chi \longmapsto g^2_{ij}(x) \circ \chi\,. \end{aligned}$$

Jak w poprzednim przypadku, włókno wiązki homomorfizmów nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ można wybrać w postaci

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)_x \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_{1\,x}, \mathbb{V}_{2\,x})\,,$$

a następnie dokonać stosownej 'minimalnej' topologizacji włokien tych sumy rozłącznej nad bazą – por.: Tw. 5 oraz Rozdz. 3.6. Mamy przeto do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej homomorfizmów między (ustalonymi) przestrzeniami wektorowymi.

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 5. **Wiązka dualna** (zwana także **wiązką dwoistą**) wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ to wiązka wektorowa (o oczywistym rzucie na bazę)

$$\big(\mathbb{V}^* \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K},B}(\mathbb{V}, B\times\mathbb{K}), B, \mathbb{K}^{\times n\,*} \cong \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}^*}\big)\,,$$

w której definicji $(B\times\mathbb{K}, B, \mathbb{K}, \mathrm{pr}_1)$ jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad $\mathbb{K}$.

Także tutaj możemy 'minimalnie' topologizować zbiór

$$\bigsqcup_{x\in B} \mathbb{V}_x^*\,.$$

3.4. **Kompleksyfikacja rzeczywistej wiązki wektorowej.**

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Def. 2, zakładając przy tym, że $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$. **Kompleksyfikacja wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$ to wiązka wektorowa (o oczywistym rzucie na bazę)

$$\big(\mathbb{V}^{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{R},B} (B\times\mathbb{C}), B, \mathbb{C}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}^{\mathbb{C}}}\big)\,,$$

w której definicji $(B\times\mathbb{C}, B, \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}, \mathrm{pr}_1)$ jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad $\mathbb{C}$, z naturalną strukturą trywialnej wiązki wektorowej rzędu 2 nad $\mathbb{R}$ (indukowanej przez kanoniczne włożenie $\jmath_{\mathbb{R}} \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;:\; r \longmapsto (r, 0)$). Działanie ciała bazowego $\mathbb{C}$ na $\mathbb{V}^{\mathbb{C}}$ jest przy tym dziedziczone z naturalnego działania

$$\mathrm{id}_B \times \ell_\zeta \;:\; B\times\mathbb{C} \circlearrowleft \;:\; (x, z) \longmapsto (x, \zeta\cdot z)$$

tegoż ciała na czynniku trywialnym $B\times\mathbb{C}$ wedle schematu

$$\mathbb{L}_\zeta \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{V}} \otimes (\mathrm{id}_B \times \ell_\zeta)\,, \qquad \zeta\in\mathbb{C}\,.$$

3.5. **Wiązka wyznacznikowa.**

Definicja 8. Przyjmijmy zapis Def. 2. **Wiązka wyznacznikowa wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad $\mathbb{K}$) o bazie B i odwzorowaniach przejścia $g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n)$ stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$\big(\det\mathbb{V}, B, \mathbb{K}, \pi_{\det\mathbb{V}}\big)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 1-2-3.4, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{\det} := \det{}_{(n)} \circ g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{K}\,.$$

Wiązkę wyznacznikową otrzymujemy chociażby w procedurze 'minimalnej' topologizacji sumy rozłącznej nad bazą $B \ni x$ włókien postaci

$$(\det\mathbb{V})_x \equiv \bigwedge{}^n\, \mathbb{V}_x^*\,,$$

w zgodzie z interpretacją tejże wiązki jako geometryzacji konstrucji wyznacznika na przestrzeni wektorowej – por: Tw. 5 oraz Rozdz. 3.6.

3.6. **Wiązka ilorazowa.** Dotychczas (poza dowodem Tw. 5) wskazywaliśmy jedynie algorytm 'minimalnej' topologizacji sumy rozłącznej podstruktur liniowych wzgl. struktur pochodnych nad bazą wiązki wektorowej jako alternatywny schemat geometryzacji obiektów znanych z kategorii algebraicznej. Obecnie użyjemy go do zbudowania wiązki wektorowej o istotnym znaczeniu (m.in.) w studiach różniczkowo-topologicznych zanurzeń $\iota_S \;:\; S \hookrightarrow M$, w których interesują nas właściwości semi-lokalne rozmaitości zanurzenia M, tj., jej własności w pewnym otwartym otoczeniu podrozmaitości zanurzonej S (globalne z punktu widzenia rozmaitości S, lecz lokalne z punktu widzenia rozmaitości zanurzenia M). Zanurzenie ι_S wyróżnia podwiązkę

$$\mathsf{T}\iota_S(S) \subset \mathsf{T}M\restriction_S$$

styczną do podrozmaitości zanurzonej w wiązce wektorowej powstałej przez ograniczenie wiązki stycznej $\mathsf{T}M$ nad M do tejże podrozmaitości, albo równoważnie (nad S)

$$\mathsf{T}S \subset \iota_S^*\mathsf{T}M\,.$$

Od tej pory będziemy utożsamiać S z jej wiernym obrazem $\iota_S(S)$ w M, co pozwoli odciążyć zapis:

$$\mathsf{T}\iota_S(S) \equiv \mathsf{T}S\,, \qquad \mathsf{T}M\restriction_S \equiv \iota_S^*\mathsf{T}M\,, \qquad \mathsf{T}S \subset \mathsf{T}M\restriction_S$$

bez utraty jego czytelności. W powyższych okolicznościach naturalnym staje się pytanie o istnienie whitneyowskiego dopełnienia prostego podwiązki $\mathsf{T}S$ w wiązce $\mathsf{T}M\restriction_S$, czyli takiej podwiązki wektorowej $\Delta \subset \mathsf{T}M\restriction_S$, która spełnia tożsamość $\mathsf{T}M\restriction_S \cong \mathsf{T}S \oplus_{S,\mathbb{R}} \Delta$. Wiązki dopełniającej można następnie użyć do semi-lokalnej (we wskazanym wcześniej rozumieniu) linearyzacji M w pewnym otoczeniu $\mathcal{T} \supset S$, tj., do konstrukcji dyfeomorfizmu odwzorowującego $\mathcal{T}$ na otoczenie cięcia zerowego $\mathbf{0}_\Delta(S) \cong S$ w przestrzeni totalnej Δ w taki sposób, że S przechodzi na $\mathbf{0}_\Delta(S)$ – o jego istnieniu mówi fundamentalne Twierdzenie o Otoczeniu Tubularnym, którego nader przejrzysty dowód (wykorzystujący ogólną teorię sprejów różniczkowych) można znaleźć w monografii [BJ73] Bröckera i Jänicha.

Pierwszy krok w demarkowanej powyżej dyskusji wykonujemy w

Twierdzenie 6. Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times R}, \pi_\mathbb{V})$ będzie wiązką wektorową rzędu $R \in \mathbb{N}^\times$ i niech $(\mathbb{W}, B, \mathbb{R}^{\times r}, \pi_\mathbb{W})$ będzie jej podwiązką wektorową rzędu $r \le R$, zanurzoną przez odwzorowanie $\jmath_\mathbb{W} : \mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{V}$. Zbiór

$$\mathbb{V}/\mathbb{W} := \bigsqcup_{x \in B} \mathbb{V}_x/\jmath_\mathbb{W}(\mathbb{W}_x) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{V}/\mathbb{W}}} B \ : \ (v, x) \longmapsto x$$

niesie kanoniczną strukturę wiązki wektorowej rzędu $R - r$ nad bazą B, którą określamy mianem **wiązki ilorazowej dla** $(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Istnieje kanoniczny epimorfizm wiązek wektorowych

$$\pi_{(\mathbb{V},\mathbb{W})} \ : \ \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W}\,.$$

Dowód: Każde włókno surjekcji $\pi_{\mathbb{V}/\mathbb{W}}$ jest przestrzenią wektorową wymiaru $R - r$, nasze zadanie sprowadza się zatem, jak zazwyczaj w kategorii wiązek wektorowych, do wyposażenia zbioru $\mathbb{V}/\mathbb{W}$ w ('minimalną') topologię, w której stosownie zdefiniowane trywializacje lokalne zostaną tautologicznie podniesione do rangi homeomorfizmów, a następnie pozwolą wyindukować (tautologicznie homeomorficzne) mapy lokalne na przestrzeni totalnej $\mathbb{V}/\mathbb{W}$. Zaczniemy od wyboru takiego pokrycia otwartego $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B, nad którym obie wiązki: $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$ dopuszczają odnośne trywializacje lokalne: $\tau_i^\mathbb{V} \ : \ \pi_\mathbb{V}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times R}$ i $\tau_i^\mathbb{W} \ : \ \pi_\mathbb{W}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times r}$. Te pozwalają nam stowarzyszyć z odwzorowaniem $\jmath_\mathbb{W}$ jego lokalnie gładkie dane $h_i \in [\mathcal{O}_i, \mathbb{R}^{\times r\,*} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{R}^{\times R}]$, $i \in I$, zdefiniowane formułą

$$\tau_i^\mathbb{V} \circ \jmath_\mathbb{W} \circ \tau_i^{\mathbb{W}\,-1} \ : \ \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times r} \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times R} \ : \ (x, w) \longmapsto \big(x, h_i(x)(w)\big)\,.$$

Wybierzmy (dowolnie) punkt $x_*^i \in \mathcal{O}_i$, ustalmy izomorfizmy (niekanoniczne)

$$\iota_{x_*^i} \ : \ \mathbb{R}^{\times R} \xrightarrow{\cong} \mathrm{im}\, h_i(x_*^i) \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i)\,, \qquad\qquad \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i) \equiv \mathbb{R}^{\times R}/\mathrm{im}\, h_i(x_*^i)$$

i

$$\upsilon_{x_*^i} \ : \ \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{\times R - r}\,,$$

a następnie rozważmy odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\iota_{x_*^i} \circ h_i(x_*^i) \ : \ \begin{tikzcd} \mathbb{R}^{\times r} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{im}\, h_i(x_*^i) \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i) \\ & \mathrm{im}\, h_i(x_*^i) \arrow[ur, "\jmath_{\mathrm{im}\, h_i(x_*^i)}"'] & \end{tikzcd}\,,$$

w którego zapisie $\jmath_{\mathrm{im}\, h_i(x_*^i)}$ jest injekcją kanoniczną. Dokonajmy rozszerzenia włókna typowego $\mathbb{R}^{\times r}$ podwiązki o kojądro (w x_*^i) i zdefiniujmy, dla dowolnego $x \in \mathcal{O}_i$, odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\widetilde{h}_i(x) \ : \ \mathbb{R}^{\times r} \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i) \longrightarrow \mathrm{im}\, h_i(x_*^i) \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i) \ : \ (w, \delta) \longmapsto (0, \delta) + \iota_{x_*^i} \circ h_i(x)(w)\,,$$

zależące w sposób (jawnie) gładki od $x \in \mathcal{O}_i$. Jego odwrazalność w x_*^i,

$$\widetilde{h}_i(x_*^i) = \mathrm{pr}_1 \circ \iota_{x_*^i} \circ h_i(x_*^i) \oplus_\mathbb{R} \mathrm{id}_{\mathrm{coker}\, h_i(x_*^i)}\,,$$

w połączeniu z otwartością zbioru odwzorowań odwracalnych w $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^{\times r} \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i), \mathrm{im}\, h_i(x_*^i) \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i)) \cong \mathbb{R}(R)$, przesądza o istnieniu otwartego otoczenia $\mathcal{U}_{x_*^i}$ punktu x_*^i o własności

$$\widetilde{h}_i\big(\mathcal{U}_{x_*^i}\big) \subset \mathrm{Iso}_\mathbb{R}\big(\mathbb{R}^{\times r} \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i), \mathrm{im}\, h_i(x_*^i) \oplus_\mathbb{R} \mathrm{coker}\, h_i(x_*^i)\big)\,.$$

Powyższe nadaje sens definicji

$$\left(\pi_{\mathbb{V}}, \xi_i\right) \equiv \left(\pi_{\mathbb{V}}, \upsilon_{x^i_*} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \left(\pi_{\mathbb{V}}^* \widetilde{h}_i\right)^{-1} \circ \iota_{x^i_*} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i^{\mathbb{V}} \restriction_{\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{U}_{x^i_*})}\right) \ : \ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}\left(\mathcal{U}_{x^i_*}\right) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{x^i_*} \times \mathbb{R}^{\times R-r},$$

przy czym

$$\ker \xi_i \restriction_{\mathbb{V}_x} = \ker\left(\mathrm{pr}_2 \circ \left(\pi_{\mathbb{V}}^* \widetilde{h}_i\right)^{-1} \circ \iota_{x^i_*} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i^{\mathbb{V}} \restriction_{\mathbb{V}_x}\right) = \left\{ \ \tau_i^{\mathbb{V}\,-1}(x, v) \quad | \quad v \in \mathbb{R}^{\times R} \quad \wedge \quad \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{h}_i(x)^{-1} \circ \iota_{x^i_*}(v) = 0 \ \right\}.$$

Zarazem jednak istnienie izomorfizmów $\iota_{x^i_*}$ i $\widetilde{h}_i(x)$ (for $x \in \mathcal{U}_{x^i_*}$) pozwala nam zapisać

$$v = \iota_{x^i_*}^{-1} \circ \widetilde{h}_i(x)(w, \delta)$$

dla pewnych $(w, \delta) \in \mathbb{R}^{\times r} \oplus_{\mathbb{R}} \operatorname{coker} h_i(x^i_*)$, skąd wywodzimy równość

$$\mathrm{pr}_2 \circ \left(\pi_{\mathbb{V}}^* \widetilde{h}_i\right)^{-1} \circ \iota_{x^i_*}(v) = \delta,$$

więc też

$$v = \iota_{x^i_*}^{-1} \circ \widetilde{h}_i(x)(w, 0) = h_i(x)(w),$$

czyli

$$\ker \xi_i \restriction_{\mathbb{V}_x} = \left\{ \ \tau_i^{\mathbb{V}\,-1}\big(x, h_i(x)(w)\big) \quad | \quad w \in \mathbb{R}^{\times r} \ \right\} \equiv \jmath_{\mathbb{W}}(\mathbb{W}_x).$$

Ostatecznie zatem otrzymujemy bijekcję

$$\tau_{x^i_*}^{\mathbb{V}/\mathbb{W}} \ : \ \pi_{\mathbb{V}/\mathbb{W}}^{-1}\big(\mathcal{U}_{x^i_*}\big) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{x^i_*} \times \mathbb{R}^{\times R-r} \ : \ \big(V + \jmath_{\mathbb{W}}(\mathbb{W}_x), x\big) \longmapsto \big(x, \xi_i(V)\big).$$

Pokryjmy następnie B otoczeniami jak to powyżej, tworzącymi rodzinę $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$. Jest oczywistym, że każde z otoczeń jest nośnikiem (stosownie ograniczonych) trywializacji wiązek $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$ spośród – odpowiednio – $\tau_i^{\mathbb{V}}$ i $\tau_i^{\mathbb{V}}$, które odtąd będziemy oznaczać jako $\tau_\alpha^{\mathbb{V}}$ i $\tau_\alpha^{\mathbb{W}}$ dla przejrzystości notacji. Są również dane izomorfizmy ι_α i υ_α zdefiniowane analogicznie do – odpowiednio – $\iota_{x^i_*}$ i $\upsilon_{x^i_*}$, i te, wspólnie, wyznaczają rodzinę odwzorowań $\xi_\alpha \ : \ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^{\times R-r}$, $\alpha \in \mathscr{A}$ oraz odnośne bijekcje

$$\tau_\alpha^{\mathbb{V}/\mathbb{W}} \ : \ \pi_{\mathbb{V}/\mathbb{W}}^{-1}\big(\mathcal{U}_\alpha\big) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{\times R-r} \ : \ \big(V + \jmath_{\mathbb{W}}(\mathbb{W}_x), x\big) \longmapsto \big(x, \xi_\alpha(V)\big).$$

Te ostatnie pozwalają zaindukować na $\mathbb{V}/\mathbb{W}$ silną topologię cofnięciową

$$\mathscr{T}(\mathbb{V}/\mathbb{W}) = \left\{ \ \mathcal{V} \subset \mathbb{V}/\mathbb{W} \quad | \quad \forall_{\alpha \in \mathscr{A}} \ : \ \tau_\alpha^{\mathbb{V}/\mathbb{W}}\big(\mathcal{V} \cap \pi_{\mathbb{V}/\mathbb{W}}^{-1}\big(\mathcal{U}_\alpha\big)\big) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{\times R-r}\big) \ \right\}.$$

Możemy następnie cofnąć wzdłuż nich strukturę różniczkowalną z lokalnych modeli. Odwzorowania $\tau_\alpha^{\mathbb{V}/\mathbb{W}}$ (jak też $\pi_{\mathbb{V}/\mathbb{W}}$) stają się teraz tautologicznie gładkie i mają takież odwrotności, co pozwala zidentyfikować je jako trywializacje lokalne zrekonstruowanej tym sposobem wiązki wektorowej $\mathbb{V}/\mathbb{W}$.

Na koniec definiujemy jeszcze odwzorowanie

$$\pi_{(\mathbb{V},\mathbb{W})} \ : \ \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W} \ : \ V \longmapsto \big(V + \jmath_{\mathbb{W}}(\mathbb{W}_{\pi_{\mathbb{V}}(V)}), \pi_{\mathbb{V}}(V)\big),$$

o jawnie gładkiej prezentacji (semi-)lokalnej

$$\tau_\alpha^{\mathbb{V}/\mathbb{W}} \circ \pi_{(\mathbb{V},\mathbb{W})}(V) = \big(\pi_{\mathbb{V}}(V), \xi_\alpha(V)\big).$$

Stwierdzamy bez trudu, że odwzorowanie to jest gładkie względem opisanej powyżej struktury różniczkowej. □

Naturalnego modelu struktury wprowadzonej w treści ostatniego twierdzenia dostarcza

Twierdzenie 7. Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times R}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $R \in \mathbb{N}^\times$ wyposażoną w strukturę metryczną $\mathrm{g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{B,\mathbb{R}}^{(\mathrm{sym})} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $\operatorname{sign}(\mathrm{g}) = (R, 0)$, i niech $(\mathbb{W}, B, \mathbb{R}^{\times r}, \pi_{\mathbb{W}})$ będzie jej podwiązką wektorową rzędu $r \le R$, zanurzoną w $\mathbb{V}$ poprzez $\jmath_{\mathbb{W}} \ : \ \mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{V}$. Zbiór

$$\mathbb{W}^{\perp_{\mathrm{g}}} := \bigsqcup_{x \in B} \mathbb{W}_x^{\perp_{\mathrm{g}(x)}} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{W}^{\perp_{\mathrm{g}}}}} B \ : \ (x, v) \longmapsto x,$$

w którego zapisie

$$\mathbb{W}_x^{\perp \mathrm{g}(x)} \equiv \{ \ v \in \mathbb{V}_x \quad | \quad \forall_{w \in \mathbb{X}_x} \ : \ \mathrm{g}(x)(v,w) = 0 \ \} ,$$

jest nośnikiem kanonicznej struktury wiązki wektorowej rzędu $R-r$ nad bazą B, którą określamy mianem **dopełnienia ortogonalnego** $\mathbb{W}$ **(w** $\mathbb{V}$). Istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \oplus_{B,\mathbb{R}} \mathbb{W}^{\perp \mathrm{g}} . \tag{9}$$

Dowód: Mamy kanoniczny izomorfizm

$$\mathbb{V}_x \cong \mathbb{W}_x \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{W}_x^{\perp \mathrm{g}(x)}$$

nad każdym punktem $x \in B$, istnienie izomorfizmu (9) wiązek wektorowych jest zatem prostą konsekwencją Cor. 2, o ile tylko $\mathbb{W}^{\perp \mathrm{g}}$ jest podwiązką wektorową $\mathbb{V}$, czego dowodzimy poniżej.

Niechaj $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ będzie otwartym pokryciem B niosącym odnośne lokalne trywializacje $\tau_i^{\mathbb{V}} \ : \ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times R}$ i $\tau_i^{\mathbb{W}} \ : \ \pi_{\mathbb{W}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times r}$, a zatem także – w świetle Tw. 2 – odnośne rodziny $\{v_{a\,i} \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}\}_{a\in\overline{1,R}}$ i $\{\varpi_{s\,i} \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{W}\}_{s\in\overline{1,r}}$ liniowo niezależnych nigdzie nieznikających cięć gładkich. Rzecz jasna, możemy przyjąć, że te ostatnie są wzajem ortogonalne, jako że procedura Grama–Schmidta, będąc algebraiczną, więc w szczególności gładką, nie wpływa na stopień gładkości cięć. Ustalmy punkt $x_* \in \mathcal{O}_i$ i rozważmy macierz

$$\big(P_{as\,i}(x_*) \equiv \mathrm{g}(x)\big(v_{a\,i}(x_*), \varpi_{s\,i}(x_*)\big)\big)_{(a,s)\in\overline{1,R}\times\overline{1,r}} \in \mathrm{Mat}(R\times r;\mathbb{R}) .$$

Współdefiniujące ją formy $\phi_{s\,i} \equiv \mathrm{g}(x_*)\big(\cdot, \varpi_{s\,i}(x_*)\big) \ : \ \mathbb{V}_{x_*} \longrightarrow \mathbb{R}$ są liniowo niezależne, więc powyższa macierz jest maksymalnego rzędu r. Możemy przeto założyć, bez utraty ogólności rozważań, że liniowa niezależność cechuje jej pierwszych r rzędów, a wtedy

$$\det{}_{(r)}\big(\big(P_{\underline{a}s\,i}(x_*)\big)_{\underline{a},s\in\overline{1,r}}\big) \neq 0 .$$

Odwzorowanie

$$D_i \equiv \det{}_{(r)}\big(\big(P_{\underline{a}s\,i}(\cdot)\big)_{\underline{a},s\in\overline{1,r}}\big) \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

jest w oczywisty sposób ciągłe, zatem jego odwracalność w x_* implikuje istnienie otoczenia $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{O}_i$ (tegoż punktu) o własności

$$\forall_{x\in\mathcal{U}_i} \ : \ D_i(x) \neq 0 .$$

W następnej kolejności zastępujemy wyjściowe pokrycie otwarte $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ nowym: $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ w analogii do dowodu Tw. 6 i przekonujemy się o tym, że cięcia $\widetilde{\mathscr{B}} \equiv \{\varpi_{1\,\alpha}, \varpi_{2\,\alpha}, \ldots, \varpi_{r\,\alpha}, v_{r+1\,\alpha}, v_{r+2\,\alpha}, \ldots, v_{R\,\alpha}\}$ are są liniowo niezależne. W rzeczy samej, przyjmijmy, przeciwnie, że pewna ich kombinacja liniowa zeruje się tożsamościowo nad $\mathcal{O}_i$. Zważywszy, że podzbiór $\{\varpi_{s\,\alpha}\}_{s\in\overline{1,r}}$ jest liniowo niezależny, wnioskujemy, że pewna $\mathbb{R}$-liniowa kombinacja cięć $\varpi_{s\,\alpha}$ jest zarazem $\mathbb{R}$-liniową kombinacją cięć $v_{r+k\,\alpha}$, $k \in \overline{1,R-r}$, a zatem, w szczególności, jest ortogonalna do (powłoki) $v_{l\,\alpha}$, $l \in \overline{1,r}$. To jednak oznacza, że formy $\phi_{s\,\alpha}$ *nie* są liniowo niezależne w obcięciu do (powłoki) cięć $v_{r+k\,\alpha}$, co dalej prowadzi do sprzeczności z naszym pierwotnym założeniem. Cięcia $\widetilde{\mathscr{B}}$ ą więc liniowo niezależne i możemy je poddać procedurze ortogonalizacji Grama–Schmidta, poczynając „od lewa", dzięki czemu pierwszych r cięć pozostaje w otrzymanym tym sposobem ortonormalnym zbiorze cięć. Procedura daje nam nową bazę ortogonalną $\mathscr{B} \equiv \{\varpi_{1\,\alpha}, \varpi_{2\,\alpha}, \ldots, \varpi_{r\,\alpha}, \varpi_{r+1\,\alpha}, \varpi_{r+2\,\alpha}, \ldots, \varpi_{R\,\alpha}\}$, a ta pozwala zdefiniować odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe

$$\begin{aligned} \tau_\alpha^{\mathbb{W}^{\perp \mathrm{g}}} \quad &: \quad \pi_{\mathbb{W}^{\perp \mathrm{g}}}^{-1}\big(\mathcal{U}_\alpha\big) \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{\times R-r} \\ &: \quad w \longmapsto \Big(\pi_{\mathbb{V}}(w), \big(\mathrm{g}(\pi_{\mathbb{V}}(w))\big(w, \varpi_{r+1}\circ\pi_{\mathbb{V}}(w)\big), \mathrm{g}(\pi_{\mathbb{V}}(w))\big(w, \varpi_{r+2}\circ\pi_{\mathbb{V}}(w)\big), \ldots, \mathrm{g}\big(\pi_{\mathbb{V}}(w)\big)\big(w, \varpi_{r+2}\circ\pi_{\mathbb{V}}(w)\big)\big)\Big) \end{aligned}$$

o jawnych odwrotnościach

$$\tau_\alpha^{\mathbb{W}^{\perp \mathrm{g}}} \quad : \quad \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{\times R-r} \longrightarrow \pi_{\mathbb{W}^{\perp \mathrm{g}}}^{-1}\big(\mathcal{U}_\alpha\big) \ : \ \big(x, (x^1, x^2, \ldots, x^{R-r})\big) \longmapsto \sum_{k=1}^{R-r} x^k \triangleright \varpi_{r+k\,\alpha}(x) .$$

Bijekcje $\tau_\alpha^{\mathbb{W}^{\perp_{\rm g}}}$ mogą ostatecznie zostać wykorzystane do zaindukowania silnej topologii cofnięciowej oraz lokalnych map na $\mathbb{W}^{\perp_{\rm g}}$ podobnie jak w dowodzie Tw. 6. Kiedy już cel ten zostanie osiągnięty, zyskują one status (tautologicznie) gładkich trywializacji lokalnych, co domyka konstrukcję struktury wiązki wektorowej na $\mathbb{W}^{\perp_{\rm g}}$. □

Zwieńczeniem naszych rozważań jest

Twierdzenie 8. Przyjmijmy założenia i zapis Tw. 6 i 7. Istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych

$$\mathbb{W}^{\perp_{\rm g}} \cong \mathbb{V}/\mathbb{W}\,. \tag{10}$$

Dowód: W świetle Tw. 7 Istnieje kanoniczny monomorfizm wiązek wektorowych

$$\jmath_{\mathbb{W}^{\perp_{\rm g}}}\ :\ \mathbb{W}^{\perp_{\rm g}} \longrightarrow \mathbb{V}\,.$$

Post-komponując go z kanonicznym (epi)morfizmem $\pi_{(\mathbb{V},\mathbb{W})}$ z Tw. 6, otrzymujemy Istnieje morfizm wiązek wektorowych

$$\pi_{(\mathbb{V},\mathbb{W})}\circ\jmath_{\mathbb{W}^{\perp_{\rm g}}}\ :\ \mathbb{W}^{\perp_{\rm g}} \longrightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W}\,.$$

Jest jasne, że ograniczenie tego ostatniego do dowolnego włókna jest izomorfizmem odnośnych włókien, przeto dowodzona teza wynika wprost z Tw. 4. □

Na koniec dostajemy

Corollarium 3. Przyjmijmy zapis Tw. 6. Istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \oplus_{B,\mathbb{R}} \mathbb{V}/\mathbb{W}\,. \tag{11}$$

Dowód: Wykorzystując rozkład jedności na $\mathbb{V}$ podporządkowany danej rodzinie $\{\tau_i\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times R}\}_{i\in I}$ lokalnych trywializacji stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B, możemy zaindukować na $\mathbb{V}$ strukturę metryczną ${\rm g} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{B,\mathbb{R}}^{({\rm sym})} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze ${\rm sign}\,({\rm g}) = (R,0)$ wzdłuż τ_i ze standardowej struktury euklidesowej na włóknie typowym $\mathbb{R}^{\times R}$. Struktura indukowanapozwala zdefiniować dopełnienie ortogonalne $\mathbb{W}^{\perp_{\rm g}} \subset \mathbb{V}$ zgodnie z tezą Tw. 7, a wraz z nią otrzymujemy izomorfizm (9). Ten w połączeniu z kanonicznym izomorfizmem (10) z tezy Tw. 8 daje nam pożądany kanoniczny izomorfizm (11). □

4. Geometryzacja konstrukcji bazy przestrzeni wektorowej – krok w nieznane. . .

Jedną z naturalnych konstrukcji na przestrzeni wektorowej jest wybór bazy $\{e_i\}_{i\in\overline{1,D}}$, $D = \dim_{\mathbb{K}} V$, tj. wybór izomorfizmu

$$V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times D}\ :\ v = v^i\,e_i \longmapsto (v^1, v^2, \ldots, v^D)\,.$$

Konstrukcja ta ma swój nader istotny odpowiednik w teorii wiązek wektorowych, który teraz omówimy.

Definicja 9. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $n \in \mathbb{N}^\times$, o trywializacjach lokalnych $\tau_i\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B. **Wiązka reperów** (zwana też **wiązką baz**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$ to wiązka włóknista

$$\big({\sf F}_{\rm GL}\mathbb{V}, B, {\rm GL}(n;\mathbb{K}), \pi_{{\sf F}_{\rm GL}\mathbb{V}}\big)$$

o składowych

- przestrzeń totalna

$$\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} := \bigsqcup_{x\in B} \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big)$$

  o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ indukowanej przez trywializacje $\{\tau_i\}_{i\in I}$ i o włóknie $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V})_x \equiv \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ nad dowolnym punktem $x \in B$ będącym zbiorem baz $\beta_x : \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ włókna $\mathbb{V}_x$;
- włókno typowe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \equiv \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$;
- rzut na bazę $\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} : \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \longrightarrow B : (\beta_x, x) \longmapsto x$.

Przy tym bijekcje $\mathsf{F}\tau_i$ odwrotne do

$$\mathsf{F}\tau_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i) : (x,\chi) \longmapsto \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big), x\big)$$

indukują na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ (gdzie topologia na $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ to topologia podprzestrzeni topologicznej przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^{\times n^2}$), tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{U} \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i\in I} : \mathsf{F}\tau_i\big(\mathcal{U} \cap \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i)\big) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\big).$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i$ są homeomorficznymi trywializacjami lokalnymi o odwzorowaniach przejścia klasy C^∞:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(\cdot)\big) \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\big) \\ &: \quad x \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)\big), \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)\big) : \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \circlearrowleft : \chi \longmapsto g_{ij}(x) \circ \chi.$$

Struktura rozmaitości różniczkowej klasy C^∞ jest indukowana wzdłuż homeomorfizmów $\mathsf{F}\tau_i$ ze struktury produktowej na lokalnym modelu $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, trywialnej (klasy C^∞) w drugim czynniku i wyznaczanej przez przecięcie z atlasem $\widehat{\mathscr{A}_B}$ na rozmaitości B w czynniku pierwszym. Względem tak określonej struktury różniczkowalnej trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$ są tautologicznie gładkie klasy C^∞, podobnie jak rzut kanoniczny na bazę, $\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{pr}_1 \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}$.

Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. W pierwszej kolejności odnotujmy istnienie naturalnego prawego działania – włókno po włóknie – grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ na przestrzeni totalnej $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ danego w postaci

$$r : \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} : \big((\beta_x, x), \chi\big) \longmapsto (\beta_x \circ \chi, x) \equiv (\beta_x, x) \triangleleft \chi.$$

Działanie to jest w jawny sposób wolne (wobec odwracalności elementów włókna $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$), a nadto przechodnie nad dowolnym punktem $x \in B$ – wszak dla dowolnej pary $\beta_{x\,1}, \beta_{x\,2} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big)$ spełniona jest tożsamość

$$\beta_{x\,2} \equiv \beta_{x\,1} \circ \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

a ponieważ $\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$ jest odwzorowaniem o odwrotności $\beta_{x\,2}^{-1} \circ \beta_{x\,1}$, przeto możemy zapisać

$$(\beta_{x\,2}, x) = (\beta_{x\,1}, x) \triangleleft \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

konstatując przy tym, że $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ jest torsorem grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$. Wybór dowolnego elementu $\beta_{x\,*} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ zadaje *niekanoniczny* ($\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$-ekwiwariantny) izomorfizm

$$\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) : \beta_x \longmapsto \beta_{x\,*}^{-1} \circ \beta_x.$$

Wobec powyższego bez trudu stwierdzamy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ są bijektywne, oto bowiem przyporządkowują w sposób jawnie injektywny elementom zbioru $\{x\}\times\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, $x \in \mathcal{O}_i$ elementy zbioru $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \{x\}$. Są więc odwracalne, co pozwala użyć ich do zaindukowania topologii na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ według opisanego schematu. Ich identyfikacja jako trywializacji lokalnych zasadza się na bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}\mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1} \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \circlearrowleft \\ &: \quad (x,\chi) \longmapsto \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1}\circ\tau_i\circ\tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big) \\ &\qquad = \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\circ\chi(\cdot)\big),x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\circ\chi(\cdot)\big) \\ &\qquad = \big(x,g_{ij}(x)\circ\chi(\cdot)\big)\,,\end{aligned}$$

w którym $g_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij},\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}))$ są odwzorowaniami przejścia wiązki $\mathbb{V}$, a który ukazuje gładki charakter odwzorowań $\mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1}$.

Na koniec zauważmy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ (więc także trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$) są ekwiwariantne względem prawostronnego działania grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$: regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim ich dziedziny oraz opisanego powyżej r na przeciwdziedzinie. Istotnie, obliczamy wprost – dla dowolnego elementu $\gamma \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ –

$$\begin{aligned}\mathsf{F}\tau_i^{-1}\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i}\times\wp_\gamma)(x,\chi) \quad &= \quad \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi\circ\gamma) = \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi\circ\gamma(\cdot)\big),x\big) \\ &\equiv \quad \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big) \triangleleft \gamma \equiv r_\gamma \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi)\,.\end{aligned}$$

Trywializacje lokalne są zatem zgodne z zaobserwowaną wcześniej strukturą torsora grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ na włóknie wiązki reperów. Następny wykład przyniesie stosowną formalizację poczynionej tu obserwacji.

References

[BJ73] Th. Bröcker and K. Jänich, *Einfürung in die Differentialgeometrie*, Springer, 1973.