GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II
WYKŁADY 6. I 7.
WIĄZKI GŁÓWNE

Abstrakcja pojęcia wiązki głównej z kanonicznej konstrukcji omówionej na zakończenie poprzedniego bloku zagadnień wymaga[1] mariażu algebraicznej struktury grupy i struktury topologicznej oraz różniczkowej, który opisuje

Definicja 1. **Grupa topologiczna** to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1, m_1, \mathrm{Inv}_1, \bullet_1 \longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2, m_2, \mathrm{Inv}_2, \bullet_2 \longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Grupa Liego to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big),$$

której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Bogatym źródłem przykładów grup Liego jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu (dowód jest prezentowany na kursie Teorii Grup II).

Twierdzenie 1 (Cartana o podgrupie domkniętej)**.** Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

Przykłady 1.

(1) dowolna $V \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest przemienną grupą Liego z $(m, \mathrm{Inv}, e) = (+_V, \mathsf{P}_V, \mathbf{0}_V)$;

(2) dla V z poprzedniego przykładu $\mathrm{GL}(V;\mathbb{K}) = \{\ \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \ \ |\ \ \exists\ \chi^{-1}\ \}$ jako otwarty podzbiór przestrzeni wektorowej $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest grupą Liego (z superpozycją endomorfizmów jako mnożeniem) zwaną **grupą główną liniową** V – jest ona izomorficzna z **grupą główną liniową** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathbb{K}(n) \ \ |\ \ \det_{(n)} A \neq 0\ \}$ dziedziczącą topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(n) \equiv \mathbb{K}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{K}(n) \longrightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym);

(3) wszechobecne w fizyce „małe" grupy Liego $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ i $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ oraz **grupa Poincarégo** $\mathrm{ISO}(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(3,1)$ o topologii będącej pochodną (złożonej) topologii **grupy Lorentza** $\mathrm{SO}(3,1) = \{\ L \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R}) \ \ |\ \ L^{\mathrm{T}}\cdot\eta\cdot L = \eta\ \}$ odwzorowań zachowujących metrykę Minkowskiego $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ (ich naturalne działanie na $\mathbb{R}^4$ określa iloczyn półprosty w definicji $\mathrm{ISO}(3,1)$);

(4) **grupa specjalna liniowa** $\mathrm{SL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \ \ |\ \ \det_{(n)} A = 1\ \}$;

(5) **grupa ortogonalna** $\mathrm{O}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \ \ |\ \ A^{\mathrm{T}}\cdot A = \mathbf{1}_n\ \}$;

[1]W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w rozmaitych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto wprowadzić pojemniejsze pojęcie grupy i jej działania w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

(6) **grupa specjalna ortogonalna** $\mathrm{SO}(n;\mathbb{K}) = \mathrm{O}(n;\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{K})$;
(7) **grupa unitarna** $\mathrm{U}(n) = \{ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \mid A^\dagger \cdot A = \mathbf{1}_n \}$;
(8) **grupa specjalna unitarna** $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$;
(9) **grupa symplektyczna** $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{K}) = \{ A \in \mathrm{SL}(2n;\mathbb{K}) \mid A^{\mathrm{T}} \cdot J_n \cdot A = J_n \}$ odwzorowań zachowujących „strukturę symplektyczną”

$$J_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Uzgodninie struktury różniczkowej i algebraicznej na zbiorze G ma daleko idące konsekwencje, których szczegółowe studium jest przedmiotem odrębnego kursu (Teoria Grup II) i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w kontekście konstrukcji powiązania na wiązkach głównych. Tymczasem jednak przejdziemy bezpośrednio do dyskusji zagadnień związanych z działaniem grup Liego na rozmaitościach różniczkowalnych, które odgrywają kluczową rolę w konstrukcji wiązek stowarzyszonych (takich jak wiązki Clifforda i spinorowe właśnie). Zaczniemy, jak zazwyczaj, od pojęcia podstawowego.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą[2] i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej[3]. Homomorfizm grup

$$\lambda_\cdot \ : \ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \ : \ g \longmapsto \lambda_g$$

określamy mianem **działania lewostronnego grupy** G **na zbiorze** X, na którym jest określone działanie grupy G, a który nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy** G. Antyhomomorfizm

$$\varrho_\cdot \ : \ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \ : \ g \longmapsto \rho_g$$

nazywamy **działaniem prawostronnym grupy** G **na zbiorze** X, a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy** G. Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako

$$\lambda \ : \ \mathrm{G} \times X \longrightarrow X \ : \ (g,x) \longmapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g,x)\,,$$

a podgrupy $\varrho_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako

$$\varrho \ : \ X \times \mathrm{G} \longrightarrow X \ : \ (x,g) \longmapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x,g)\,.$$

Niechaj $X_A,\ A \in \{1,2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f \ : \ X_1 \longrightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem lewostronnie** G**-ekwiwariantnym**, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times X_1 \arrow[r, "\lambda^1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times f"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{G} \times X_2 \arrow[r, "\lambda^2"'] & X_2 \end{tikzcd}\,.$$

[2]Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.
[3]Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych $\varrho^A,\ A \in \{1,2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^1"] \arrow[d, "f\times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie** G**-ekwiwariantnym**.

Parę $((X, \mathscr{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy** G (albo G**-przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo G**-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G. Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) topologicznie G**-ekwiwariantnego**.

Parę $((M, \widehat{\mathscr{A}}), \lambda)$ złożoną z rozmaitości różniczkowalnej $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ oraz działania lewostronnego grupy Liego G na M nazywamy **rozmaitością z działaniem gładkim lewostronnym grupy** G (albo G**-rozmaitością gładką lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem gładkim klasy C^∞. Analogicznie definiujemy **rozmaitość z działaniem gładkim prawostronnym** (albo G**-rozmaitość gładką prawostronną**) G. Gładkie odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne klasy C^∞ między rozmaitościami z działaniem gładkim lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) **gładko** G**-ekwiwariantnego**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami $M_A,\ A \in \{1,2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)\,.$$

Tak przygotowani formalnie, możemy już przejść do stosownej abstrakcji struktury z Def. 5&6.9.

1. Wiązki główne z grupą strukturalną

Nasz tour d'horizon po krainie grup i algebr Liego dał nam do ręki intuicje i narzędzia formalne nieodzowne do sprawnego i konstruktywnego poruszania się w środowisku struktur geometrycznych kluczowych dla modelowania symetrii lokalnych (a ściślej: ulokalnionych symetrii globalnych) w mechanice klasycznej i teorii pola. Wracamy teraz do ich szczegółowej dyskusji.

Definicja 3. Niechaj G będzie grupą Liego. **Wiązka główna** o **grupie strukturalnej** G to wiązka włóknista

$$(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna P_{G} z wolnym działaniem prawostronnym $r.$ grupy strukturalnej G, które jest przechodnie we włóknie nad (dowolnym) punktem bazy, co opisuje diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & B \end{tikzcd}\ ;$$

- lokalne trywializacje

$$\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}\,, \quad i \in I$$

stowarzyszone z pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B i G-ekwiwariantne względem działań prawostronnych: r na dziedzinie oraz regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim przeciwdziedziny,

$$\widetilde{\wp}^i \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp\ :\ (\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}\ :\ \big((x,g),h\big) \longmapsto (x, g\cdot h)\,,$$

tj. spełniające warunki

$$\tau_i \circ r_g = \widetilde{\wp}^i_g \circ \tau_i\,, \qquad i \in I\,.$$

Podwiązka główna o grupie strukturalnej H wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to podwiązka $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\restriction_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}})$ tejże wiązki (włóknistej) o grupie strukturalnej będącej podgrupą Liego $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$.

Morfizm wiązek głównych $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}, B_\alpha, \mathrm{G}_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ o działaniach odnośnych grup strukturalnych r^α to trójka (Φ, f, φ) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f)\ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}, B_1, \mathrm{G}_1, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}) \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}, B_2, \mathrm{G}_2, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}})$$

oraz homomorfizmu grup topologicznych (wzgl. Liego) pozostających w relacji wyrażanej przez diagram przemienny

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \times \mathrm{G}_1 \arrow[r, "r^1"] \arrow[d, "\Phi\times\varphi"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}"] \arrow[d, "\Phi"] & B_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \times \mathrm{G}_2 \arrow[r, "r^2"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}}"'] & B_2 \end{tikzcd}\,.$$

Przykłady 2.

(1) Trywialna wiązka główna nad B o grupie strukturalnej G, czyli

$$(B \times \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \mathrm{pr}_1)\,.$$

(2) Wiązka reperów wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ modelowanej na $\mathbb{K}^{\times n}$, czyli

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}\big)\,,$$

w szczególności zaś – **wiązka reperów nad rozmaitością** (albo **wiązka baz nad rozmaitością**) M wymiaru n, czyli

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M, M, \mathrm{GL}(\mathsf{T}M) \cong \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathsf{T}M}\big)\,.$$

(3) **Rozwłóknienie Hopfa**

$$\big(\mathrm{SU}(2) \equiv \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathrm{U}(1), \pi_{\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)}\big)\,,$$

w którym rzut na bazę przyjmuje postać

$$\pi_{\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)}\ :\ \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{\times 3} \cong \mathbb{C}\times\mathbb{R}\ :\ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \longmapsto \big(2z_1\cdot\overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2\big)\,,$$

a działanie definiujące grupy strukturalnej $\mathrm{U}(1)$ jest dane wzorem

$$\begin{aligned} r.\ &:\ \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathrm{SU}(2) \\ &:\ \left(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}, u\right) \longmapsto \begin{pmatrix} z_1\cdot u & z_2\cdot u^{-1} \\ -\overline{z}_2\cdot u & \overline{z}_1\cdot u^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}\,, \end{aligned}$$

w którego ostatniej części $\mathrm{U}(1)$ traktujemy jako podgrupę Liego macierzowej grupy Liego $\mathrm{SU}(2)$.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj

$$\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} := \{ (p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \quad | \quad \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2) \}$$

będzie produktem włóknistym. **Odwzorowanie ilorazowe** na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to odwzorowanie

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

określone przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) \,.$$

Uwaga 1. O postulowanej gładkości odwzorowania ilorazowego najłatwiej jest przekonać się przy użyciu trywializacji lokalnych. Istotnie, niechaj $p_1, p_2 \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$, $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$, przy czym $p_\alpha = \tau_i^{-1}(x, g_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dla pewnych elementów $g_\alpha \in \mathrm{G}$, a wtedy wobec równości

$$p_2 = \tau_i^{-1}(x, g_2) \equiv \tau_i^{-1}\big(x, g_1 \cdot \big(g_1^{-1} \cdot g_2\big)\big) = \tau_i^{-1}(x, g_1) \triangleleft \big(g_1^{-1} \cdot g_2\big) \equiv p_1 \triangleleft \big(g_1^{-1} \cdot g_2\big)$$

otrzymujemy reprezentację lokalną odwzorowania ilorazowego:

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) \equiv g_1^{-1} \cdot g_2 = \mathrm{m}\big(\mathrm{Inv} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_1), \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_2)\big) \,,$$

daną w postaci superpozycji odwzorowań gładkich (m jest operacją binarną w G), więc gładką.

Podstawowe własności strukturalne odwzorowania ilorazowego, z których przyjdzie nam korzystać niebawem, opisuje

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 4. Odwzorowanie ilorazowe spełnia warunki wyrażone przez następujące diagramy przemienne:

(DM1) skośna symetria

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Inv}"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd} \,,$$

gdzie $\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft : (p_1, p_2) \longmapsto (p_2, p_1)$ jest (obciętą do produktu włóknistego) transpozycją kanoniczną, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_1) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2)^{-1} \,;$$

(DM2) warunek 1-kocyklu

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{1,2}\,,\, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{2,3})"] \arrow[dr, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{1,3}"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[d, "M"] \\ & \mathrm{G} \end{tikzcd} \,,$$

gdzie $\mathrm{pr}_{i,j} : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} : (p_1, p_2, p_3) \longmapsto (p_i, p_j)$, $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ jest (obciętym do produktu włóknistego) rzutem kanonicznym, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2,p_3) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2, p_3) \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_3)^{-1} \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2) = e \,;$$

(DM3) G-ekwiwariantność

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathrm{G} \arrow[l, "(r\circ \mathrm{pr}_{1,3}, \mathrm{pr}_2)"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \times r"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\
\mathrm{G} & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "\ell\circ(\mathrm{Inv}\times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})\circ\tau_{\mathrm{G},\mathrm{G}}"] \arrow[r, "\wp"'] & \mathrm{G}
\end{tikzcd},$$

czyli

$$\forall_{(p_1,p_2)\in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ g_1,g_2\in \mathrm{G}} \ :\ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1 \triangleleft g_1, p_2 \triangleleft g_2) = g_1^{-1} \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2) \cdot g_2 \,.$$

Dowód: Oczywisty. □

Nie zawsze mamy do czynienia z pełnym „pakietem" obiektów wymienionych w definicji wiązki głównej. Warto zatem zastanowić się, które z jej elementów mają naturę *konstytutywną*, tj. determinują istnienie struktury wiązki głównej na rozmaitości. Odpowiedzi na tak postawione pytanie przynosi

Stwierdzenie 2. Niechaj P, B będą rozmaitościami i niech G będzie grupą Liego. Zakładamy też, że jest określona surjektywna submersja $\pi : \mathsf{P} \longrightarrow B$ oraz gładkie działanie prawostronne $r_\cdot : \mathsf{P} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}$ grupy G na P. Jeśli działanie $r_\cdot$ jest swobodne, jego orbity pokrywają się z poziomicami π, a odwzorowanie $\phi_{\mathsf{P}} : \mathsf{P} \times_B \mathsf{P} \longrightarrow \mathrm{G}$ określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2)\in \mathsf{P}\times_B \mathsf{P}} \ :\ p_2 = r_{\phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)}(p_1)$$

jest gładkie, to wówczas czwórka

$$(\mathsf{P}, B, \mathrm{G}, \pi)$$

jest wiązką główną.

Dowód: Na podstawie Tw. 1&2&3.2 o istnieniu cięć lokalnych surjektywnej submersji stwierdzamy istnienie pokrycia otwartego $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ rozmaitości B, na którego elementach określone są gładkie cięcia lokalne $\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}$ submersji π, możemy zatem zdefiniować jawnie gładkie odwzorowania

$$\tau_i^{-1} \ :\ \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \ :\ (x,g) \longmapsto r_g\big(\sigma_i(x)\big)\,.$$

Wykorzystując odwzorowanie ϕ_{P}, bez trudu znajdujemy ich (gładkie) odwrotności:

$$\tau_i \ :\ \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ :\ p \longmapsto \big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big)\,.$$

Są one dobrze określone, gdyż

$$\pi\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) = (\pi \circ \sigma_i) \circ \pi(p) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \circ \pi(p) = \pi(p)\,,$$

i – istotnie – spełniają postulowane tożsamości:

$$\begin{aligned}
\tau_i^{-1} \circ \tau_i(p) &= \tau_i^{-1}\big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big) = r_{\phi_{\mathsf{P}}(\sigma_i\circ\pi(p),p)}\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) \equiv p\,, \\
\\
\tau_i \circ \tau_i^{-1}(x,g) &= \tau_i\big(r_g\big(\sigma_i(x)\big)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) \\
&= \big(\pi \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) \\
&= \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) = (x,g)\,,
\end{aligned}$$

z których druga wynika stąd, że działanie G odwzorowuje poziomicę π w siebie, a do tego nieuchronnie

$$\forall_{(p_1,p_2,g)\in\mathsf{P}^{\times 2}\times\mathrm{G}}\ :\ \phi_{\mathsf{P}}\big(p_1, r_g(p_2)\big) = \phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)\cdot g\,.$$

Są one także stosownie G-ekwiwariantne, oto bowiem[4]

$$\tau_i^{-1}\big((x,g)\triangleleft h\big) \equiv \tau_i^{-1}(x,g\cdot h) = r_{g\cdot h}\big(\sigma_i(x)\big) = r_h\circ r_g\big(\sigma_i(x)\big) = r_h\big(r_g\circ\sigma_i(x)\big) \equiv r_h\circ\tau_i^{-1}(x,g)\,.$$

Skonstruowane powyżej trywializacje lokalne spełniają w punktach $x\in\mathcal{O}_{ij},\ i,j\in I$ warunki

$$\begin{aligned}\tau_i\circ\tau_j^{-1}(x,g) &= \tau_i\big(r_g\circ\sigma_j(x)\big) = \big(\pi\circ r_g\circ\sigma_j(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i\circ\pi\circ r_g\circ\sigma_j(x), r_g\circ\sigma_j(x)\big)\big)\\ &= \big(x,\phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g\circ\sigma_j(x)\big)\big) = \big(x,\phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x),\sigma_j(x)\big)\cdot g\big)\,,\end{aligned}$$

z których odczytujemy postać odwzorowań przejścia:

$$g_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ x\longmapsto\phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x),\sigma_j(x)\big)\,,$$

zamykając tym samym procedurę identyfikacji postulowanej struktury wiązki głównej o grupie strukturalnej G. □

W następnej kolejności przedstawimy wygodne kryterium trywializowalności wiązki głównej.

Stwierdzenie 3. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi klasy C^∞ wiązki głównej i jej trywializacjami lokalnymi. W szczególności wiązka główna jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma globalne cięcie.

Dowód: Cięciu lokalnemu $\sigma\ :\ \mathcal{O}\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\subset\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ \mathcal{O}\in\mathscr{T}(B)$ przyporządkowujemy trywializację (lokalną)

$$\tau_\sigma\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\longrightarrow\mathcal{O}\times\mathrm{G}\ :\ p\longmapsto\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\big)\big)$$

o pożądanych własnościach, a więc odwracalną,

$$\tau_\sigma^{-1}\ :\ \mathcal{O}\times\mathrm{G}\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\ :\ (x,g)\longmapsto\sigma(x)\triangleleft g\,,$$

i G-ekwiwariantną,

$$\begin{aligned}\tau_\sigma(p\triangleleft g) &\equiv \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g),p\triangleleft g\big)\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\triangleleft g\big)\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\big)\cdot g\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\big)\big)\triangleleft g\equiv\tau_\sigma(p)\triangleleft g\,.\end{aligned}$$

I odwrotnie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}\times\mathrm{G}$ przypisujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau\ :\ \mathcal{O}\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\ :\ x\longmapsto\tau^{-1}(x,e)\,.$$

Powyższe przyporządkowania są przy tym wzajem odwrotne, oto bowiem – z jednej strony –

$$\forall_{x\in\mathcal{O}}\ :\ \sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x,e) = \sigma(x)\triangleleft e = \sigma(x)\,,$$

oraz – z drugiej strony –

$$\begin{aligned}\forall_{p\in\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})}\ :\ \tau_{\sigma_\tau}(p) &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\big)\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),p\big)\big)\,,\end{aligned}$$

a ponieważ

$$p\equiv\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),p\big)\,,$$

[4]Odwrotność G-ekwiwariantnej bijekcji jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym.

czyli

$$\begin{aligned}\tau(p) &= \tau\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),p\big)\big)\\ &= \tau\circ\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),p\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),p\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),e\big),p\big)\big)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}(p) = \tau(p)\,.$$

$\square$

Uwaga 2. Należy podkreślić, że ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia nie stosuje się do wiązek włóknistych w ogólności. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że każda wiązka wektorowa ma globalne cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ (a nie każda taka wiązka jest globalnie trywializowalna).

Na zakończenie naszego trawersu przez elementarz teorii wiązek głównych zajmiemy się wyznaczeniem wygodnego opisu lokalnego morfizmów wiązek głównych pokrywających dyfeomorfizm identycznościowy na bazie (pośród których z czasem rozpoznamy tzw. „transformacje symetrii cechowania").

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 3. Dowolny morfizm $(\Phi, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ wiązek głównych $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha\in\{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau^\alpha_i \,:\, \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times\mathrm{G}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij} \,:\, \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\mathrm{G}$), opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}\,,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i \,:\, \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathrm{G}\,,\quad i\in I$$

o własności

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_{ij}} \,:\, g^2_{ij}(x) = h_i(x)\cdot g^1_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1}\,. \tag{2}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

Dowód: Rozumując analogicznie jak w komentarzu do Def. 1&2&3.3 i 1&2&3.4, upewniamy się, że odwzorowanie Φ jest jednoznacznie zadane przez wartości przyjmowane na lokalnie płaskich cięciach $\sigma^1_i \equiv \sigma_{\tau^1_i}$, $i\in I$ stowarzyszonych z lokalnymi trywializacjami swej dziedziny. Istotnie, dowolny punkt z włókna $\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}\,x}$ możemy wobec założonej G-ekwiwariantności trywializacji zapisać w postaci

$$\tau^{1\,-1}_i(x,g) = \sigma^1_i(x)\triangleleft g\,,$$

a zatem wobec G-ekwiwariantności Φ zachodzi

$$\Phi\big(\tau^{1\,-1}_i(x,g)\big) = \Phi\big(\sigma^1_i(x)\triangleleft g\big) = \Phi\big(\sigma^1_i(x)\big)\triangleleft g\,.$$

Definiujemy jawnie gładkie odwzorowania

$$h_i := \mathrm{pr}_2\circ\tau^2_i\circ\Phi\circ\sigma^1_i \,:\, \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathrm{G}$$

i sprawdzamy: z jednej strony

$$\tau_j^{2\,-1}\big(x,h_j(x)\big)=\tau_i^{2\,-1}\big(x,g_{ij}^2(x)\cdot h_j(x)\big)\,,$$

a z drugiej

$$\begin{aligned}\tau_j^{2\,-1}\big(x,h_j(x)\big) &= \Phi\circ\sigma_j^1(x)\equiv\Phi\big(\tau_j^{1\,-1}(x,e)\big)=\Phi\big(\tau_i^{1\,-1}\big(x,g_{ij}^1(x)\big)\big)=\Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x,e)\big)\triangleleft g_{ij}^1(x)\\ &\equiv \Phi\circ\sigma_i^1(x)\triangleleft g_{ij}^1(x)=\tau_j^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\big)\triangleleft g_{ij}^1(x)=\tau_j^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g_{ij}^1(x)\big)\,,\end{aligned}$$

co w sumie odtwarza postulowaną relację w konsekwencji bijektywności trywializacji lokalnych.

Niechaj teraz $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha,B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha})$, $\alpha\in\{1,2\}$ będą wiązkami głównymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathrm{G}$ i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\mathrm{G}$. Mając dowolną rodzinę odwzorowań $h_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathrm{G}$ opisanych w tezie dowodzonego twierdzenia, definiujemy nad elementami pokrycia współtrywializującego odwzorowania lokalnie gładkie

$$\Phi_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2}^{-1}(\mathcal{O}_i)\ :\ \tau_i^{1\,-1}(x,g)\longmapsto\tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g\big)\,,$$

dla których liczymy – w dowolnym punkcie $(x,g)\in\mathcal{O}_{ij}\times\mathrm{G}$ –

$$\begin{aligned}\Phi_j\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big) &= \Phi_j\big(\tau_j^{1\,-1}\big(x,g_{ji}^1(x)\cdot g\big)\big)=\tau_j^{2\,-1}\big(x,h_j(x)\cdot g_{ji}^1(x)\cdot g\big)\\ &= \tau_i^{2\,-1}\big(x,g_{ij}^2(x)\cdot h_j(x)\cdot g_{ji}^1(x)\cdot g\big)=\tau_i^{2\,-1}\big(x,h_i(x)\cdot g\big)\\ &\equiv \Phi_i\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big)\,.\end{aligned}$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że Φ_i, $i\in I$ są ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2\,,\qquad\qquad \Phi\restriction_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)}=\Phi_i\,,$$

działającego z zachowaniem włókien i jawnie G-ekwiwariantnego (dzięki przemienności lewego i prawego działania regularnego G na sobie oraz założonej G-ekwiwariantności trywializacji). □

Nasz tour d'horizon teorii wiązek głównych wieńczy poniższe stwierdzenie, będące prostą konsekwencją (konstruktywnego dowodu) powyższego Twierdzenia.

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3. Podkategoria

$$\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B\,|\,\mathrm{id}_B)$$

kategorii $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ wiązek głównych nad bazą B o grupie strukturalnej G o tej samej klasie obiektów co $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie, $f=\mathrm{id}_B$ (i na grupie strukturalnej, $\varphi=\mathrm{id}_{\mathrm{G}}$) jest grupoidem.

Dowód: W świetle Tw. 2 wystarczy poprowadzić rozważania w opisie lokalnym, w którym dowolny morfizm $\Phi\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2$ pokrywający identyczność na bazie B jest reprezentowany przez rodzinę odwzorowań $h_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathrm{G}$, $i\in I$. Na mocy tego samego stwierdzenia rodzina odwzorowań $\{\widetilde{h}_i:=\mathrm{Inv}\circ h_i\}_{i\in I}$ określa morfizm $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^2\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^1$, który w oczywisty sposób jest odwrotnością Φ. □

Kluczową z punktu widzenia dalszych naszych rozważań własność działania grupy Liego (ogólniej: topologicznej) na rozmaitości (ogólniej: przestrzeni topologicznej), która – jak lada chwila pokażemy – cechuje w szczególności działanie definiujące grupy Liego na przestrzeni totalnej wiązki głównej, wprowadzamy w poniższej

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 2. Działanie $\lambda : \mathrm{G} \times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na lokalnie prezwartej[5] przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ nazywamy **właściwym**,, gdy[6] ze zbieżności dowolnego ciągu punktów

$$\lambda(g., x.) : \mathbb{N} \longrightarrow M : n \longmapsto g_n \triangleright x_n ,$$

określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów $x. : \mathbb{N} \longrightarrow X$ oraz dowolnego ciągu elementów $g. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G}$, wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu $g.$.

Znaczenie tej cechy eksponuje następujące fundamentalne twierdzenie, które podajemy tu bez dowodu (ten pojawia się np. na wykładzie z Teorii Grup II):

Twierdzenie 3 (O rozmaitości ilorazowej)**.** Przyjmijmy notację Def. 5. Ilekroć działanie grupy Liego G na rozmaitości M jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit M/G jest rozmaitością topologiczną wymiaru $\dim M - \dim \mathrm{G}$ i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny

$$\pi_{M/\mathrm{G}} : M \longrightarrow M/\mathrm{G} : m \longmapsto [m] \equiv \mathrm{G} \triangleright m$$

jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaitości nosi miano **rozmaitości ilorazowej**.

Wracając do obecnego kontekstu geometrycznego, otrzymujemy istotne

Stwierdzenie 5. Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe.

Dowód: Rozważmy ciągi $p. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathsf{P}_\mathrm{G}$ i $g. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G}$ o własnościach

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p , \qquad \lim_{n\to\infty} (p_n \triangleleft g_n) = \widetilde{p} .$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(\widetilde{p}) &\equiv \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}\big(\lim_{n\to\infty} (p_n \triangleleft g_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n\to\infty} \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p_n) \\ &= \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}\big(\lim_{n\to\infty} p_n\big) = \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p) , \end{aligned}$$

która w świetle Def. 4 pozwala zapisać

$$\widetilde{p} = p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p, \widetilde{p}) .$$

Niechaj $\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}(p) \in \mathcal{O}_i$, gdzie $\mathcal{O}_i$ jest elementem pokrycia trywializującego P_G. Istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ o własności

$$\forall_{n \geq N} : p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O}_i) ,$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi $p_{N+\cdot}$ i $p_{N+\cdot} \triangleleft g_{N+\cdot}$ w obrazie trywializacji $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$, w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n, \gamma_n) , \qquad \tau_i(p) =: (x, \gamma) ,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, \gamma_n) = (x, \gamma) ,$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n \cdot g_n)$$

[5]Przestrzeń topologiczną nazywamy **lokalnie prezwartą**, jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze prezwartym (tj. takim, którego domknięcie jest zwarte) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu.

[6]Najczęściej stosowana definicja „właściwości działania” odwołuje się do właściwości (w rozumieniu topologicznym) odwzrorowania $(\mathrm{pr}_2, \lambda) : \mathrm{G} \times M \longrightarrow M \times M$. Można wszakże pokazać, że podana przez nas definicja jest tej tutaj równoważna.

oraz

$$\tau_i(\widetilde{p}) = \tau_i\big(p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\big) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p}) = (x,\gamma) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p}) = \big(x,\gamma\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\big)\,,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}(\gamma_n \triangleleft g_n) = \gamma\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\,.$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek

$$\lim_{n\to\infty} g_n \equiv \lim_{n\to\infty}\big(\gamma_n^{-1}\cdot(\gamma_n\cdot g_n)\big) = \gamma^{-1}\cdot\big(\gamma\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})\,,$$

który przesądza o słuszności dowodzonej tezy. □

Idąc tym tropem dalej w kierunku fizykalnych zastosowań

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną, M zaś – rozmaitością z działaniem (lewostronnym) $\lambda : \mathrm{G}\times M \longrightarrow M$ grupy G. Rozważmy rozmaitość produktową $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$. Działanie grupy G dane wzorem

(3)
$$\widetilde{\lambda}.\ :\ \mathrm{G}\times(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M\ :\ \big(g,(p,x)\big) \longmapsto \big(r\big(p,g^{-1}\big),\lambda(g,m)\big)$$

jest wolne i właściwe.

Dowód: Oczywisty. □

2. Od wiązki wektorowej do wiązki baz i. . . z powrotem – ostatni krok w nieznane

Okazuje się, że wiązkę wektorową $\mathbb{V}$ można odtworzyć (z dokładnością do izomorfizmu) z odnośnej wiązki reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ przez pewną sprytną konstrukcję, którą przedstawiamy poniżej. Jak wynika wprost z definicji $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$, jest dobrze określone odwzorowanie (punktowej) ewaluacji

$$\widehat{\mathrm{ev}}\ :\ \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{V}\ :\ \big((\beta_x,x),v\big) \longmapsto \beta_x(v)\,.$$

Odwzorowanie to jest stałe na orbitach działania

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ev}}\quad &:\quad \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\times\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\big) \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\\ &:\quad \big(\chi,\big((\beta_x,x),v\big)\big) \longmapsto \big(\big(\beta_x\circ\chi^{-1},x\big),\chi(v)\big)\,,\end{aligned}$$

zapisanego w terminach naturalnego (definiującego) działania grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ na $\mathbb{K}^{\times n}$,

$$\mathrm{ev}\ :\ \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\times\mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}\ :\ (\chi,v) \longmapsto \chi(v)\,.$$

To oznacza, że $\widehat{\mathrm{ev}}$ zstępuje na rozmaitość ilorazową $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ zdefiniowaną w odniesieniu do działania $\widetilde{\mathrm{ev}}$, której istnienie zapewnia Twierdzenie o Rozmaitości Ilorazowej (patrz: Corollarium 1). Innymi słowy, $\widehat{\mathrm{ev}}$ zadaje odwzorowanie

(5)
$$\begin{aligned}[\widehat{\mathrm{ev}}]\quad &:\quad (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{V}\\ &:\quad \big[\big((\beta_x,x),v\big)\big] \longmapsto \widehat{\mathrm{ev}}\big((\beta_x,x),v\big) \equiv \beta_x(v)\end{aligned}$$

które domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{V} \\ \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n} \arrow[ur, "\widehat{\mathrm{ev}}"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}"'] & (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \arrow[u, "{[\widehat{\mathrm{ev}}]}"'] \end{tikzcd}\,.$$

Zapisany na nim rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})}$ na przestrzeń orbit jest – w świetle rzeczonego Twierdzenia – gładką submersją, przeto wprost na mocy Twierdzenia o kwazi-uniwersalnej własności submersji (z Niezbędnika różniczkowo-geometrycznego – Stw. 29) gładkość odwzorowania indukowanego $[\widehat{\rm ev}]$ jest implikowana przez gładkość odwzorowania $\widehat{\rm ev}$. Przy tym bez trudu przekonujemy się, że w ograniczeniu do dowolnego włókna $({\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K}),\ x\in B$ odwzorowanie to jest bijekcją. Istotnie, wybierzmy dowolną bazę $\beta_x^*\in{\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)$ i rozważmy zbiór $S:=\{\ ((\beta_x^*,x),v)\ \ |\ \ v\in\mathbb{K}^{\times n}\ \}$. Orbity dwóch dowolnych jego elementów, ${\rm GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_1)$ i ${\rm GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_2)$, albo pokrywają się ze sobą, albo też są rozłączne (jako klasy abstrakcji relacji równoważności). Pierwsza z tych ewentualności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$
\begin{aligned}
&\big((\beta_x^*,x),v_2\big)\in{\rm GL}(n;\mathbb{K})\triangleright\big((\beta_x^*,x),v_1\big)\\
\Longleftrightarrow\qquad &\exists_{\chi\in{\rm GL}(n;\mathbb{K})}\ :\ \big((\beta_x^*,x),v_2\big)=\big((\beta_x^*\circ\chi^{-1},x),\chi(v_1)\big)\\
\Longleftrightarrow\qquad &(\ \chi={\rm id}_{\mathbb{K}^{\times n}}\quad\wedge\quad v_2=v_1\ )\,,
\end{aligned}
$$

zatem nietożsame elementy zbioru S należą do rozłącznych orbit. Moc włókna $({\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})$ jest więc nie mniejsza niż moc włókna $\mathbb{V}_x$. Pozostaje sprawdzić injektywność $[\widehat{\rm ev}]$. W tym celu rozważmy konsekwencje równości

$$\beta_x^1(v_1)\equiv[\widehat{\rm ev}]\big(\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big]\big)=[\widehat{\rm ev}]\big(\big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\big)\equiv\beta_x^2(v_2)\,.$$

Ta jest równoważna równości

$$v_2=\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\,,$$

która implikuje relację

$$v_2\in{\rm GL}(n;\mathbb{K})\triangleright v_1\,,$$

a dalej także

$$\big((\beta_x^2,x),v_2\big)=\big((\beta_x^1\circ\big(\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1\big)^{-1},x),\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\big)\in{\rm GL}(n;\mathbb{K})\triangleright\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\,.$$

Na tej podstawie wyciągamy wniosek o równości argumentów,

$$\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big]=\big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\,,$$

która przesądza o injektywności $[\widehat{\rm ev}]$. Mamy zatem do czynienia z gładką bijekcją. Skonstruujemy jej gładką odwrotność. W tym celu użyjemy lokalnych trywializacji $\tau_i\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times{\rm GL}(n;\mathbb{K}),\ i\in I$ wiązki reperów stowarzyszonych z pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, które w odwołaniu do tezy Stw. 3 pozwalają nam skonstruować lokalnie gładkie cięcia

$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\ :\ x\longmapsto\tau_i^{-1}(x,e)\equiv\big(\beta_i(x),x\big)\in{\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\{x\}\,,$$

przy czym pole baz β_i zależy (lokalnie) gładko od punktu w $\mathcal{O}_i\subset B$. Łatwo przekonujemy się, że odwzorowanie zadane lokalnie (nad $\mathcal{O}_i\ni x$) w postaci

$$\Sigma_i\restriction_{\mathbb{V}_x}\ :\ \mathbb{V}_x\longrightarrow({\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})\ :\ \nu\longmapsto\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]$$

jest (lokalną) odwrotnością $[\widehat{\rm ev}]$, oto bowiem

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_i\circ[\widehat{\rm ev}]\big(\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\big)=\Sigma_i\circ\beta_x(v)=\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big]\\
\equiv\quad&\big[\big(\big(\beta_x\circ\big(\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x\big)^{-1},x\big),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big]=\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]
\end{aligned}
$$

a nadto – dla $\nu\in\mathbb{V}_x$ –

$$[\widehat{\rm ev}]\circ\Sigma_i(\nu)=[\widehat{\rm ev}]\big(\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]\big)=\beta_i(x)\big(\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)=\nu\,.$$

I wreszcie na koniec upewniamy się, że odwzorowania lokalne Σ_i stanowią ograniczenia (do odnośnych elementów $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ pokrycia przestrzeni totalnej $\mathbb{V}$) odwzorowania globalnie gładkiego. W tym celu musimy najpierw ustalić regułę transformacyjną dla lokalnych wyborów bazy

β_i. Niechaj $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ będą odwzorowaniami przejścia dla wybranych wcześniej trywializacji lokalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$, tj. – dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $\chi \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ –

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x,\chi) = \big(x, g_{ij}(x) \circ \chi\big).$$

Obliczamy wówczas

$$\begin{aligned}\big(\beta_j(x), x\big) &\equiv \tau_j^{-1}(x, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) = \tau_i^{-1}\big(x, g_{ij}(x)\big) = \tau_i^{-1}(x, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) \triangleleft g_{ij}(x) \\ &= \big(\beta_i(x), x\big) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv \big(\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x\big),\end{aligned}$$

czyli

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x),$$

a stąd już łatwo wyprowadzamy – dla dowolnego punktu $\nu \in \mathbb{V}_x,\ x \in \mathcal{O}_{ij}$ – pożądaną tożsamość

$$\begin{aligned}\Sigma_j(\nu) &= \big[\big((\beta_j(x), x), \beta_j(x)^{-1}(\nu)\big)\big] = \big[\big((\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big] \\ &= \big[\big((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big] \equiv \Sigma_i(\nu).\end{aligned}$$

Dotychczasowe nasze rozważania pozwalają nam wypisać wprost trywializacje lokalne

$$\begin{aligned}[\tau_i] \quad &: \quad \big(\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \\ &: \quad \big[\big((\beta_x, x), v\big)\big] \longmapsto \big(x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)\big)\end{aligned}$$

o odwrotnościach

$$\begin{aligned}[\tau_i]^{-1} \quad &: \quad \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \big(\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \\ &: \quad (x, v) \longmapsto \big[\big((\beta_i(x), x), v\big)\big]\end{aligned}$$

i tym samym zidentyfikować strukturę wiązki włóknistej na rozmaitości ilorazowej $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, przy czym jest jasne, że jest to wiązka wektorowa nad B o ciele bazowym $\mathbb{K}$. Odnotujmy na marginesie, że odwzorowania przejścia dla wypisanych tu trywializacji przyjmują – w dowolnym punkcie $(x, v) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{K}^{\times n}$ – postać

$$\begin{aligned}[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, v) &= [\tau_i]\big(\big[\big(\big(\beta_j(x), x\big), v\big)\big]\big) = \big(x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_j(x)(v)\big) \\ &= \big(x, g_{ij}(x)(v)\big),\end{aligned}$$

identyczną jak w przypadku $\mathbb{V}$. Wobec swojej oczywistej $\mathbb{K}$-liniowości odwzorowanie $[\widehat{\mathrm{ev}}]$ jawi się nam jako izomorfizm wiązek wektorowych

$$[\widehat{\mathrm{ev}}] \ : \ (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}.$$

Na gruncie powyższych i wcześniejszych rozważań możemy wyartykułować proste, acz strukturalne

Stwierdzenie 6. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi (a zatem także trywializacjami lokalnymi) wiązki reperów wiązki wektorowej i trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej.

Dowód: Dowolne cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V},\ \mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ pozwala zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma \ : \ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n} \ : \ v \longmapsto \big(\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big),$$

jawnie $\mathbb{K}$-liniowe i gładkie, o oczywistej odwrotności

$$\tau_\sigma^{-1} \ : \ \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \ : \ (x, V) \longmapsto \sigma(x)(V),$$

także gładkiej (i $\mathbb{K}$-liniowej). Własności te pozwalają zidentyfikować τ_σ jako trywializację lokalną wiązki $\mathbb{V}$ stowarzyszoną z cięciem lokalnym σ wiązki reperów.

Odwracając powyższe rozumowanie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}\times\mathbb{K}^{\times n}$ przyporządkowujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau\ :\ \mathcal{O}\longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})\ :\ x\longmapsto \tau^{-1}(x,\cdot)\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że skonstruowane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, stwierdzamy równość

$$\forall_{(x,V)\in\mathcal{O}\times\mathbb{K}^{\times n}}\ :\ \sigma_{\tau_\sigma}(x)(V)=\tau_\sigma^{-1}(x,V)=\sigma(x)(V)\,,$$

a z niej wyprowadzamy tożsamość

$$\sigma_{\tau_\sigma}=\sigma\,.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\forall_{v\in\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})}\ :\ \tau_{\sigma_\tau}(v) &= \big(\pi_{\mathbb{V}}(v),(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)=\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\cdot\big)^{-1}(v)\big)\\ &\equiv \tau\circ\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),\cdot\big)^{-1}(v)\big)=\tau(v)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}=\tau\,.$$

□

oraz

Stwierdzenie 7. Dowolna rodzina trywializacji lokalnych wiązki reperów wiązki wektorowej indukuje rodzinę trywializacji lokalnych wiązki wektorowej (stowarzyszonych z tą samą rodziną podzbiorów otwartych ich wspólnej bazy) o tych samych odwzorowaniach przejścia.

Dowód: Niechaj $(\mathbb{V},B,\mathbb{K}^{\times n},\pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem $\mathbb{K}$), $(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V},\,B,{\rm GL}(n;\mathbb{K}),\pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}})$ zaś – wiązką jej reperów i niech $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times{\rm GL}(n;\mathbb{K})$, $\mathcal{O}_i\in\mathscr{T}(B)$, $i\in\{1,2\}$ będą dwiema trywializacjami lokalnymi drugiej z nich, o niepustym przecięciu dziedzin, $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2$, nad którym są określone odwzorowania przejścia $g_{12}\ :\ \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2\longrightarrow{\rm GL}(n;\mathbb{K})$. Z każdą z trywializacji stowarzyszamy cięcie lokalne wedle (znanej nam) formuły

$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\subset\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\ :\ y\longmapsto\tau_i^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\,,$$

a następnie używamy ich do skonstruowania odnośnych gładkich trywializacji lokalnych wiązki $\mathbb{V}$ zgodnie z przepisem sformułowanym w dowodzie Stw. 6,

$$\tau_{\sigma_i}\ :\ \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathbb{K}^{\times n}\ :\ v\longmapsto\big(\pi_{\mathbb{V}}(v),(\sigma_i\circ\pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)\,,\quad i\in\{1,2\}\,.$$

O tym, że są to trywializacje o postulowanych odwzorowaniach przejścia, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnych $(y,V)\in\mathcal{O}_{12}\times\mathbb{K}^{\times n}$,

$$\begin{aligned}&\tau_{\sigma_1}\circ\tau_{\sigma_2}^{-1}(y,V)=\tau_{\sigma_1}\big(\sigma_2(y)(V)\big)\\ =\ &\big(\pi_{\mathbb{V}}\big(\sigma_2(y)(V)\big),(\sigma_1\circ\pi_{\mathbb{V}})\big(\sigma_2(y)(V)\big)^{-1}\big(\sigma_2(y)(V)\big)\big)\\ =\ &\big(y,\sigma_1(y)^{-1}\circ\sigma_2(y)(V)\big)\,,\end{aligned}$$

który po uwzględnieniu ciągu równości

$$\begin{aligned}\sigma_2(y)&\equiv\tau_2^{-1}(y,\mathbf{1}_n)=\tau_1^{-1}\big(y,g_{12}(y)\big)=\tau_1^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\triangleleft g_{12}(y)\equiv\tau_1^{-1}(y,\mathbf{1}_n)\circ g_{12}(y)\\ &\equiv\sigma_1(y)\circ g_{12}(y)\end{aligned}$$

odtwarza pożądany wynik

$$\tau_{\sigma_1}\circ\tau_{\sigma_2}^{-1}(y,V)=\big(y,\sigma_1(y)^{-1}\circ\sigma_1(y)\circ g_{12}(y)(V)\big)\equiv\big(y,g_{12}(y)(V)\big)\,.$$

□