Wykład X

2022/23

Mamy także

Str. 24. Przypomnijmy zapis dotychczasowy,

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : X \in \mathfrak{g}_\alpha \Rightarrow X^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

zatem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Longleftrightarrow -\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$.

Ponadto $\langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}$.

D: Niech $H\otimes 1 \in \mathfrak{t}\otimes 1$ i $X \in \mathfrak{g}$, a wtedy

$$X \equiv X_1\otimes 1 + X_2\otimes i$$

$$[H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^* = \left([H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i\right)^*$$

$$= -[H,X_1]_{\mathfrak{k}}\otimes 1 + [H,X_2]_{\mathfrak{k}}\otimes i \equiv [H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}}.$$

Wobec anty-$\mathbb{C}$-liniowości $*$ i str. 23. $\alpha \in Q \subset \mathfrak{t} \otimes i$

mamy – dla $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ –

$$\underset{\displaystyle ad^{\mathbb{C}}_H(X^*)}{\underset{\shortparallel}{[H\otimes 1, X^*]_{\mathfrak{g}}}} = \underset{\displaystyle ad^{\mathbb{C}}_H(X)^*}{\underset{\shortparallel}{[H\otimes 1, X]_{\mathfrak{g}}^*}} \qquad \big((\alpha|H)\triangleright X\big)^* = \overline{(\alpha|H)}\triangleright X^*$$

$$= -(\alpha|H)\triangleright X^*.$$

Skąd też dla $H = H_1\otimes 1 + H_2 \otimes i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ i $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ zachodzi

$$[H, X^*]_{\mathfrak{g}} \doteq ad^{(\mathfrak{g})}_H(X^*) = ad^{\mathbb{C}}_{H_1}(X^*) + i\, ad^{\mathbb{C}}_{H_2}(X^*)$$

$$= -(\alpha|H_1)\triangleright X^* - i\cdot(\alpha|H_2)\triangleright X^*$$

$$= -(\alpha|H_1\otimes 1 + H_2\otimes i)\triangleright X^* \equiv (-\alpha|H)\triangleright X^*.$$

Przypominijmy: $(\mathfrak{h}, (\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}})$ – niezdegenerowana (wszak $(\cdot|\cdot)$ ma tę własność i $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$), przeto $\mathfrak{h} = \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$. Rozważmy $H \in \langle Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, tj. $\forall \alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : (\alpha|H) = 0$, ale wtedy $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})\ \forall X\in\mathfrak{g}_\alpha : [H,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H)\triangleright X = 0$, co w połączeniu z $\forall \tilde{H} \in \mathfrak{h} : [H,\tilde{H}]_{\mathfrak{g}} = 0$ i rozkładem $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})}\mathfrak{g}_\alpha$ daje $[H,\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} = 0$, czyli $H \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. $\square$

Mamy kluczowe

Tw. 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy.

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})\ \exists\ (F_\alpha, H_\alpha, E_\alpha) \in (\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha) \setminus \{0_\mathfrak{g}\} :$$

$$[H_\alpha, E_\alpha]_\mathfrak{g} = 2E_\alpha \qquad \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} = \langle E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha \rangle_\mathbb{C}$$

$$[H_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = -2F_\alpha \qquad \wedge \qquad H_\alpha \in \langle \alpha \rangle_\mathbb{C} .$$

$$[E_\alpha, F_\alpha]_\mathfrak{g} = H_\alpha$$

Przy tym możemy wybrać $F_\alpha = E_\alpha^*$.

D: zaczniemy od

Lemat: $\forall (X, H, Y) \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha}$:

$$\left([Y, X]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, H \right) = (\alpha | H) \cdot (X | Y^*) .$$

Dowód lematu: Korzystając ze str. 18., liczymy

$$\left([Y, X]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, H \right) \equiv \left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{Y}(X) \,\middle|\, H \right) = \left(X \,\middle|\, \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{Y^*}(H) \right)$$

$$= -\left(X \,\middle|\, \mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{H}(Y^*) \right) \quad , \text{ale } Y \in \mathfrak{g}_{\alpha}$$

oznacza, że $Y^* \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ na mocy str. 24,

przeto $\left([Y, X]_{\mathfrak{g}} \,\middle|\, H \right) = -\left(X \,\middle|\, (-\alpha | H) \triangleright Y^* \right) = (\alpha | H) \cdot (X, Y^*)$. $\square$

Zastosujmy powyższy lemat do pary

$(Y, X \equiv Y^*) \in \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, a wówczas dostaniemy

$$\big([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \,|\, H\big) = (\alpha|H)\cdot \underbrace{(Y^*|Y^*)}_{= \|Y^*\|^2 \neq 0 \text{ dla } Y^* \neq 0}, \text{ zatem}$$

$Y^* \neq 0 \Leftrightarrow Y \neq 0$

$$\forall H \in \mathfrak{h}: \begin{cases} H \perp \alpha \implies [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \perp H \\ \underset{\neq 0}{H} \not\perp \alpha \implies \big([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \,|\, H\big) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \neq 0$$

Jest $\mathfrak{h} = \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp_{\mathfrak{h}}}$, widać więc, że $[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Istotnie, zważywszy $[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}_{\alpha+(-\alpha)} = \mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$,
możemy zapisać $[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} = \lambda \triangleright \alpha + \beta^i \triangleright e_i$, gdzie
$\{e_i\}$ jest pewną bazą ortonormalną w $\langle \alpha \rangle^{\perp}_{\mathbb{C}}$.
Licząc iloczyn $[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}$ z $H = \alpha$, stwierdzamy,
że $\lambda \neq 0$. Licząc iloczyn $[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}$ z $H = e_i$
natomiast, wyznaczamy $\beta^i \sim (\alpha | e_i) = 0$,
czyli – w rzeczy samej – $[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} = \lambda \triangleright \alpha \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$.

Niech teraz $H = [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}$ $(Y \neq 0)$, a wtedy (126)

$$\Big(\underbrace{[Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \,\Big|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}}}_{\neq 0} \Big) = \big(\alpha \,|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \big) \cdot \underbrace{\big(Y^* | Y^* \big)}_{\neq 0},$$

przeto

$$\big(\alpha \,|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \big) = \frac{\overbrace{\big([Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \,|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}} \big)}^{\in \mathbb{R}_{>0}}}{\underbrace{\big(Y^* | Y^* \big)}_{\in \mathbb{R}_{>0}}} > 0$$

Możemy zatem zdefiniować

– dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ i $N_{\alpha, Y} := \frac{\overbrace{(\alpha \,|\, [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}})}^{}}{2} \in \mathbb{R}$ –

$$E_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha, Y}}} \triangleright \overset{\in \mathfrak{g}_\alpha}{Y}; \quad F_\alpha := \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha, Y}}} \triangleright \overset{\in \mathfrak{g}_{-\alpha}}{Y^*}; \quad H_\alpha := \frac{1}{N_{\alpha, Y}} \triangleright [Y, Y^*]_{\mathfrak{g}},$$

a wtedy $(\alpha|H) = \frac{2}{(\alpha|H)} \triangleright (\alpha|H) = 2$

i stąd $[H_\alpha, E_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 2E_\alpha$, $[H_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = -2F_\alpha$

oraz $[E_\alpha, F_\alpha]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{N_{\alpha,Y}}[Y, Y^*] \equiv H_\alpha$,

zatem – w istocie – spełnione są relacje z tezy Twierdzenia. □

NB. Zauważmy przy okazji, że z równości $(\alpha|H_\alpha) = 2$ w połączeniu z ustaloną przynależnością $H_\alpha \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$, czyli $H_\alpha = h_\alpha \triangleright \alpha$, wynika $2 = (\alpha|H_\alpha) = (\alpha|h_\alpha \triangleright \alpha) = h_\alpha \cdot (\alpha|\alpha)$, tj.

$$\boxed{H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \cdot \alpha}$$

<u>Def.</u> <u>20</u> Niech $\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$. Wówczas

$$H_\alpha = \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \cdot \alpha \in \mathfrak{h}$$

określony mianem <u>KOPIERWIASTKA</u> stowarzyszonego z pierwiastkiem α.

Zajmiemy się obecnie reprezentacją podalgebry $sl(2;\mathbb{C})_{(\alpha)} < \mathfrak{g}$ otrzymaną przez ograniczenie reprezentacji dołączonej ad.

Mamy kluczowe

<u>Tw. 6.</u> W dotychczasowym zapisie

$$\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : (1)\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \left(\lambda \triangleright \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \Rightarrow \lambda \in \{-1,1\} \right)$$

$$(2)\ \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1 .$$

D: W ramach przygotowań do dowodu (130) tezy zasadniczej wygodnie będzie rozpatrzeć najpierw

Lemat: W powyższych oznaczeniach
$$|\lambda| > 1 \Longrightarrow \lambda \in \{-2, 2\}.$$

Dowód Lematu: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_{\lambda \triangleright \alpha} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy
$$[H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} = (\lambda \triangleright \alpha | H_\alpha) \triangleright X = \bar{\lambda} \cdot (\alpha | H_\alpha) \triangleright X$$
$$= \bar{\lambda} \cdot \left(\alpha \middle| \frac{2}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright X = 2\bar{\lambda} \triangleright X,$$

czyli $2\lambda \in \operatorname{Sp} H_\alpha$. Tymczasem

Tw. [ćwiczenie] W dowolnej (∞-wym.) reprezentacji (V, ϱ) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ zachodzi

(i) $\operatorname{Sp} \varrho(H) \subset \mathbb{Z}$

(ii) $n \in \operatorname{Sp} \varrho(H) \Rightarrow \{-|n|, -|n|+2, -|n|+4, \ldots, |n|\} \subset \operatorname{Sp} \varrho(H)$.

zatem $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, czyli $\exists N \in \mathbb{Z} : \lambda = \frac{N}{2}$. Ale też dla dowolnego $Y \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0_\mathfrak{g}\}$ dostajemy

$$[H_{\lambda \triangleright \alpha}, Y] = (\alpha | H_{\lambda \triangleright \alpha}) \triangleright Y = \left(\alpha \middle| \frac{2\lambda}{\lambda^2 (\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha\right) \triangleright Y = \frac{2}{\lambda} \triangleright Y,$$

wzięto także $\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{N} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tj.

$N \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}$, a skoro $|\lambda| > 1$,

$= \frac{|N|}{2}$

to w istocie $N \in \{-4,4\}$, czyli $\lambda \in \{-2,2\}$. □

Wracamy do dowodu tezy poprzedniej...

Wykorzystując skończoność wymiaru $\mathfrak{g}$, konstatujemy istnienie najmniejszej (ciężarowej) krotności α w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ a następnie odnosimy do tego pierwiastka

tego Lematu, by wywnioskować, że (B3)
jedyne skalarne krotności (tego minimalnego)
α w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$ to $\pm\alpha$ i - ewentualnie - $\pm 2\alpha$.

Rozważmy następnie

$$\mathfrak{s}_\alpha := \langle E_\alpha, F_\alpha \overset{\text{wybór}}{\equiv} E_\alpha^*, H_\alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

i niech $V_\alpha := \langle H_\alpha \rangle \oplus \bigoplus_{\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}$

Łatwo przekonujemy się, że V_α jest
podalgebrą Liego $\mathfrak{g}$. Istotnie, po pierwsze

1° NIE-PRZECIWNE PIERWIASTKI : (WYNIK $\notin \mathfrak{t}$)

$$\forall\, \beta_1, \underset{\neq -\beta_1}{\beta_2} \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}} : [\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\beta_1+\beta_2}, \qquad (134)$$

$$\Downarrow$$

ale $\beta_1+\beta_2 \in \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$, więc $[\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}] \subset \bigoplus_{\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_\beta$. ✓

2° PRZECIWNE PIERWIASTKI: Niech teraz $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$.

Lemat ze str. 123 implikuje dla $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$, że dowolny element $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{t}$ jest prostopadły do każdego elementu $\mathfrak{t}$ prostopadłego do β, czyli sam jest skalarną wielokrotnością β, więc też α, zatem – koniec końców – takie H_α. Uważać też...

$\forall X \in \mathfrak{g}_\beta : [H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} \in \langle X \rangle_{\mathbb{C}}$, co przeczy

o słuszności naszej konkluzji.

Skoro jednak $V_\alpha \, (\supset \mathfrak{s}_\alpha)$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$, to $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(V_\alpha) \subset V_\alpha$. Jest

tez $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(\mathfrak{s}_\alpha) \subset \mathfrak{s}_\alpha$ (BO TO $\cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{(\alpha)} \subset \mathfrak{g}$). Zauważmy, że

$(E_\alpha^*, F_\alpha^*, H_\alpha^*) = (F_\alpha, E_\alpha, H_\alpha)$ (wszak

$H_\alpha = \overbrace{\frac{2}{(\alpha|\alpha)}}^{\in \mathbb{R}_{>0}} \triangleright \alpha$, $\alpha \in I \otimes i$), czyli $\mathfrak{s}_\alpha^* \subset \mathfrak{s}_\alpha$, stwierdzamy w świetle str. 18,

że w rozkładzie

$$V_\alpha = s_\alpha \oplus s_\alpha^{\perp}$$

jest $ad_{s_\alpha}(s_\alpha) \subset s_\alpha$ oraz $ad_{s_\alpha}(s_\alpha^{\perp}) \subset s_\alpha^{\perp}$,

gdyż $X \in s_\alpha^{\perp}$ implikuje

$$(ad_{s_\alpha}(X) \mid s_\alpha) = (X \mid ad_{s_\alpha}^{*}(s_\alpha)) \subset (X \mid ad_{s_\alpha}(s_\alpha))$$

$$\subset (X \mid s_\alpha) = 0.$$

Ponieważ jednak $\beta \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) \cap \langle \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$ są postaci $\beta \in \{\mp\alpha, \mp 2\cdot\alpha\}$, przeto

$$\mathrm{Sp}\left(\mathrm{ad}_{H_\alpha}\restriction_{V_\alpha}\right) \subset \{0, \mp(\alpha|H_\alpha), \mp 2(\alpha|H_\alpha)\}$$

$$\equiv \{0, \pm 2, \pm 4\} \subset 2\mathbb{Z} \;!$$

(137)

Załóżmy, że $s_\alpha^\perp \neq \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$s_\alpha^\perp \ni X \;:\; \mathrm{ad}_{H_\alpha}(X) = \lambda \cdot X, \quad \lambda \in \{0, \pm 2, \pm 4\}$,

$\equiv$ rep $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$

więc jako przestrzeń s_α-niezmiennicza, koniecznie zawiera wektor, $\ker \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\alpha$ stowarzyszony

$\underline{0}$ ✓ ; $-2, -2+2=\underline{0}$ ✓, $-2+4=2$; $-4, -4+2=-2, -4+4=\underline{0}, -4+6=2, -4+8=4$ ✓

z wartością własną 0. Jednakowoż jedynym takim wektorem jest

czyli ten wektor $H_\alpha \in S_\alpha^\perp \cap S_\alpha = \{0\}$, tj. $H_\alpha = 0$ ↯

$H_\alpha \in S_\alpha \perp S_\alpha^\perp$, zatem $S_\alpha^\perp = \{0_g\}$,

co zaś oznacza, że $V_\alpha = S_\alpha$, skąd teza. □

Przyjrzyjmy się teraz geometrii $Q(g;T_c)$ (w duchu Kleina). W tym celu wprowadźmy ...

Def. 21. Przyjmijmy dotychczasowe oznaczenia. Z dowolnym pierwiastkiem $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ stowarzyszony endomorfizm

$$w_\alpha : \mathfrak{t}\circlearrowleft : H \longmapsto H - 2\cdot\frac{(\alpha|H)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha .$$

GRUPA WEYLA $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to grupa wolna generowana przez w_α,

$$W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) := \langle\, w_\alpha \mid \alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) \,\rangle .$$

Zauważmy, że element $H \in \mathcal{F}\otimes i$, (140)

zachodzi — w świetle Stw. 23 (str. 118)

i rzeczywistości $(\cdot|\cdot)$ na K (str. 79) —

relacja $w_\alpha(H) = \underset{\mathcal{F}\otimes i}{\underset{\uparrow}{H}} - 2\underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\frac{\overbrace{(\alpha|H)}^{\in\mathbb{R}}}{(\alpha|\alpha)}}} \triangleright \underset{\mathcal{F}\otimes i}{\underset{\uparrow}{\alpha}} \in \mathcal{F}\otimes i.$

nad R!!!

Jako endomorfizm $\mathcal{F}\otimes i$ odwzorowanie

to jest odbiciem w hiperpłaszczyźnie

ortogonalnej do α, tj. $w_\alpha(H) = \begin{cases} H & \text{dla } H \perp \alpha \\ -H & \text{dla } H \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \end{cases}$

Odbicie to określamy mianem **ODBICIA WEYLA**. Rzecz jasna odbicie jest izometrią $(\cdot|\cdot)$, $\mathfrak{t}$. to jest przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa

$$W \subset O\left(\mathfrak{t}\otimes i, (\cdot|\cdot)\big|_{\mathfrak{t}\otimes i \times \mathfrak{t}\otimes i}\right)$$ nie $\mathbb{C}$-lin..!

Bez trudu dowodzimy nad $\mathbb{R}$!!!

Tw. 7 $\forall w \in W(\mathfrak{g};\mathfrak{t}) : w(Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})) \subset Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$

<u>D</u>: Zdefiniujmy <u>auto</u>morfizm $\mathfrak{g}$ wzorem (dla dowolnego $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$):

$$S_\alpha := \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{X_\alpha})$$

(z którego odczytujemy $S_\alpha^{-1} = \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha}) \circ \exp(\mathrm{ad}_{Y_\alpha}) \circ \exp(-\mathrm{ad}_{X_\alpha})$).

Dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$ o własności $H \perp \alpha$ zachodzi $[X_\alpha, H] = 0 = [Y_\alpha, H]$, a zatem także

$$\underbrace{[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_H]}_{=\mathrm{ad}_{[X_\alpha,H]}} = \underbrace{0}_{=\mathrm{ad}_0} = \underbrace{[\mathrm{ad}_{Y_\alpha}, \mathrm{ad}_H]}_{=\mathrm{ad}_{[Y_\alpha,H]}},$$

przeto – w tym przypadku –

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_H .$$

W bezpośrednim rachunku (ćwiczenie!) sprawdzamy dalej, że

$$S_\alpha \circ \mathrm{ad}_{H_\alpha} \circ S_\alpha^{-1} = -\mathrm{ad}_{H_\alpha} ,$$ zatem w sumie – wobec liniowości ad. i rozkładu $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$

$$\forall H \in \mathfrak{h} : S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1} = \mathrm{ad}_{W_\alpha(H)} .$$

Niechaj teraz $\beta \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$ i $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$, a wtedy

$$[H, S_\alpha^{-1}(X)]_{\mathfrak{g}} \equiv \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1}(X) = S_\alpha^{-1} \circ (S_\alpha \circ \mathrm{ad}_H \circ S_\alpha^{-1})(X)$$

$$= S_\alpha^{-1} \circ \mathrm{ad}_{w_\alpha(H)}(X) \equiv S_\alpha^{-1}\big([\underbrace{w_\alpha(H)}_{\in\mathfrak{h}}, \underbrace{X}_{\in\mathfrak{g}_\beta}]_{\mathfrak{g}}\big)$$

$$= \big(\beta \,|\, w_\alpha(H)\big) \triangleright S_\alpha^{-1}(X) \equiv \big(w_\alpha(w_\alpha^{-1}(\beta)) \,|\, w_\alpha(H)\big) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$$

Ale w_α jest $\mathbb{C}$-liniowe, zatem jest izometrią na całym $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, przeto $[H, S_\alpha^{-1}(X)] = (w_\alpha^{-1}(\beta) \,|\, H) \triangleright S_\alpha^{-1}(X)$, skąd wniosek,

w_α jest odbiciem $\Rightarrow w_\alpha^2 = id_\pi$

je $w_\alpha^{-1}(\beta) = w_\alpha(\beta) \in Q(g;\mathbb{T})$ jest pierwiastkiem (145)

o wektorze pierwiastkowym $S_\alpha^{-1}(X)\ (\neq 0)$.

Skoro zaś generatory zachowują $Q(g;\mathbb{T})$,

to $W(g;\mathbb{T})$ – także. $\square$

W istocie – wobec odwracalności w_α –

$$W(g;\mathbb{T}) \subset G_{Q(g;\mathbb{T})},$$ co wyrażnie

<u>Stw. 25.</u> $|W(g;\mathbb{T})| < \infty$ (grupa skończona)

D: Wynika to wprost z $|Q(g;\mathbb{T})| < \infty$ ($\Leftarrow \dim_{\mathbb{C}} g < \infty$) $\square$

Zanim poddamy dotychczasowe rozważania przydatnej abstrakcji, udogodnimy język

Stw. 26.

$$\forall \alpha, \beta \in Q(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) : \; 2\,\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \equiv (\beta|H_\alpha) \in \mathbb{Z} .$$

Liczby $A_{\alpha,\beta} := 2\,\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ nazywamy LICZBAMI CARTANA.

D: Niechaj $X \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ (wektor 147

pierwiastkowy), a wówczas

$$[H_\alpha, X]_{\mathfrak{g}} = \underbrace{(\beta|H_\alpha) \triangleright X}_{\equiv A_{\alpha,\beta} \triangleright X},$$

zatem $A_{\alpha,\beta}$

jest wartością własną H_α w reprezentacji (dołączonej) algebry $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_{(\alpha)}$ na $\mathfrak{g}$.

Teza jest teraz konsekwencją Tw. [ów. jego ? ...] (:) (str. 131). □

Powyższy wynik ma prostą geometryczną interpretację:

Rzut prostopadły $\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha$ pierwiastka β na $\langle\alpha\rangle_{\mathbb{C}}$ jest $\frac{\mathbb{Z}}{2}$-krotnością α.

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{W_\alpha(\beta) - \beta}_{= -2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} \triangleright \alpha = -A_{\alpha\beta} \triangleright \alpha} \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{Z}}.$$