Wykład XI

2022/23

Podsumujemy obecnie dotychczasowe ustalenia dotyczące $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ ...

Tw. 8. $R \equiv Q(\mathfrak{g};\mathfrak{t})$ to skończony podzbiór niezwyrodniałej $\mathbb{R}$-liniowej przestrzeni kwadratowej $(E \equiv \mathfrak{t}\otimes i\,,\,(\cdot|\cdot)\restriction_{E\times E})$ o własnościach

(1) $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$

(2) $\forall_{\alpha\in R}\ \forall_{\lambda\in\mathbb{R}} : \left(\lambda \triangleright \alpha \in R \Longrightarrow \lambda \in \{-1,1\}\right)$

(3) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : w_\alpha(\beta) \in R$

(4) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$

Abstrakcja :

Def. 22. SYSTEM PIERWIASTKOWY

to para $((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R)$ złożona z:

- $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)\in \mathrm{Ob}\,\square\mathrm{Vect}^{<\infty}_{\mathbb{R}}$, niezerowymiarowa
- $R\subset E$ – podzbiór PIERWIASTKÓW

o własnościach: (SP1) $E=\langle R\rangle_{\mathbb{R}}$

(SP2) $\forall_{\alpha\in R}\ \forall_{\lambda\in\mathbb{R}} : \left(\lambda\triangleright\alpha\in R \Rightarrow \lambda\in\{-1,1\}\right)$

(SP3) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : \ W_\alpha(\beta):=\beta-2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\triangleright\alpha\in R$ ODBICIE WEYLA

(SP4) $\forall_{\alpha,\beta\in R} : \ A_{\alpha\beta}:=2\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

Przy tym $\dim_{\mathbb{R}}E$ nazywamy RZĘDEM SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO

Podgrupa skończona $W((E,\langle\cdot|\cdot\rangle),R) := \langle w_\alpha \mid \alpha\in R\rangle \subset O(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ 151

określony mianem **GRUPY WEYLA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO** G_R

MORFIZM SYSTEMÓW PIERWIASTKOWYCH $((E_A,\langle\cdot|\cdot\rangle_A),R_A)$, $A\in\{1,2\}$

to $\chi\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1,E_2)$ o własnościach

(MSP1) $\chi(R_1)\subset R_2$

(MSP2) $\forall_{\alpha\in R_1}: \ \chi\circ\hat{w}^1_\alpha = \hat{w}^2_{\chi(\alpha)}\circ\chi$

dla rozszerzenia $\hat{w}^A_\alpha$ odbicia Weyla do E_A.

System pierwiastkowy nazywamy **PRZYWIEDLNYM**, ilekroć

(152)

$$\exists\, \underset{\neq 0}{E_1},\, \underset{\neq 0}{E_2} \subset E : \Big(E \simeq E_1 \oplus E_2 \;\wedge\; \forall \alpha \in R : \alpha \in E_1 \,\veebar\, \alpha \in E_2 \Big)$$

← ortog!

W przeciwnym razie mówimy o **NIEPRZYWIEDLNYM SYSTEMIE PIERWIASTKOWYM**.

W dalszej części będziemy analizować anatomię systemów pierwiastkowych. Przedtem jednak zbadamy dokładniej relację między algebrami półprostymi i prostymi:

W ramach przypomnień terminologicznych

Str. 27. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą a.L.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \text{ - prosta } \cancel{\Longrightarrow} \ \mathfrak{g} \text{ - prosta}.$$

D: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ - prosta $\overset{\text{ex}}{\underset{\text{def}}{\Longrightarrow}} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \geqslant 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \geqslant 2$. ✓

Ponadto jeśli $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ jest nietrywialnym ideałem $\Longrightarrow \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — " —

— " — ↯ $\square$

Mamy kluczowe

<u>Tw. 9.</u> Niechaj K będzie zwartą grupą Liego o algebrze Liego $\mathrm{Lie}\,K \equiv \mathfrak{k}$. Jeśli $\mathfrak{k}$ jest prosta, to $\underset{\equiv \mathfrak{g}}{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}$ jest prosta (jako $\mathbb{C}$-algebra).

<u>D:</u> W pierwszej kolejności musimy przeformułować pojęcie struktury $\mathbb{C}$-liniowej.

<u>Lemat 1.</u> Niechaj V będzie grupą przemienną. Wówczas poniższe zdania są równoważne:

(C1) Na V jest określone działanie $\mathbb{C}$, które czyni z niej przestrzeń $\mathbb{C}$-liniową.

(C2) — " — — " — $\mathbb{R}$ — " — $\mathbb{R}$-liniową, a mianowicie $\exists\, I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \;:\; I \circ I = -\mathrm{id}_V$. (155)

Endomorfizm taki nazywany mianem STRUKTURY ZESPOLONEJ na V.

DL 1.: (C1) $\Rightarrow$ (C2) Działanie $\mathbb{C}$ indukuje działanie $\mathbb{R}$ poprzez $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r, 0)$.

Mamy tej $I = (0,1) \triangleright$.

(C2) $\Rightarrow$ (C1) Działanie $\mathbb{R}$ wraz z I indukuje

$$\mathbb{C} \times V \to V : ((x,y), v) \mapsto x \triangleright v + I(y \triangleright v).$$

$\square$

Powyższy wynik uogólnia się prosto (456) do kategorii algebr Liego:

Lemat 2. Algebra Liego nad $\mathbb{R}$ $\left(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\right)$ jest algebrą Liego nad $\mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow$

$$\exists \underbrace{I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})}_{\text{STRUKTURA ZESPOLONA}} : \left(I \circ I = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \ \wedge \ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ \left(I \times \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right) = I \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \mathfrak{h} \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{C}},\ \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) :$$

$$\left(\exists\, \chi^{-1} \ \wedge \ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}} \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}} \right).$$

Dł 2: Proste ćwiczenie.

<u>Lemat</u>. Niech K będzie zwartą grupą Liego o <u>nieprzemiennej</u> algebrze Liego $\mathfrak{k}$. Wówczas na $\mathfrak{k}$ <u>nie istnieje</u> struktura zespolona.

<u>Dl</u>: Załóżmy, przeciwnie, że $I \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$ jest strukturą zespoloną. Wówczas ad_X, $X \in \mathfrak{k}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Istotnie,

$$\forall Y \in \mathfrak{k}: \quad ad_X \circ I(Y) = [X, I(Y)]$$

$$= -[I(Y), X] = -I([Y,X]) = I([X,Y]) = I \circ ad_X(Y).$$

Ale w świetle konstruktywnego dowodu Stw. 18. na $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ istnieje niezmiennicza struktura hermitowska, względem której $ad^{\mathbb{C}}_X$ jest skośnie hermitowski, zatem diagonalizowalny z $\mathrm{Sp}\, ad^{\mathbb{C}}_X \subset i\mathbb{R}$, o ile więc wybierzemy $X \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$, dostaniemy $\mathrm{Sp}\, ad^{\mathbb{C}}_X \neq \{0\}$, czyli $ad^{\mathbb{C}}_X$ <u>NIE</u> jest nilpotentny, co oznacza, że

ad_X nie jest nilpotentny.

Przechodząc do $(\mathbb{K}, \mathbb{I})$, stwierdzamy, że $ad_X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{K})$ jako operator NIE-nilpotentny ma niezerową wartość własną $\lambda = (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Istnieje zatem $V \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$[X, V] \equiv ad_X(V) = \lambda \triangleright V \equiv a \triangleright V + b \triangleright \mathbb{I}(V)$$

Rozważmy $\tilde{X} := \bar{\lambda} \triangleright X \equiv a \triangleright X - b \triangleright I(X)$. (160)

Zachodzi $[\tilde{X}, V] \equiv [\bar{\lambda} \triangleright X, V] = \bar{\lambda} \triangleright [X, V]$

$$= \bar{\lambda} \triangleright (\lambda \triangleright V) = |\lambda|^2 \triangleright V.$$

Ale $\mathrm{ad}_{\tilde{X}}$ jest skośnie symetryczny względem struktury hermitowskiej (rzeczywistej) na $\mathbb{K}$, zatem

$$|\lambda|^2 (V|V) \equiv (\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V)|V) = -(V|\mathrm{ad}_{\tilde{X}}(V))$$

$$= -|\lambda|^2 (V|V) \Rightarrow (V = 0 \vee \lambda = 0) \; \lightning \; \square$$

Możemy już teraz przystąpić do dowodu

Twierdzenie...

Po pierwsze zauważmy, że $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, bo w przeciwnym razie $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) - \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^* \neq 0$, bo inaczej $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k}\otimes 1$ – <u>nie</u> jest $\mathbb{C}$-podprzestrzenią

$\subset \mathfrak{g} - \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{k}\otimes 1$ byłoby centrum $\mathfrak{k}(\otimes 1)$ ↯ (wzgl. $\mathfrak{k}$ proste).

Po drugie: załóżmy, przeciwnie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ <u>NIE</u> jest proste, tj. – skoro jest półproste – istnieją <u>przynajmniej</u> dwie podalgebry proste $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}$, $j \in \overline{1,N}$, $N \geq 2$

o własności $\mathfrak{g} \cong \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{g}_j$.

W świetle Tw. 3 rozkład powyższy jest jedyny z dokładnością do permutacji składników. Ale też $\mathfrak{g}$ rozkłada się na sumę prostą podalgebr $\overline{\mathfrak{g}}_j$, gdzie $\overline{X_1\otimes 1 + X_2\otimes i} = X_1\otimes 1 - X_2\otimes i$. Istotnie, „sprzężenie" (skośnie $\mathbb{C}$-liniowe) $\overline{\cdot} : \mathfrak{g} \circlearrowleft$ zachowuje nawias Liego,

$$\overline{[X,Y]_{\mathfrak{g}}} = \overline{[X_1\otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}} + i\triangleright [X_2\otimes 1, Y]_{\mathfrak{g}}}$$

$$= [X_1\otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} - i\triangleright [X_2\otimes 1, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}},$$

zatem $\bar{g}_j$ spełniają te same relacje co g_j. Wobec powyższego

$\forall j\in\overline{1,N}\ \exists k\in\overline{1,N}: \bar{g}_j = g_k$.

Przypuśćmy, że $\exists j\in\overline{1,N}: \bar{g}_j = g_j$.

Wówczas $\forall X\in g_j: X+\bar{X}\in g_j\cap k$ i $g_j\cap k$

$[Y\otimes 1, X+\bar{X}]_g = [Y\otimes 1, X]_g + [Y\otimes 1, \bar{X}] = \underbrace{[Y\otimes 1, X]_g}_{\in g_j} + \overline{[Y\otimes 1, X]_g}$

jest $\neq 0$ ideałem w k. Ale $g_j\cap k\neq k$, ideał!

bo w p.p. $g_j = (g_j\cap k)^{\mathbb{C}} = k^{\mathbb{C}} = g$.

$= 0$ dla każdego $X = x\otimes i$ $\forall x\in g_j$, a to <u>nie</u> jest $\mathbb{C}$-podprz.!

W takim razie $\mathfrak{g}_j \cap K$ jest nietrywialnym ideałem w K. ↯
(wszak K – prosta)

Wniosek: $\neg \exists\, j \in \overline{1,N} : \overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_j$.

Niech zaś $j, k \in \overline{1,N}$, $j \neq k$: $\overline{\mathfrak{g}_j} = \mathfrak{g}_k$, a wtedy
$(\mathfrak{g}_j \oplus \mathfrak{g}_k) \cap K \subset K$ jest niezerowym ideałem,
który wobec prostoty K jest tożsamy z K.
Stąd jednak wniosek: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_j \oplus \overline{\mathfrak{g}_j}$.

Mamy zatem <u>dwie</u> podalgebry proste, wzajem „sprzężone", $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_2 = \overline{\mathfrak{g}_1}$.

Zdefiniujmy następnie odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe:

$$\chi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \underset{\cong\, \mathfrak{k}\otimes 1}{\mathfrak{k}} : X \longmapsto X + \overline{X} .$$

Wobec $\overline{X} \in \overline{\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{g}_2$ jest $[Y, \overline{X}]_{\mathfrak{g}} = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}_1$, przeto

$$[\chi(X), \chi(Y)]_{\mathfrak{g}} \equiv [X + \overline{X}, Y + \overline{Y}]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{g}} + [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{g}}$$

$$= [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \overline{[X,Y]_{\mathfrak{g}}} \equiv \chi([X,Y]_{\mathfrak{g}}).$$

Czyli typ X jest mono, gdyż

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_1}}{X} + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathfrak{g}_2}}{\overline{X}} = 0 \iff X = 0 \quad \text{wobec } \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}.$$

Rachunek wymiarów (rzeczywistych)

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \geq \dim_{\mathbb{R}} K$$

pokazuje, że X jest izo, zatem w świetle Lematu 2. K ma strukturę zespoloną, co stoi w sprzeczności z Lematem 3. $\square$

Możemy wreszcie sformułować

Tw. 10. Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą a.L. o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$ i niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie podalgebrą Cartana $\mathfrak{g}$ stowarzyszoną z maksymalną podalgebrą przemienną $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$. Wówczas $\mathfrak{g}$ *nie* jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{h}$ rozkłada się na ortogonalną sumę prostą podprzestrzeni

$$\mathfrak{h} = \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_1} \oplus \underset{\neq 0}{\mathfrak{h}_2}$$

o własności

$$\forall \alpha \in R(\mathfrak{g};\mathfrak{h}) : \left(\alpha \in \mathfrak{h}_1 \ \underline{\vee}\ \alpha \in \mathfrak{h}_2\right).$$

D: $\boxed{\Rightarrow}$ Załóżmy najpierw, że $\mathfrak{g}$ <u>nie</u> jest proste, więc też – w świetle Tw. 9 – $\mathfrak{k}$ nie jest proste. Istnieje zatem nietrywialny ideał $\mathfrak{k}_1 \subsetneq \mathfrak{k}$. W świetle adaptacji dowodu $\circledast$ Stw. 19 i przy dotychczasowym wyborze iloczynu skalarnego na $\mathfrak{k}$ (Ad_K-niezmienniczego) stwierdzamy, że także $\mathfrak{k}_1^\perp$ jest ideałem w $\mathfrak{k}$, czyli

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \,, \quad \mathfrak{k}_2 \equiv \mathfrak{k}_1^\perp \,,$$

a zatem $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{k}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \,.$

⊛ Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ ideał $\iff [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}$
(dla $\mathbb{R}$-algebry Liego)

Oczywiście jako przestrzenie $\mathbb{R}$-lin.: $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.

Niech $X \in \mathfrak{h}^{\perp} \iff (X \mid \mathfrak{h}) = \{0\}$, ale wtedy

$$\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}(X) \mid \mathfrak{h}\right) = -\left(X \mid \mathrm{ad}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h})\right) \subset (X \mid \mathfrak{h}) = \{0\},$$

czyli $[\mathfrak{k}, \mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}^{\perp} \implies [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}^{\perp}$

$$\underbrace{[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}}}_{\substack{\parallel \text{ ale też} \\ -[\mathfrak{h}^{\perp}, \mathfrak{h}]_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{h}}} \subset \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{h} = \{0\},$$

czyli $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}]_{\mathfrak{k}} = \{0\} \implies \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ jako A.L.

Niechaj $\mathfrak{t}$ będzie maksymalną podalgebrą przemienną w $\mathfrak{k}$. Pokażemy, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$, gdzie $\mathfrak{t}_A \subset \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$. Przypuśćmy, że $H = X_1 + X_2$, $\widetilde{H} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \mathfrak{t}$, gdzie $X_A, \widetilde{X}_A \in \mathfrak{k}_A$, $A \in \{1,2\}$. Wówczas

$$0 = [H, \widetilde{H}]_{\mathfrak{k}} = \underbrace{[X_1, \widetilde{X}_1]_{\mathfrak{k}}}_{\in \mathfrak{k}_1} + \underbrace{[X_2, \widetilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}}_{\in \mathfrak{k}_2}$$

(wszak $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2]_{\mathfrak{k}} = 0$), zatem $[X_1, \widetilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}} = [X_2, \widetilde{X}_2]_{\mathfrak{k}}$, a w takim razie $[X_1, \widetilde{H}]_{\mathfrak{k}} = [X_1, \widetilde{X}_1]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$, czyli $[X_1, \mathfrak{t}]_{\mathfrak{k}} = 0_{\mathfrak{k}}$,

co wobec niezmienniczości $\mathfrak{t}$ oznacza, że (170)
$X_1 \in \mathfrak{t}$. Analogicznie pokazujemy, że $X_2 \in \mathfrak{t}$.
To jednak oznacza, że $\mathfrak{t} = \underbrace{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)}_{\shortparallel\, \mathfrak{t}_1} \oplus \underbrace{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_2)}_{\shortparallel\, \mathfrak{t}_2}$,
a zatem także $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_2^{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

Dla dowolnych $\alpha \in Q(\underset{\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{g}_1}; \underset{\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}}{\mathfrak{h}_1})$ i $X \in \mathfrak{g}_{1\alpha}$ oraz $\underset{\mathfrak{h}}{H} = \underset{\mathfrak{h}_1}{H_1} + \underset{\mathfrak{h}_2}{H_2}$ obliczamy

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$

$$[H, X]_{\mathfrak{g}} = [H_1, X]_{\mathfrak{g}} + \overbrace{[\underset{\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2}{H_2}, \underset{\mathfrak{g}_1}{X}]_{\mathfrak{g}}}^{=0} = [H_1, X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha | H_1) \triangleright X$$

$\mathfrak{h}_2 \cong \mathfrak{t}_2 \otimes \mathbb{C}$, $\perp$, $\alpha \in \mathfrak{t}_1 \otimes i$

$$\equiv (\alpha | H) \triangleright X \quad \left(\begin{array}{c} \text{wynika} \\ \alpha \perp \mathfrak{h}_2 \end{array}\right),$$

a stąd wniosek, że także $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $\alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$.

Analogicznie dowodzimy, że każdy $\beta \in Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{T}_2)$ jest też w $Q(\mathfrak{g};\mathfrak{T})$.

Pokażemy, że każdy $\alpha \in Q(\mathfrak{g};\mathfrak{T})$ jest albo w $Q(\mathfrak{g}_1;\mathfrak{T}_1)$, albo w $Q(\mathfrak{g}_2;\mathfrak{T}_2)$. Niech $X = \underset{\mathfrak{g}_1}{\underset{\cap}{X_1}} + \underset{\mathfrak{g}_2}{\underset{\cap}{X_2}} \in \mathfrak{g}_\alpha$ i niech $H_1 \in \mathfrak{T}_1$, a wtedy

$$\underset{\mathfrak{g}_1}{\underset{\cap}{[H_1,X_1]_{\mathfrak{g}}}} \equiv [H_1,X_1]_{\mathfrak{g}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{[H_1,X_2]_{\mathfrak{g}}}} = [H_1,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_1) \triangleright X$$

$$\equiv \underset{\mathfrak{g}_1}{\underset{\cap}{(\alpha|H_1) \triangleright X_1}} + \underset{\mathfrak{g}_2}{\underset{\cap}{(\alpha|H_1) \triangleright X_2}}\,,$$

przeto albo $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, albo $(\alpha|H_1) = 0$, co wobec dowolności H_1 oznacza $\alpha \perp \mathfrak{T}_1$. Jeśli $X_2 = 0_{\mathfrak{g}}$, to $\forall H_2 \in \mathfrak{T}_2 : 0_{\mathfrak{g}} = [H_2,X_1]_{\mathfrak{g}} \overset{X_2=0_{\mathfrak{g}}}{\equiv} [H_2,X]_{\mathfrak{g}} = (\alpha|H_2) \triangleright X$, czyli $\alpha \perp \mathfrak{T}_2$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_1$, wtedy jednak $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_1; \mathfrak{t}_1)$. (172)

W przeciwnym razie (gdy $\mathfrak{t}_2 \neq 0_{\mathfrak{g}}$), $\alpha \perp \mathfrak{t}_1$, czyli $\alpha \in \mathfrak{t}_2$, co implikuje $\alpha \in Q(\mathfrak{g}_2; \mathfrak{t}_2)$. $\boxtimes$

$\boxed{\Leftarrow}$ Przyjmijmy teraz, że $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1^{\times 0} \oplus \mathfrak{t}_2^{\times 0}$ i $\forall \alpha \in Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) : (\alpha \in \mathfrak{t}_1 \veebar \alpha \in \mathfrak{t}_2)$. Oznaczmy $R_A = Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t}) \cap \mathfrak{t}_A$, $A \in \{1,2\}$ i zdefiniujmy $\mathfrak{g}_A := \mathfrak{t}_A \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_A} \mathfrak{g}_\alpha$, $A \in \{1,2\}$, a wtedy

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako przestrzeni $\mathbb{C}$-lin.!, ale też $\begin{cases} \forall \alpha \in R_2 : [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = (\alpha | \mathfrak{t}_1) \triangleright \mathfrak{g}_\alpha = 0_{\mathfrak{g}} \\ \forall \alpha \in R_1 : [\mathfrak{t}_2, \mathfrak{g}_\alpha]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}} \end{cases}$ ($\overset{0}{\Uparrow}$ $\mathfrak{t}_2$)

i oczywiście $[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$. Ponadto $\forall \alpha_A \in R_A : [\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}]_{\mathfrak{g}} = 0_{\mathfrak{g}}$, albowiem $\alpha_1 + \alpha_2 \notin R_1 \cup R_2 \equiv Q(\mathfrak{g}; \mathfrak{t})$. Ostatecznie więc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ jako algebry Liego. $\square$