Wykład XII

2022/23

Przeprowadzimy obecnie studium abstrakcyjnego systemu pierwiastkowego... zaczniemy od elementarnego

<u>Stw. 28.</u> Niechaj (E_A, R_A), $A \in \{1,2\}$ będą systemami pierwiastkowymi. Wówczas $(E_1 \oplus E_2, R_1 \cup R_2)$,
suma prosta przestrzeni $\boxplus$! czyli $\oplus \equiv \boxplus$
gdzie $R_A \equiv j_{R_A}(R_A)$, $j_{R_A} : R_A \hookrightarrow E_A$,
$r_1 \equiv (r_1, 0)$, $r_2 \equiv (0, r_2)$
jest systemem pierwiastkowym, zwanym SUMĄ PROSTĄ systemów pierwiastkowych (E_A, R_A).

D: Jako że $E_A = \langle R_A \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto $\langle R_1 \cup R_2 \rangle_{\mathbb{R}} = E_1 \oplus E_2$, wzgl. (SP1) ✓.

(SP2) jest spełniony, gdyż R_A jest SP dla E_A.

Jeśli $\alpha, \beta \in R_A$, to $w_\alpha(\beta) \in R_A \subset R_1 \cup R_2$.

Jeśli natomiast $\alpha_A \in R_A$, to $w_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2$ i $w_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1$, bo $(\alpha_1 | \alpha_2) = 0$ w $E_1 \oplus E_2$.

W sumie więc (SP3) ✓.

Prawdziwość (SP4) wynika z tożsamości

$$A^{E_1 \oplus E_2}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} A^{E_A}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z} & \text{dla } \alpha,\beta \in R_A \\ 0 & \text{dla } \alpha \in R_1,\ \beta \in R_2 . \end{cases} \qquad \square$$

Uwagi dla wyższych klasyfikacyjnych:

Stw. 29. Niechaj $\alpha,\beta \in R$, przy czym $\beta \notin \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$, a ponadto $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$. Wówczas zachodzi dysjunkcja

$$\begin{aligned} &(1)\ \langle\alpha|\beta\rangle = 0 \\ \veebar\ &(2)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \sphericalangle(\alpha,\beta) \in \left\{\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}\right\} \\ \veebar\ &(3)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 2\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \sphericalangle(\alpha,\beta) \in \left\{\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}\right\} \\ \veebar\ &(4)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = 3\langle\beta|\beta\rangle \ \wedge\ \sphericalangle(\alpha,\beta) \in \left\{\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}\right\} \end{aligned}$$

D: Oznaczmy $n_1 := 2\frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$, $n_2 := 2\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$.

Wiemy, że $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Jest

wersory

$$n_1 \cdot n_2 = 4\frac{\langle\alpha|\beta\rangle^2}{\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle} = 4\langle\hat{\alpha}|\hat{\beta}\rangle^2 \equiv 4\cos^2\underbrace{\measuredangle(\alpha,\beta)}_{\Theta}$$

oraz

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \geqslant 1,$$ o ile $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ (założenie)

$\hookrightarrow$ p.p. $n_1 = 0 = n_2$

W takim razie $0 \leq \overset{\mathbb{Z}}{n_1 \cdot n_2} \leq 4$, czyli $n_1 \cdot n_2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

Przy tym jeśli $n_1 \cdot n_2 = 0$, to $\cos\Theta = 0$, czyli $\alpha \perp \beta$, a jeśli $n_1 \cdot n_2 = 4$, to $\cos^2\Theta = 1$, czyli $\beta \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$.

Rozważymy pozostałe przypadki :

(*) $n_1 \cdot n_2 = 1 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{4} \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$,

ale $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, więc $(n_1, n_2) \in \{(1,1), (-1,-1)\}$.

$(n_1, n_2) = (1,1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle > 0$, zatem $\theta = \frac{\pi}{3}$

$(n_1, n_2) = (-1,-1) \Rightarrow \langle\alpha|\beta\rangle < 0$, zatem $\theta = \frac{2\pi}{3}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1} = 1$, czyli $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle$.

(**) $n_1 \cdot n_2 = 2 \iff \cos^2\theta = \frac{1}{2} \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$, ale

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ i $|n_2| \geq |n_1|$ (bo $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq \langle\beta|\beta\rangle$), zatem

$(n_1, n_2) \in \{(1,2), (-1,-2)\}$, przy czym

$(n_1,n_2)=(1,2) \Longrightarrow \langle\alpha|\beta\rangle>0 \Longrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$(n_1,n_2)=(-1,-2) \Longrightarrow \langle\alpha|\beta\rangle<0 \Longrightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}$

W obu przypadkach $\frac{n_2}{n_1}=2 \Longleftrightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle=2\langle\beta|\beta\rangle$.

(***) Analogicznie jak w przypadku (**). $\square$

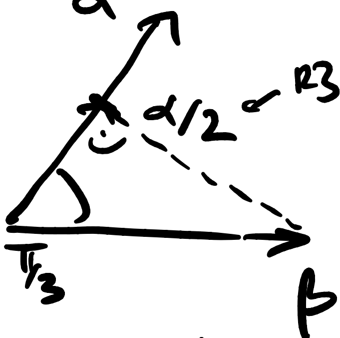
Corollarium: Niech $\alpha,\beta\in R$.

(i) $\measuredangle(\alpha,\beta)\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ (rozwarty) $\Longrightarrow \alpha+\beta\in R$

(ii) $\measuredangle(\alpha,\beta)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (ostry) $\Longrightarrow \alpha-\beta,\ \beta-\alpha\in R$.

DC: Rozważamy po kolei możliwości (1)-(4) ze str. 29, zakładając $\langle\alpha|\alpha\rangle\geq\langle\beta|\beta\rangle$.

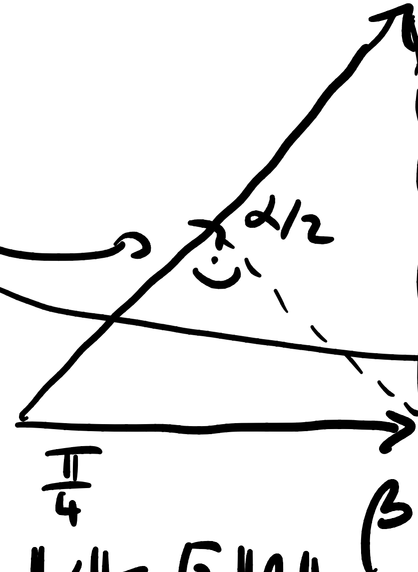
$\langle \alpha | \beta \rangle \neq 0 \implies$



$\|\alpha\| = \|\beta\|$

rzut β na α

$\vee$



$\|\alpha\| = \sqrt{2}\,\|\beta\|$

kąt ostry

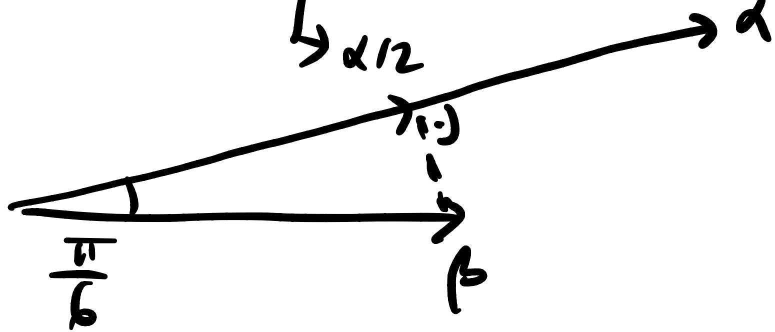
$\implies w_\alpha(\beta) = \beta - 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$

$\equiv \beta - \alpha \in R,$

a stąd także

$-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in R.$

$\vee$



Jeżeli $K(\alpha,\beta)$ rozwarty, jest $K(-\alpha,\beta)$ jest ostry i równy poprzednim wartościom, przeto

$$P^{\langle\alpha\rangle^\perp}_{\langle\alpha\rangle}(\beta) = -\frac{\alpha}{2}, \text{ a stąd } w_\alpha(\beta) = \beta - 2\cdot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha+\beta \in R.$$

$\square$

(POMINIĘTE!)

W naszych studiach systemów pierwiastkowych półprostych algebr Liego natrafiliśmy na obiekty „dualne", tj. kopierwiastki. Te wpiszemy w nasze obecne rozważania

<u>Stw. 30</u> Niechaj (E,R) będzie systemem pierwiastkowym. Wówczas $(E,R^\vee)$, gdzie $R^\vee = \left\{ \alpha^\vee = \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \triangleright \alpha \;\middle|\; \alpha \in R \right\}$

takiże jest systemem pierwiastkowym, przy czym $W(E, R^\vee) = W(E, R)$ i $(R^\vee)^\vee = R$. System ten określamy mianem **DUALNEGO SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO**, a jego elementy nazywamy **KOPIERWIASTKAMI**.

181

D: obliczamy $\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle = 4\frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle^2} = \frac{4}{\langle\alpha|\alpha\rangle}$,

zatem $(\alpha^\vee)^\vee \equiv \frac{2}{\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle} \triangleright \alpha^\vee = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{2} \cdot \frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \triangleright \alpha = \alpha$.

Ponadto $A_{\alpha^\vee, \beta^\vee} \equiv 2\frac{\langle\alpha^\vee|\beta^\vee\rangle}{\langle\alpha^\vee|\alpha^\vee\rangle} = \frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{2} \cdot \langle\frac{2}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \triangleright \alpha \,|\, \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta\rangle$

$$= \frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \equiv A_{\beta|\alpha} \in \mathbb{Z}.$$ (182)

transpozycja w macierzy Cartana

Wobec $\alpha^\vee \in \langle\alpha\rangle_{\mathbb{R}}$ mamy też $W_{\alpha^\vee} \equiv W_\alpha$,

a przy tym

$$W_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) \equiv W_\alpha\left(\frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright \beta\right) = \frac{2}{\langle\beta|\beta\rangle} \triangleright W_\alpha(\beta)$$

$$= \frac{2}{\langle W_\alpha(\beta)|W_\alpha(\beta)\rangle} \triangleright W_\alpha(\beta) \equiv W_\alpha(\beta)^\vee,$$ co ma sens,

$W_\alpha \in O(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

bo R jest zachowywana przez $W(E,R)$.

W takim razie $\forall\, w \in W(E,R^\vee) \cong W(E,R)$:
$$w(R^\vee) \subset R^\vee .$$

Przy tym $\langle \alpha^\vee \mid \alpha^\vee \in R^\vee \rangle \cong \langle \alpha \mid \alpha \in R \rangle = E$.

Wreszcie jedyne krotności $\alpha^\vee$ to te, które pochodzą od krotności α, czyli
$$(\pm\alpha)^\vee = \pm\alpha^\vee . \qquad \square$$

N.B. $\forall\, \alpha,\beta \in R : \|\alpha\| = \|\beta\| \Rightarrow R^\vee \cong R$.

Izomorfizm taki może mieć miejsce nawet gdy warunek jednakowej długości pierwiastków nie jest spełniony (morfizmy nie muszą być izometriami)

Podejście porządkujące może — rozgrywanie upowadza (184)

<u>Def. 23.</u> Niech (E, R) będzie systemem pierwiastkowym.

BAZA SYSTEMU PIERWIASTKOWEGO to podzbiór $\Delta \subset R$

o własnościach: (BSP1) Δ jest bazą E

rozkład jest jednoznaczny (BSP2) $R = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^{\setminus\{0\}} \cup \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\leq 0}}^{\setminus\{0\}}$

Pierwiastki $\alpha \in \underbrace{\langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \setminus \{0\}}_{= R_+}$ nazywamy mianem DODATNICH.

Pierwiastki $\alpha \in \underbrace{\langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \setminus \{0\}}_{= R_-}$ nazywamy mianem UJEMNYCH.

Elementy Δ nazywamy DODATNIMI PIERWIASTKAMI PROSTYMI.

W dalszej części wykładu zakładamy geometrię bazy... oraz E i R w relacji do Δ ... 185

Str. 31. $\forall \alpha, \beta \in \Delta : \left(\alpha \neq \beta \Rightarrow \langle \alpha | \beta \rangle \leq 0 \right).$

czyli $\sphericalangle(\alpha, \beta) \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$).

D: A.a. Niech $\langle \alpha | \beta \rangle > 0$, a wtedy $\sphericalangle(\alpha,\beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

więc na mocy Corollaire $\alpha - \beta$ i $\beta - \alpha \in R$.

Jednoznaczny rozkład $\alpha - \beta$ w bazie Δ byłby jednak niezgodny z (BSP2). ↯ □

Następnie dowodzimy

Pomocniczo rozwiązujemy...

Stw. 32. $\exists\, \Pi \subset E,\ \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi = 1 : \Pi \cap R = \emptyset$.

86

D: Niechaj $\alpha \in R$ i niech $\Pi_\alpha := \langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \equiv \operatorname{Ker} \langle \alpha | \cdot \rangle$

$(\dim_{\mathbb{R}} \Pi_\alpha = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \langle \alpha | \cdot \rangle \equiv \dim_{\mathbb{R}} E - 1)$.

$|R| < \infty \Longrightarrow \exists\, h \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \Pi_\alpha$ (intuicja:

$\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} \cup \langle e_2 \rangle_{\mathbb{R}} \neq \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ dla e_1, e_2 LNZ).

Niechaj teraz $\Pi_h = \langle h \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$, a wtedy

$\alpha \in \Pi_h$ oznacza $h \in \Pi_\alpha$, co nie może zachodzić

dla $\alpha \in R$. Π_h jest poszukiwaną hiperpłaszczyzną. $\square$

Możemy użyć powyższego w

Def. 24. Niech (E,R) będzie systemem pierwiastkowym i niech $\Pi \subset E$ jak w str. 32, a wówczas $R = R^{\Pi}_{+} \sqcup R^{\Pi}_{-}$, gdzie $R^{\Pi}_{\pm}$ jest zawarty w spójnej składowej $E^{\Pi}_{\pm}$ rozkładu $E \setminus \Pi = E^{\Pi}_{+} \sqcup E^{\Pi}_{-}$.
Pierwiastek $\alpha \in R^{\Pi}_{\pm}$ nazywamy ROZKŁADALNYM, jeżeli $\exists\, \beta, \gamma \in R^{\Pi}_{\pm} : \beta + \gamma = \alpha$. W przeciwnym razie mówimy, że α jest NIEROZKŁADALNY.
Mamy włączenie ...

Tw. 11. Niechaj (E,R) będzie SP, a $\Pi \subset E$ jak w str. 32, R_+^Π też – jak w Def. 24. Wówczas zbiór nierozkładalnych elementów R_+^Π jest bazą R. I odwrotnie, dla dowolnej bazy $\Delta \subset R$ istnieje $\Pi_\Delta \subset E$: Δ jest podzbiorem nierozkładalnych elementów $R_+^{\Pi_\Delta}$ (arowyję" Π_Δ).

D: $|\Rightarrow|$ Niechaj $\Delta_\Pi \subset R_+^\Pi$ będzie zbiorem elementów nierozkładalnych. Wybrawszy $\underset{\neq 0}{h} \perp \Pi$, mamy
$$E_+^\Pi = \{ v \in E \mid \langle h | v \rangle > 0 \}.$$

Po pierwsze zauważamy, że czyli: Δ_Π generuje R^Π_+ nad $\mathbb{N}$

* $\forall \alpha \in R^\Pi_+ \ \exists \{n_\delta\}_{\delta\in\Delta_\Pi} \subset \mathbb{N} : \ \alpha = \sum_{\delta\in\Delta_\Pi} n_\delta \cdot \delta.$

Załóżmy przeciwnie i wyłączymy pozostałe elementy – oznaczmy je $N\Delta_\Pi$ – R^Π_+, dla których nie istnieje taki rozkład, i takie $\alpha \in R^\Pi_+$, który ma minimalny rzut $\langle h|\alpha\rangle$. ∃, bo $|R|<\infty$

Oczywiście $\alpha \notin \Delta_\Pi$ (bo elementy Δ_Π mają takie (trywialne) rozkłady), przeto α jest rozkładalny, $\exists\, \beta_1, \beta_2 \in R^\Pi_+ : \ \alpha = \beta_1 + \beta_2$. Przy tym gdyby oba pierwiastki β_1 i β_2 były kombinacjami elementów Δ_Π ze współczynnikami z $\mathbb{N}$, to mamy własność rozkładu α.

W takim jednak razie jeden z nich, np. β_1, należy do $N\Delta_\Pi$. Ale

$$\underset{\underset{0}{\vee}}{\langle h|\alpha\rangle} = \underset{\underset{0}{\vee}}{\langle h|\beta_1\rangle} + \underset{\underset{0}{\vee}}{\langle h|\beta_2\rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle h|\beta_1\rangle < \langle h|\alpha\rangle \quad \lightning$$

(wszak α ma minimalny rzut na h!)

** Jeśli teraz $\alpha, \beta \in \Delta_\Pi$ i $\alpha \neq \beta$, to $\langle\alpha|\beta\rangle \leq 0$ (co nie jest oczywiste na obecnym etapie, bo nie pokazaliśmy, że Δ_Π jest bazą). Istotnie, gdyby było $\langle\alpha|\beta\rangle > 0$, to $\alpha-\beta, -(\alpha-\beta) \in R$, ale w jeden (dokładnie!) $\exists$ nie należy do R^{Π}_{+}. (191)

$\alpha - \beta \in R^{\Pi}_{+} \Rightarrow \alpha = (\alpha-\beta)+\beta$ – rozkładalny ↯

$\underline{\beta - \alpha \in R^{\Pi}_{+}} \Rightarrow \beta = (\beta-\alpha)+\alpha$ – – | — ↯

Ponadto zbiór Δ_Π jest LNZ. ***

Istotnie, niech $\sum_{\alpha\in\Delta_\Pi} \lambda_\alpha \rhd \alpha = 0$ przy czym

([illegible] α $\exists$ $\lambda_\alpha \neq 0$)

$\left(\underset{\Delta^1_\Pi}{\Delta^1_\Pi} \cap \underset{\Delta^2_\Pi}{\Delta^2_\Pi} = \emptyset\right) \longrightarrow \;=\; \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi} \underbrace{|\lambda_{\alpha_1}|}_{\vee\, 0} \rhd \alpha_1 - \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_\Pi} \underbrace{|\lambda_{\alpha_2}|}_{\vee\, 0} \rhd \alpha_2$

0: zał. $\alpha_2 \in \Delta^2_\Pi$: 0

czyli $\underbrace{\sum_{\alpha_1\in\Delta^1_\Pi} |\lambda_{\alpha_1}| \rhd \alpha_1}_{\equiv\, v} = \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_\Pi} |\lambda_{\alpha_2}| \rhd \alpha_2$, a wtedy

$$\langle v|v\rangle \equiv \Big\langle \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \Big| \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2 \Big\rangle$$ 192

$$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_1}|\cdot|\lambda_{\alpha_2}|\cdot\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle \underset{**}{\leq} 0 ,$$ zatem

$v=0$, tj. $\sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 = 0 = \sum_{\alpha_2\in\Delta^2_n} |\lambda_{\alpha_2}| \triangleright \alpha_2$,

wtedy jednak $0 = \Big\langle h \Big| \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \triangleright \alpha_1 \Big\rangle$

$$= \sum_{\alpha_1\in\Delta^1_n} |\lambda_{\alpha_1}| \cdot \underbrace{\langle h|\alpha_1\rangle}_{>0 \text{ (bo } \alpha_i\in R^n_+)}$$ daje

czyli $|\lambda_{\alpha_1}| = 0$; analogicznie $|\lambda_{\alpha_2}| = 0$.

↯ (wszystkie $\lambda_{\alpha_i} \neq 0$) ↯

Skoro jednak $R^\Pi_+ \subset \langle \Delta_\Pi \rangle_{\mathbb{N}}$, to także

$\alpha \mapsto -\alpha$ zachowuje R i zmienia znak rzutu $\langle \alpha | h \rangle \mapsto -\langle \alpha | h \rangle$

$R^\Pi_- = -R^\Pi_+ \subset \langle \Delta_\Pi \rangle_{-\mathbb{N}}$, a ponieważ $E = \langle R \rangle_{\mathbb{R}}$, przeto $E = \langle \Delta_\Pi \rangle_{\mathbb{R}}$, co pociąga, że Δ_Π jest bazą E. ■

$\boxed{\Leftarrow}$ Niechaj teraz $\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ będzie bazą R, czyli też bazą E. Ustalmy (dowolne) liczby $\lambda_i > 0$, $i \in \overline{1,r}$ i odpowiadający im (jednozn.) element $\gamma \in E : \forall_{i \in \overline{1,r}} : \langle \gamma | \alpha_i \rangle = \lambda_i$.

Komentarz: Niech $\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ baza V, $\{\lambda_i\}_{i\in\overline{1,r}} \subset \mathbb{K}$ (dow.)

Szukamy $\varphi \in V^*$: $\forall i\in\overline{1,r} : \varphi(\alpha_i) = \lambda_i$.

Jest $\varphi = \lambda_i \triangleright a^i$, gdzie $a^i(\alpha_j) = \delta^i_{\ j}$.

Niezwyrodnienie $\langle\cdot|\cdot\rangle$ pozwala przypisać φ jedyny wektor γ : $\varphi \equiv \langle\gamma|\cdot\rangle$.

Mając γ, stwierdzamy, iż

na $R_+ \equiv R \cap \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}} \ni \alpha$ jest $\langle \gamma | \alpha \rangle > 0$,

czyli $R_+ \subset E_+^{\Pi_\gamma}$, gdzie $\Pi_\gamma = \langle \gamma \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \subset E$.

(str. 187)

Niechaj teraz $\alpha \in \Delta^{c R_+}$ i załóżmy, iż α rozkładalny na co najmniej dwa elementy R_+ (oczywiście ze współczynnikami z $\mathbb{N}^\times$). Oba elementy nie mogą być z $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}}$, bo $\langle \alpha \rangle_{\mathbb{R}} \cap R = \{\pm \alpha\}$, zatem $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i $\underset{(\text{np.})}{\beta_1 \neq \alpha}$, czyli w rozkładzie bazowego! α występuje $\neq \alpha$ pierwiastek $\tilde{\alpha} \in \Delta$ (z $\neq 0$ współczynnikiem) – wszakże β_1 rozkładalny w bazie Δ. verte

To jednak oznacza, że Δ <u>nie</u> jest LNZ.

Każdy zatem $\alpha \in \Delta$ jest nierozkładalny.

W takim razie na mocy udowodnionej części $\boxed{\Rightarrow}$ twierdzenia $\Delta \subset \Delta_{\Pi_\gamma}$. Ale Δ_{Π_γ} jest bazą E, zatem $|\Delta_{\Pi_\gamma}| = \dim_{\mathbb{R}} E = |\Delta|$, czyli $\Delta = \Delta_{\Pi_\gamma}$. $\square$

Gdyby było: $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ i składowe $\sim \alpha_i$ w β_1 (195½)

znoszą się ze składowymi $\sim\alpha_i$ w β_2

(tym razem: α nie ma żadnej składowej),

to jeden z β_1, β_2 byłby z $R_- = R \cap \langle \Delta \rangle_{-\mathbb{N}}$!

Założyliśmy tymczasem, że oba $\in R_+$.

Zachodzi też

Str. 33. Niech Δ będzie bazą R.

wówczas $\{\alpha^\vee\}_{\alpha\in\Delta}$ jest bazą $R^\vee$.

196

D: Zaczniemy od

Lemat: Niech Δ będzie bazą R,

a $R_+ \equiv R \cap \langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}$ - zbiorem pierwiastków dodatnich.

$$\forall_{\alpha\in\Delta} : \alpha \notin \langle R_+ \setminus \{\alpha\} \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

DL: A.a. Ograniczmy do sytuacji $\alpha_1 = \alpha$ i $\Delta \setminus \{\alpha\} = \{\alpha_j\}_{j\in\overline{2,r}}$.

Przyjmijmy, że $\alpha_1 = \sum_{\beta\in R_+\setminus\{\alpha\}} \lambda_\beta \triangleright \beta$, $\lambda_\beta \in \mathbb{R}$.

Skoro $R_+ \subset \langle\Delta\rangle_{\mathbb{N}}$, to dostajemy relację

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \, \alpha_i \quad , \quad \mu_i \geq 0$$ (197)

Wobec liniowej niezależności $\{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}}$ musi być $\mu_i = \delta_{i1}$, ale każdy $\beta \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$, w rozkładzie ≥ 0

zatem to implikuje $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta \in \langle \alpha_1 \rangle_{\mathbb{R}}$!

czyli $\forall \beta$ w rozkładzie : $\beta = \alpha_1$ (innych $\mathbb{R}$-krotności nie ma w R_+). ↯ (wszak $\beta \in R_+ \setminus \{\alpha_1\}$) $\boxtimes$

Wracamy do dowodu twierdzenia...

Ustalmy $\Pi_\Delta \subset R$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_\Delta = 1$ w relacji z Δ

jak w Tw. [1] (str. 188), oznaczając przy tym jako E_+

podzbiór E zawierający Δ, tj. R_+ są pierwiastkami dodatnimi wzgl. Δ. (198)

Wtedy tożsame $\{\alpha^\vee\}_{\alpha\in R_+} \subset E_+$ i $\{\beta^\vee\}_{\beta\in R_-} \subset E_-$.

Na mocy Tw. 11 : $\exists\, \Delta^\vee$ bazy $R^\vee$: $R^\vee_+ \equiv \{\alpha^\vee\}_{\alpha\in R_+}$

to pierwiastki dodatnie wzgl. $\Delta^\vee$

Jeśli teraz $\alpha\in R_+\setminus\Delta$, to $\alpha\in\bigoplus_{i=1}^{r}\langle\alpha_i\rangle_{\mathbb{N}}$ i przy czym przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie w bazie $\neq 0$. Wówczas $\alpha^\vee\in\bigoplus_{i=1}^{r}\langle\alpha_i^\vee\rangle_{\mathbb{R}\geq 0}$ i przynajmniej dwa współczynniki w jego rozkładzie są $\neq 0$. Ale (199)

$\forall i \in \overline{1,r}: \ \alpha_i^\vee \in R_+^\vee \ \wedge \ \alpha_i^\vee \neq \alpha^\vee$, gdyż w p.p.

$\alpha^\vee$ nie jest jednym z $\alpha_i^\vee$, a dał się rozpisać na nich (+)

byłoby $\underbrace{(\alpha^\vee)^\vee}_{\equiv \alpha} = (\alpha_i^\vee)^\vee \equiv \alpha_i$ (tw. 181). Możemy

zatem przywołać tego Lematu, $\Longrightarrow$ nie jest z bazy $\Delta^\vee$

by stwierdzić, że $\alpha^\vee \notin \Delta^\vee$. W takim razie

$\Delta^\vee \subset \{\alpha_i^\vee\}_{i\in\overline{1,r}}$, a ponieważ $\Delta^\vee$

jest bazą E, przeto $|\Delta^\vee| = |\Delta| = r$,

czyli $\Delta^\vee = \{\alpha_i^\vee\}_{i\in\overline{1,r}}$. $\square$

Dotychczasowe rozważania odpowiadają coś do

Def. 25. Niech (E,R) będzie systemem pierwiastkowym i niech $\Pi_\alpha = \operatorname{Ker}\langle\alpha|\cdot\rangle$, $\alpha\in R$. (OTWARTA) KOMNATA WEYLA systemu pierwiastkowego (E,R) to spójna składowa $E\setminus\bigcup_{\alpha\in R}\Pi_\alpha$. (OTWARTA) FUNDAMENTALNA KOMNATA WEYLA s.p. (E,R) wzgl. bazy $\Delta=\{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ to zbiór

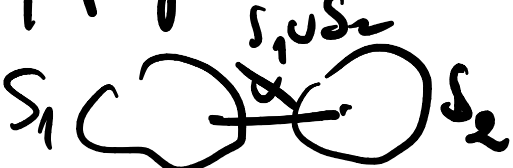
$$\mathcal{C}(E,R;\Delta)=\{v\in E \mid \forall i\in\overline{1,r}: \langle\alpha_i|v\rangle>0\}.$$

Pokażemy, że $\mathfrak{C}$ jest komorą Weyla...

<u>NB</u>: $\forall v_1, v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)\ \forall t \in [0,1]$:

$$v := t \triangleright v_1 + (1-t) \triangleright v_2 \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)$$

W rzeczy samej $t, 1-t \geq 0$ i przynajmniej jedna z liczb $t, 1-t$ jest > 0, co jednak oznacza, że $\forall i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle > 0$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest stożkiem wypukłym, więc też spójnym, a ponieważ istnieje 1-forma φ na E : verte 1° $\varphi(\alpha_i) = 1,\ i \in \overline{1,r}$, przeto istnieje wektor v : $\langle \alpha_i | v \rangle = 1,\ i \in \overline{1,r}$, czyli $\mathfrak{C}(E,R;\Delta) \neq \emptyset$. Wreszcie też



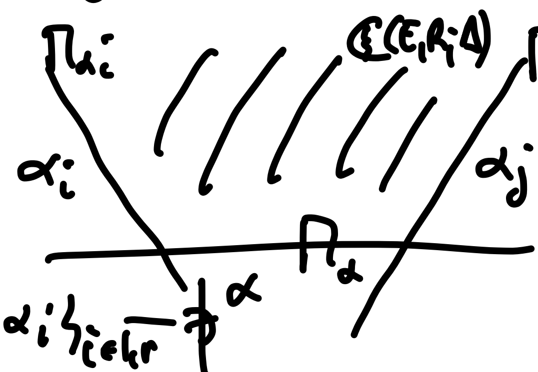
$\partial \mathfrak{C}(E,R;\Delta) = \{ v \in E \mid \exists i \in \overline{1,r} : \langle \alpha_i | v \rangle = 0 \}$, zatem $\mathfrak{C}(E,R;\Delta)$ jest komorą Weyla

verte 2° verte 3°

1° Chcemy $\forall i \in \overline{1,r} : \varphi(e_i) = 1$. Bierzemy $\{\varphi^i\}^{i \in \overline{1,r}} : \varphi^i(e_j) = \delta^i_j$ (2o1½)

i kładziemy $\varphi := \sum_{i=1}^{r} \varphi^i$.

2° [illegible], nie może być



$\Delta = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,r}} \not\ni \alpha$,

bo wtedy opuszczenie $\mathcal{E}$ przez Π_α nie mogłoby się ze spełnieniem żadnego z warunków

$\langle \alpha_i | v \rangle > 0$, $i \in \overline{1,r}$!

3° Niech $v \in \mathcal{E} \cap \Pi_\alpha$, $\alpha \in R$, czyli $\langle v | \alpha \rangle = 0$, ale $\underset{(i)}{\alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}} \veebar \underset{(ii)}{\alpha \in \langle \Delta \rangle_{-\mathbb{N}}}$

(i) $\Rightarrow$ $0 = \langle v | \alpha \rangle = \sum_i |n^i| \cdot \langle v | \alpha_i \rangle \overset{!}{>} 0 \Rightarrow \forall i : n_i = 0$ ↯

(ii) $\Rightarrow$ $0 = \langle v | \alpha \rangle = -\sum_i |n^i| \cdot \langle v | \alpha_i \rangle \overset{>0\,!}{\Rightarrow} \forall i : n_i = 0$ ↯

OBSERWACJE :

1) $\forall v \in \mathfrak{C}(E,R;\Delta)\ \forall \alpha \in R_+ : \langle \alpha | v \rangle > 0$

($\Leftarrow \alpha \in \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$)

2) $\forall \chi \in W(E,R) : \chi(R) = R \wedge \chi \in O(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

$\Rightarrow \chi(\{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}) = \{\Pi_\alpha\}_{\alpha \in R}$

bo $\chi(\Pi_\alpha) = \{\chi(v) \mid \langle v | \alpha \rangle = 0\}$
$\equiv \{\chi(v) \mid \langle \chi(v) | \chi(\alpha) \rangle = 0\}$
$\equiv \Pi_{\chi(\alpha) \in R}$ i χ odwracalne!

$\Rightarrow \forall C$ - otwarta komora Weyla : $\chi(C)$ - otwarta komora Weyla

Okazuje się, że związek pomiędzy bazami i (fundamentalnymi) komorami Weyla jest 1:1...

Str. 34. $\forall C$ - otwarta komora Weyla (E,R) $\exists!\, \Delta_C$ - baza R: (203)

$C \equiv \mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) \wedge R_+^{(\Delta_C)} \equiv \{\alpha\in R \mid \forall v\in\mathfrak{C}(E,R;\Delta_C) : \langle\alpha|v\rangle>0\}$

Istnieje zatem jedno-jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy bazami R i otwartymi komorami Weyla.

D: Niechaj $v\in C$ i rozważmy $\Pi_v = \langle v\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$.

Wprost z definicji C: v nie jest $\perp$ do żadnego pierwiastka, zatem $\Pi_v \subset E\setminus R$ (nie zawiera pierwiastków) $v\in$ DOPEŁNIENIE def $\bigcup \Pi_\alpha$ α t.ż. $v\perp\alpha$ bo $\Pi_v\ni\alpha \Leftrightarrow v\in\Pi_\alpha$. Na mocy Tw. 11 (1. część) istnieje baza $\Delta_C = \{\alpha_i\}_{i\in\overline{1,r}}$ w części $E\setminus\Pi_v$ zawierającej v.

Jako że $\operatorname{sign}\langle\alpha_i, \cdot\rangle\big|_C = \text{const}$ (w p.p. przecięlibyśmy

którąś z $\Pi_{\alpha_i} \in \{\Pi_\alpha\}_{\alpha\in R}$), przeto – wobec wyboru $v\in C$ tak, by mieć –

położenie Δ_C – $\forall w\in C\ \forall i\in\overline{1,r} : \langle\alpha_i|w\rangle > 0$,

bo $R_+^{\Pi_v}$

czyli też $\forall w\in C\ \forall \alpha\in R_+^{\Pi_v} : \langle w|\alpha\rangle > 0$, $\hat{\Delta}_C \subset \mathbb{N}$

a ponieważ $R_\pm^{\Pi_v} \subset \langle\Delta_C\rangle_{\pm\mathbb{N}}$, więc $R_+^{\Pi_v}$ składa się

z tych i tylko tych (czyli pomiędzy wszystkie

i tylko te) pierwiastków, które mają dodatni

iloczyn skalarny z elementami C.

Ogólnie $C \equiv \mathfrak{C}(E,R;\Delta_C)$. Pozostaje upewnić się co do jedyności Δ_C.

205

Niechaj Δ_C' będzie dowolną bazą o fundamentalnej komorze Weyla $C \equiv \mathfrak{C}(E, R; \Delta_C')$. Wówczas $\forall \alpha \in \Delta_C' \; \forall v \in C : \langle \alpha | v \rangle > 0$, czyli $\Delta_C' \subset R_+^{\Pi r}$, tj. w tej samej części co Δ_C. W konsekwencji $R_+^{(\Delta_C')} \equiv R_+^{(\Delta_C)} \Rightarrow$ mają te same nierozkładalne pierwiastki dodatnie, tj. $\Delta_C' \equiv \Delta_C$. $\square$

verte!

Trochę później: Δ_C są nierozkładalne (tak że 205½ wyprowadziliśmy), ale Δ_C' jest bazą E (z zał.), więc elementy Δ_C rozkładają się w tejże bazie Δ_C'. Gdyby te rozkłady NIE były trywialne (z jedynym tylko $n^i \neq 0$, co właśnie daje $\Delta_C = \Delta_C'$), to mielibyśmy rozkładalność odnośnych elementów Δ_C (na sumy innych pierwiastków z dodatniej pół-przestrzeni). ↯